Применим полученные результаты к нашему случаю. Имеем

$$w_p(r^2) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\sqrt{\frac{Q}{2\pi D}} \, p \frac{r^2}{a^2}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n}{m!(n-m)!} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m + \frac{i}{8}\sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} \, p\left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D}\right)\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2} + m - \frac{i}{8}\sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} \, p\left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D}\right)\right)$$

Искомые полюса будут корнями уравнения

$$\frac{k_f}{\varepsilon\lambda D N_2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{ch}\left[-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} \, p\left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D}\right)\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\left(\frac{Q}{\pi D} p\right)^{1/2 n} \left(\frac{2n}{a} + \frac{k_f}{\varepsilon\lambda D N_2}\right) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m + \frac{i}{8}\sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} \, p\left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D}\right)\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2} + m - \frac{i}{8}\sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} \, p\left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D}\right)\right) = 0 \qquad (10)$$

Интересно найти наименьший показатель спадания плотности пара вдоль трубы. Для этого нужно найти наименьший по абсолютной величине отрицательный корень уравнения (10). При условии его малости, имеем для этого показателя

$$p = -2\pi a k_f / \varepsilon\lambda N_2 Q$$

Следовательно, для увеличения конденсации необходимо уменьшить расход газа через трубу, увеличить ее радиус и уменьшить толщину жидкой пленки на стенке.

Поступило 11 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Чен М. Аналитическое исследование процесса конденсации при ламинарном течении пленки. Теплопередача, Изд. «Мир». 1961, № 1, стр. 60, 70.
2. Джейн К., Бэнкоф С. Ламинарная пленочная конденсация на вертикальной стенке с постоянной скоростью отсасывания. Теплопередача, Изд. «Мир». 1964, № 4, стр. 18.
3. Фрэнкел Н., Бэнкоф С. Ламинарная пленочная конденсация на стенке пористой горизонтальной трубы с постоянной скоростью отсасывания. Теплопередача, Изд. «Мир». 1964, № 4, стр. 115.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1949.

УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ КОНВЕКЦИИ В РЕАЛЬНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Л. Г. ФИЛИППЕНКО *(Киев)*

Исследованию механической устойчивости (т. е. условиям отсутствия конвекции) неравномерно нагретой реальной (вязкой и теплопроводной) жидкости в поле тяжести посвящена обширная литература. Однако обычно за исходную систему дифференциальных уравнений берут линеаризованные уравнения движения, теплопроводности и неразрывности, совместное решение которых является функцией произведения PG (P — число Прандтля, G — число Грассгофа). Использование линеаризованных уравнений означает, что решения применимы только в тех случаях, когда характерная длина l, входящая в число Грассгофа (l может быть характерным размером сосуда, содержащего жидкость, или тела, в нее погруженного), достаточно мала (см., например, [1]). Для сосудов и тел больших размеров эти решения непригодны, и приходится пользоваться локальным условием устойчивости неравномерно нагретой жидкости, выведенным для неограниченной жидкости из термодинамических соображений. Оно имеет вид [1]

$$dT / dz > -g\alpha T / c_p \qquad (1)$$

где T — температура жидкости, α и c_p — коэффициент ее теплового расширения и удельная теплоемкость при постоянном давлении соответственно, g — ускорение силы тяжести и z — вертикальная координата.

Но условие (1) выведено в предположении изэнтропичности возмущений и потому годится лишь для невязкой и нетеплопроводной жидкости. Учет вязкости и теплопроводности произведен ниже. При этом оказалось, что дело сводится не просто к поправке к (1), а к появлению совершенно новых закономерностей в поведении жидкости и, следовательно,— к установлению существенно нового условия ее устойчивости. Рассмотрим безграничную неподвижную жидкость постоянного состава, в которой выполняется уравнение гидростатики

$$dp / dz = -\rho g \tag{2}$$

так что давление p, плотность ρ, удельная энтропия s и т. д. зависят только от z. При $g = 0$ всякое случайное движение выделенного элемента жидкости с линейным масштабом $2a$ при любой скорости $\mathbf{v}$ было бы затухающим из-за влияния вязкого трения. При $g \neq 0$ на выделенный элемент, кроме силы трения, действуют его вес $\mathbf{P}$ и архимедова сила $\mathbf{f}$ (в расчете на единицу объема)

$$\mathbf{P} = \rho^* \mathbf{g}, \qquad \mathbf{f} = -\rho \mathbf{g}$$

где ρ^* — плотность, усредненная по объему элемента. Движение будет затухающим, если работа равнодействующей этих сил на пути элемента не положительна, поэтому выполнение неравенства

$$\mathbf{v} \cdot (\rho^* - \rho) \mathbf{g} = v_z (\rho - \rho^*) g \leqslant 0 \tag{3}$$

будет достаточным условием устойчивости механического равновесия реальной жидкости. В дальнейшем рассматриваются только такие случайные движения, скорости которых много меньше скорости звука, так что при одинаковых z давление внутри и вне выделенного элемента одинаково. Если движение начинается в момент t, то в момент $t + dt$

$$\rho^*(z, t + dt) = \rho^*[p, s^*(z, t + dt)] = \rho^*[p, s^*(z, t)] + (\partial \rho / \partial s)_p ds^* / dt dt$$

Здесь z — лагранжева координата движущегося объема, s^* — удельная энтропия, усредненная по объему элемента. Плотность окружающих слоев жидкости

$$\rho(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \rho[p, s(z)] + (\partial \rho / \partial s)_p v_z dt ds / dz$$

и так как $s^*(z, t) = s(z)$, то $\rho^*[p, s^*(z, t)] = \rho[p, s(z)]$, так что

$$\rho(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \rho^*(z, t + dt) = (\partial \rho / \partial s)_p [v_z ds / dz - ds^* / dt] dt \tag{4}$$

Изменение энтропии элемента [1]

$$\rho^* T^* ds^* / dt = \langle \sigma_{ik}' \partial v_i / \partial x_k \rangle + \langle dQ / dt \rangle \tag{5}$$

$$\sigma_{ik}' = \eta (\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i - {}^2/_3 \delta_{ik} \partial v_m / \partial x_m) + \zeta \delta_{ik} \partial v_m / \partial x_m$$

$$(i, k = 1, 2, 3, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z)$$

Здесь η и ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, $\langle dQ \rangle$ — количество тепла, приобретаемое единицей объема элемента за время dt.

Движущийся элемент не будет строго локализованным образованием, и все характеризующие его параметры меняются непрерывным образом от их значений в средней части элемента до установившихся значений в жидкости на периферии. В частности, k — компонента скорости меняется от величины v_k в центре до нуля на периферии, так что

$$\langle |\partial v_k / \partial x_n| \rangle \approx |v_k| / a \tag{6}$$

Учитывая также, что при переходе через центральное сечение элемента знак производной $(\partial v_k / \partial x_n)$ меняется на обратный, так что при усреднении по объему соответствующие члены в нечетных степенях исчезают, на основании (6) получим

$$\langle \sigma_{ik}' \partial v_i / \partial x_k \rangle = ({}^{10}/_3 \eta + \zeta) v^2 / a^2 \tag{7}$$

Вследствие нагревания, вызванного вязким трением, температура движущегося элемента возрастает

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{1}{\rho^* c_p} \left\langle \sigma_{ik}' \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{1}{\rho^* c_p} \left(\frac{10}{3} \eta + \zeta \right) \frac{v^2}{a^2}$$

Температура окружающих слоев жидкости также меняетя

$$dT / dt = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T = v_z dT / dz$$

Если $(dT^* / dt) \neq (dT / dt)$, то появляется радиальный тепловой поток

$$q(t + dt) \approx \lambda \frac{T^*(t + dt) - T(t + dt)}{dr} = \frac{\lambda}{v} \left(\frac{dT^*}{dt} - \frac{dT}{dt} \right)$$

поскольку $T^*(t) = T(t)$. А так как

$$\left\langle \frac{dQ}{dt} \right\rangle \approx -\frac{4\pi a^2 q}{{}^4/{}_3\pi a^3} = -\frac{3q}{a}$$

то

$$\left\langle \frac{dQ}{dt} \right\rangle = \frac{3\lambda}{av}\left(\frac{dT}{dt} - \frac{dT^*}{dt} \right) = \frac{3\lambda}{av}\left[v_z \frac{dT}{dz} - \frac{1}{\rho^* c_v}\left(\frac{10}{3}\eta + \zeta \right)\frac{v^2}{a^2} \right] \tag{8}$$

Подстановка (7) и (8) в (5) дает

$$\frac{ds^*}{dt} = \frac{v_z}{T^*}\left[\frac{3\lambda}{av\rho}\frac{dT}{dz} + \frac{1}{v_z}\left(c_p - \frac{3\lambda}{av\rho} \right)\left(\frac{10}{3}\eta + \zeta \right)\frac{v^2}{a^2\rho c_p} \right] \tag{9}$$

Здесь $1/\rho^*$ заменено на $1/\rho$, что в (4) дает погрешность в квадратичных членах разложения, которые и без того опущены.

Из известных термодинамических соотношений следует:

$$\frac{ds}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} + g\alpha, \qquad \left(\frac{\partial\rho}{\partial s} \right)_p = -\frac{\rho\alpha T}{c_p}, \qquad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \tag{10}$$

Теперь условие (3) приводится к виду (полагая $T^* = T$)

$$\left(c_p - \frac{3\lambda}{av\rho} \right)\frac{dT}{dz} \geqslant -g\alpha T + \frac{1}{v_z}\left(c_p - \frac{3\lambda}{av\rho} \right)\left(\frac{10}{3}\eta + \zeta \right)\frac{v^2}{a^2\rho c_p} \tag{11}$$

или, вводя обозначения

$$\xi = 3\lambda / av\rho c_p, \qquad \psi = ({}^{10}/{}_3\eta + \zeta)v^2 / a^2\rho c_p$$

к виду

$$dT / dz \geqslant F(\xi, \psi, v_z) \equiv -g\alpha T / (1 - \xi)c_p + \psi / v_z \tag{12}$$

При $\lambda = \eta = \zeta = 0$ условия (11) и (12) переходят в (1).

Из полученного условия устойчивости следует:

а) При $\xi \to 1$ функция $F(\xi, \psi, v_z) \to -\infty$, поэтому возмущения, соответствующие таким ξ, не в состоянии нарушить устойчивость жидкости ни при каких температурных полях в ней. Физическая причина этого явления видна из формулы (9), в которой первый член справа характеризует «тепловую» часть прироста s^*, а второй — ее «механическую» часть. При $\xi = 1$ теплопроводность жидкости оказывается достаточной, чтобы обеспечить изменение s^*, в точности равное изменению s, а диссипируемое тепло отвести из элемента наружу. Поэтому в течение всего движения $s^* = s$, так же как и $p^* = p$, а потому и $\rho^* = \rho$, и всякое движение затухнет из-за вязкого трения при любых температурных полях.

При $\xi > 1$ (меньшие скорости v) изменение s вдоль траектории элемента будет меньше, чем при $\xi = 1$, и при той же теплопроводности выравнивание s^* и s будет ею тем более обеспечено. Значит, затухание возмущений при $\xi > 1$ обеспечивается — в любых температурных полях — еще более успешно, чем при $\xi = 1$. Стало быть, в (11) и (12) вся область $\xi \geqslant 1$ отвечает устойчивому механическому равновесию жидкости, независимо от величины вертикальных температурных градиентов в ней.

б) Значения $F(\xi, \psi, v_z)$ определяются не только величиной v, но и v_z, поэтому для реальной жидкости не существует не зависящего от направления $\mathbf{v}$ общего условия устойчивости типа (1), как в изэнтропическом случае.

в) В области $\xi < 1$ устойчивость жидкости различна по отношению к возмущениям с $v_z > 0$ и $v_z < 0$. При таких ξ в приращение s^* существенный вклад вносит вязкое трение. Этот вклад всегда положителен, и при всплывании элемента вышележащие слои жидкости уже не могут быть столь холодными, как было допустимо в отсутствие трения, чтобы элемент оказался все же холоднее их; наоборот, при погружении нижележащие слои могут быть более горячими, чем было необходимо в отсутствие трения, и все же он окажется горячее их. Если

$$F(\xi, \psi, v_z > 0) > (dT / dz) > F(\xi, \psi, v_z < 0)$$

то нисходящие потоки будут затухать, но восходящие могут развиваться; при благоприятных условиях это может привести к потере равновесия жидкостью.

Поступило 21 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.