КОНДЕНСАЦИЯ ПАРА В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ГАЗА НА СТЕНКАХ ГАЗОПРОВОДА

Г. М. ФИЛИППОВ *(Москва)*

Подобная задача рассматривалась в работах [1–3], причем в работе [3] отдельно рассмотрен случай невесомости. При этом не учитывались диффузия пара, состояние и движение потока газа. В настоящей статье делается попытка учесть эти явления.

Пусть газ с насыщенным паром при температуре T_g подается в трубку радиуса a при $z = 0$ со скоростью v, направленной вдоль оси z.

При этом на поверхности газопровода образуется жидкая пленка, толщину которой ε будем считать неизменной.

Неизменность толщины пленки может обеспечиваться каким-либо отсасывающим устройством, причем скорость отсасывания предполагается настолько малой, что ею можно пренебречь. Концентрация пара n_0 при $z = 0$ известна и равна плотности насыщенных паров при температуре T_g.

В рассматриваемом здесь достаточно малом интервале температур будем считать, что плотность насыщенных паров линейно зависит от температуры

$$n = N_1 + N_2 T \tag{1}$$

где параметры N_1 и N_2 пренебрежимо мало меняются в данном интервале температур. Кроме этого, будем считать, что в пленке

$$|\partial T / \partial z| \ll |\partial T / \partial r| \tag{2}$$

что, очевидно, выполняется, если показатель затухания температуры по z много меньше $1 / \varepsilon$.

В дальнейшем будем интересоваться стационарным случаем. Система уравнений, описывающих диффузию пара и температуру газа, имеет вид

$$D\Delta n = v\frac{\partial n}{\partial z}, \qquad \frac{k_g}{\rho_g c_g}\Delta T = v\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3}$$

Здесь D — коэффициент диффузии пара, k_g, ρ_g, c_g — коэффициент теплопроводности, плотность и теплоемкость газа, соответственно. Для температуры в пленке, в силу (2) можно написать $T = T_0 + K(a - r)$, где K зависит от z.

На поверхности пленки температура должна быть непрерывной; плотность паров должна равняться плотности насыщающих паров при температуре поверхности пленки; разность потоков тепла из газа в пленку и из пленки в газ должна равняться потоку тепла за счет конденсации паров на поверхности пленки. Это дает три граничных условия.

Если расход газа через трубку Q, то, предполагая скорость пленки равной нулю, будем иметь, как известно

$$v = 2Q(a^2 - r^2) / \pi a^4$$

Это выражение для скорости нужно подставить в систему (3) и решить ее в случае цилиндрической симметрии.

Совершим одностороннее преобразование Лапласа по координате z. Тогда, как нетрудно видеть, решение уравнений (3) представимо в виде

$$n = n_0 + \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pz} n_p w_p(r)\,dp, \qquad T = T_g + \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pz} T_p v_p(r)\,dp$$

где функция $w_p(r)$ будет ограниченным в нуле решением уравнения

$$\frac{d^2 w_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{dw_p}{dr} + \left[p\left(p - \frac{2Q}{\pi a^2 D}\right) + \frac{2Qpr^2}{\pi a^4 D}\right] w_p = 0 \tag{4}$$

Функция $v_p(r)$ удовлетворяет тому же уравнению, где вместо D стоит $k_g / \rho_g c_g$. Граничные условия дают

$$K_p\varepsilon = \frac{T_g - T_0}{p} + T_p v_p(a) - k_f K_p - k_g T_p \frac{\partial v_p(a)}{\partial r} = \lambda D n_p \frac{\partial w_p(a)}{\partial r}$$

$$\frac{N_1}{p} + N_2\left(\frac{T_g}{p} + T_p v_p(a)\right) = \frac{n_0}{p} + n_p w_p(a)$$

После несложных вычислений имеем, пренебрегая малыми членами $\sim k_g$

$$n_p = -\frac{n_0 - N_1 - N_2T_0}{p}\left[w_p(a) + \frac{\varepsilon\lambda DN_2}{k_f}\frac{\partial w_p(a)}{\partial r}\right]^{-1}$$

Нужно найти полюса, причем главным образом полюс, ближе всех расположенный к началу координат на отрицательной части действительной оси p. Для этого необходимо найти явное выражение $w_p(r)$. К этому сейчас переходим.

Решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 4(\alpha + \beta x^2)y = 0 \tag{5}$$

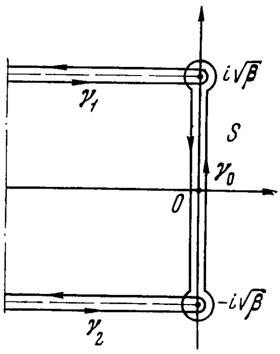
Перейдем в (5) к новой независимой переменной $w = x^2$. Имеем

$$w\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{dy}{dw} + (\alpha + \beta w)y = 0 \tag{6}$$

Решим последнее уравнение при помощи преобразования Лапласа

$$y(w) = \int_\gamma y_s e^{sw} ds$$

Уравнение (6) имеет две особые точки $s = \pm i\sqrt{\beta}$. Любое решение (6) может быть представлено в виде



$$y_\gamma \sim \int_\gamma e^{sw}(s - i\sqrt{\beta})^\theta(s + i\sqrt{\beta})^\vartheta ds$$

$$\left(\theta = -\frac{1}{2} - \frac{i\alpha}{2\beta}, \quad \vartheta = -\frac{1}{2} - \frac{i\alpha}{2\beta}\right)$$

Контур γ должен выбираться из условия (фигура)

$$e^{sw}y_s(s^2 + \beta^2)\,|_\gamma = 0$$

Решение, ограниченное при $w = 0$, будет иметь вид (см., напр. [4])

$$y_0(w) \sim y_{\gamma_0}(w) = \int_{-i\sqrt{\beta}}^{i\sqrt{\beta}} (s - i\sqrt{\beta})^\theta(s + i\sqrt{\beta})^\vartheta e^{sw} ds \tag{7}$$

Растягивая контур γ_0 в сторону отрицательных ReS до бесконечности, можно найти другое представление решения $y_0(w)$ в виде

$$y_0(w) \sim y_{\gamma_1}(w) - e^{\pi\gamma}y_{\gamma_2}(w) =$$

$$= -2i(1 + e^{\pi\gamma})\int_0^\infty e^{-s}s^{-1/2}\,\mathrm{Im}\,\{(s + 2i\sqrt{\beta}\,w)^\vartheta s^{-1/2 i\gamma}e^{i\sqrt{\beta}w}\}\,ds, \qquad \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \tag{8}$$

Последнее выражение удобно для получения асимптотики решения. Из формулы (7) можно получить следующее разложение $y_0(w)$ в ряд

$$y_0(w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} i^n\frac{(\sqrt{\beta}\,w)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}\Gamma(n - m - \theta)\Gamma(m - \vartheta) \tag{9}$$

Легко видеть, что члены ряда (9) убывают с ростом n. Ввиду знакопеременности ряда этого оказывается достаточным для его сходимости при любых конечных w. Можно, однако, доказать, на чем здесь не останавливаемся, что этот ряд абсолютно сходится при любых конечных w.

Асимптотика решения $y_0(w)$ при $w \to \infty$ получается из (8)

$$y_0(w) \sim \frac{1}{\sqrt{w}}\sin\left[\sqrt{\beta}\,w - \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}}\ln(2\sqrt{\beta}\,w) + \arg\Gamma(-\vartheta)\right]$$

Итак, при больших w функция $y_0(w)$ осциллирует с периодом $2\pi/\sqrt{\beta}$, уменьшая свою амплитуду обратно пропорционально корню из w.

Применим полученные результаты к нашему случаю. Имеем

$$w_p(r^2) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\sqrt{\frac{Q}{2\pi D}} p \frac{r^2}{a^2} \right)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n}{m!(n-m)!} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m + \frac{i}{8} \sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} p \left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D} \right) \right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2} + m - \frac{i}{8} \sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} p \left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D} \right) \right)$$

Искомые полюса будут корнями уравнения

$$\frac{k_f}{\varepsilon\lambda D N_2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} p \left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\frac{Q}{\pi D} p \right)^{1/2 n} \left(\frac{2n}{a} + \frac{k_f}{\varepsilon\lambda D N_2} \right) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m + \frac{i}{8} \sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} p \left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D} \right) \right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2} + m - \frac{i}{8} \sqrt{\frac{2\pi D}{Q}} p \left(a^2 p - \frac{2Q}{\pi D} \right) \right) = 0 \qquad (10)$$

Интересно найти наименьший показатель спадания плотности пара вдоль трубы. Для этого нужно найти наименьший по абсолютной величине отрицательный корень уравнения (10). При условии его малости, имеем для этого показателя

$$p = -2\pi a k_f / \varepsilon\lambda N_2 Q$$

Следовательно, для увеличения конденсации необходимо уменьшить расход газа через трубу, увеличить ее радиус и уменьшить толщину жидкой пленки на стенке.

Поступило 11 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Чен М. Аналитическое исследование процесса конденсации при ламинарном течении пленки. Теплопередача, Изд. «Мир». 1961, № 1, стр. 60, 70.
2. Джейн К., Бэнкоф С. Ламинарная пленочная конденсация на вертикальной стенке с постоянной скоростью отсасывания. Теплопередача, Изд. «Мир». 1964, № 4, стр. 18.
3. Фрэнкел Н., Бэнкоф С. Ламинарная пленочная конденсация на стенке пористой горизонтальной трубы с постоянной скоростью отсасывания. Теплопередача, Изд. «Мир». 1964, № 4, стр. 115.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1949.

УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ КОНВЕКЦИИ В РЕАЛЬНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Л. Г. ФИЛИППЕНКО *(Киев)*

Исследованию механической устойчивости (т. е. условиям отсутствия конвекции) неравномерно нагретой реальной (вязкой и теплопроводной) жидкости в поле тяжести посвящена обширная литература. Однако обычно за исходную систему дифференциальных уравнений берут линеаризованные уравнения движения, теплопроводности и неразрывности, совместное решение которых является функцией произведения PG (P — число Прандтля, G — число Грассгофа). Использование линеаризованных уравнений означает, что решения применимы только в тех случаях, когда характерная длина l, входящая в число Грассгофа (l может быть характерным размером сосуда, содержащего жидкость, или тела, в нее погруженного), достаточно мала (см., например, [1]). Для сосудов и тел больших размеров эти решения непригодны, и приходится пользоваться локальным условием устойчивости неравномерно нагретой жидкости, выведенным для неограниченной жидкости из термодинамических соображений. Оно имеет вид [1]

$$dT / dz > -g\alpha T / c_p \qquad (1)$$

где T — температура жидкости, α и c_p — коэффициент ее теплового расширения и удельная теплоемкость при постоянном давлении соответственно, g — ускорение силы тяжести и z — вертикальная координата.