что при некотором размере l_0'' непроницаемого пропластка любой практически возможный дебит будет безводным, и при увеличении экрана высота конуса будет уменьшаться.

Так как точный вид распределения потенциала возмущенного потока неизвестен, можно только установить пределы, внутри которого расположено истинное значение l_0''. Нижний предел для данного $\varphi_k - \varphi_c$ определяется выражением (2.4), а верхний можно установить аналогично минимальному значению предельной депрессии в теории конусообразования.

Автор благодарит И. А. Чарного, В. А. Евдокимову и И. Н. Кочину за обсуждение результатов настоящей работы.

Поступило 7 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Изд-во «Наука», 1965.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
3. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1948.
4. Беляков В. М., Кравцова Р. И., Рапопорт М. Г. Таблицы эллиптических интегралов, т. 1, 2. М., Изд-во АН СССР, 1963.
5. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1941.
6. Сикорский Ю. С. Элементы теорий эллиптических функций с приложениями к механике. М.— Л., Гл. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1936.
7. Чарный И. А. О предельных дебитах и депрессиях в водоплавающих и подгазовых нефтяных месторождениях. Тр. совещания по развитию н.-и. работ в области вторичных методов добычи нефти. Баку, 1953, с. 81—109.

ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Г. А. ДОМБРОВСКИЙ

(Харьков)

Рассматривается плоская установившаяся напорная фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородном слое единичной мощности. Основные уравнения запишем в виде системы

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1}$$

Здесь ψ — функция тока, p — давление, k — коэффициент проницаемости, μ — коэффициент динамической вязкости, x и y — декартовы координаты [1].

Будем считать, что коэффициент проницаемости — функция одной координаты x и изменяется по закону

$$k = \mu(\alpha + \beta x)^2 \qquad (\alpha = \mathrm{const},\ \beta = \mathrm{const}) \tag{2}$$

Общие решения системы (1) тогда представляются в простом виде

$$\psi = \mathrm{Re}\left\{\beta\int F(z)\,dz - (\alpha+\beta x)F(z)\right\}, \qquad p = \frac{1}{\alpha+\beta x}\,\mathrm{Im}\,F(z) \tag{3}$$

где $F(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\theta}$. Функция $F(z)$ определяется по заданным граничным условиям и особенностям для p и ψ.

Пусть контур питания и контур скважины представляют собой концентрические окружности с радиусами r_1 и r_0 соответственно. На контуре питания известны значения давления $p_1(\theta)$, на контуре скважины — значения давления $p_0(\theta)$. Задача об определении поля давления в двусвязной области, ограниченной контуром питания и контуром скважины, может быть решена в этом случае следующим образом.

Представим функцию $F(z)$ в виде ряда

$$F(z) = iB\ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n \tag{4}$$

где B — действительная постоянная и $C_n = A_n + iB_n$ — комплексные постоянные.

Для определения B и C_n воспользуемся разложениями в ряды Фурье

$$(\alpha+\beta r_0\cos\theta)p_0(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^\circ \sin n\theta+b_n{}^\circ\cos n\theta$$

$$(\alpha+\beta r_1\cos\theta)p_1(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^1 \sin n\theta+b_n{}^1\cos n\theta \tag{5}$$

Получаем

$$B=\frac{b_0{}^1-b_0{}^\circ}{\ln r_1-\ln r_0},\qquad B_0=\frac{b_0{}^\circ\ln r_1-b_0{}^1\ln r_0}{\ln r_1-\ln r_0} \tag{6}$$

$$A_n=\frac{a_n{}^\circ r_0{}^n-a_n{}^1r_1{}^n}{r_0{}^{2n}-r_1{}^{2n}},\qquad B_n=\frac{b_n{}^\circ r_0{}^n-b_n{}^1r_1{}^n}{r_0{}^{2n}-r_1{}^{2n}},$$

$$A_{-n}=\frac{a_n{}^\circ r_1{}^n-a_n{}^1r_0{}^n}{r_0{}^n/r_1{}^n-r_1{}^n/r_0{}^n},\qquad B_{-n}=\frac{b_n{}^\circ r_1{}^n-b_n{}^1r_0{}^n}{r_1{}^n/r_0{}^n-r_0{}^n/r_1{}^n}\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{7}$$

Функция $F(z)$ определена. Тем самым, согласно (3), становится известной искомая функция $p(x, y)$, а также функция тока $\psi(x, y)$.

Дебит скважины Q равен приращению, которое получает функция ψ в результате обхода по замкнутому контуру, охватывающему скважину

$$Q=2\pi(\alpha B-\beta B_{-1}) \tag{8}$$

Учитывая выражения для B и B_{-1} и принимая затем во внимание значения коэффициентов рядов Фурье $b_0{}^\circ$, $b_0{}^1$, $b_1{}^\circ$, $b_1{}^1$, получаем формулу для вычисления дебита

$$Q=\frac{1}{\ln r_1-\ln r_0}[\alpha^2(I_1-I_0)+\alpha\beta(r_1G_1-r_0G_0)]+$$
$$+\frac{2}{r_1{}^2-r_0{}^2}[\alpha\beta r_0r_1(r_0G_1-r_1G_0)+\beta^2r_0{}^2r_1{}^2(H_1-H_0)] \tag{9}$$

$$I_m=\int_{-\pi}^{+\pi}p_m d\theta,\quad G_m=\int_{-\pi}^{+\pi}p_m\cos\theta\, d\theta,\quad H_m=\int_{-\pi}^{+\pi}p_m\cos^2\theta\, d\theta \tag{10}$$

Если положить $\beta=0$, то из (9) получаем, как и следовало ожидать, известные формулы Маскета и Дюпюи [2, 3].

При $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ и $p_0=\mathrm{const}$, $p_1=\mathrm{const}$ имеем

$$Q=2\pi(p_1-p_0)\frac{\alpha^2}{\ln r_1-\ln r_0}\left[1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\ln r_1-\ln r_0}{r_1{}^{-2}-r_0{}^{-2}}\right] \tag{11}$$

Второй член в квадратной скобке формулы (11) при $r_0\to 0$ имеет порядок малости $r_0{}^2\ln r_0$. Поэтому при достаточно малых r_0 и при $p_0=\mathrm{const}$, $p_1=\mathrm{const}$ дебит скважины может быть приближенно определен просто по формуле Дюпюи, в которой в качестве коэффициента проницаемости однородного пласта принято значение коэффициента проницаемости в центре рассматриваемого неоднородного пласта, т. е. в месте бурения скважины.

Поступило 8 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Насыров Р. М. Об одном методе восстановления функции давления в неоднородной пористой среде. Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1958, 1.
2. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
3. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.