

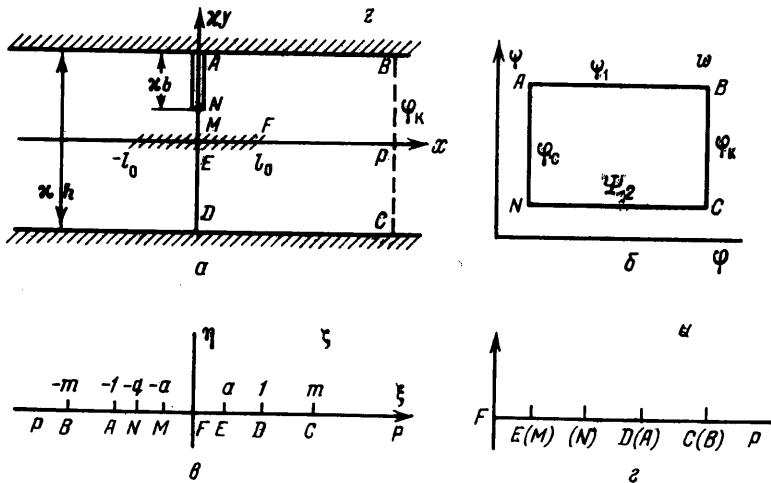
ПРИТОК К НЕСОВЕРШЕННОЙ ГАЛЕРЕЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕПРОНИЦАЕМОГО ПРОПЛАТКА, РАСПОЛОЖЕННОГО СИММЕТРИЧНО ОТНОСИТЕЛЬНО КРОВЛИ И ПОДОШВЫ ПЛАСТА

Р. А. МУКМИНОВ

(Москва)

Дается решение задачи о дебите несовершенной галереи в однородно-анизотропном пласте с непроницаемым пропластком. Полученное решение использовано для расчета предельного безводного дебита нефти; исследовано влияние размера экрана.

§ 1. Дебит галереи. Рассмотрим приток к несовершенной галерее в пласте мощностью h при вскрытии b . Пусть $2l_0$ — протяженность непроницаемого пропластка, l — расстояние от контура питания до галереи, k — проницаемость вдоль направления, k_y — проницаемость по вертикали, μ — вязкость нефти, φ_k и φ_c — потенциалы на контуре питания и галерее соответственно. Жидкость считаем несжимаемой, фильтрацию — подчиняющейся закону Дарси, кровлю и подошву пласта — непроницаемыми.



Фиг. 1

Растянув вертикальную координату в κ раз, где $\kappa = (k/k_y)^{1/2}$ — характеристика анизотропии, однородно-анизотропный пласт преобразуется в однородный (фиг. 1, а).

Задача решается методом конформных отображений [1]. Область течения в плоскости $z = x + i\kappa y$ разбивается по линии тока DE и MN на две односвязные области, и правая зона течения отображается на плоскость комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ в виде прямоугольника (фиг. 1, б).

Вводится вспомогательная плоскость комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$, на верхнюю полуплоскость которой отображается правая зона течения. Зададим $\zeta_F = 0$, $\zeta_P = \infty$, $\zeta_A = -1$, по симметрии $\zeta_D = 1$; пусть $\zeta_M = -a$, $\zeta_B = -m$, $\zeta_N = -q$; по симметрии $\zeta_E = a$, $\zeta_C = m$, где a , m и q — неизвестные параметры (фиг. 1, в).

По формуле Кристоффеля — Шварца отображение верхней полуплоскости ζ на внутреннюю часть многоугольника $ABCDEFMA$ области течения представляется так:

$$z = \sigma_1 \int_0^{\zeta} \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - m^2)}} + \tau_1 \tag{1.1}$$

Здесь σ_1 и τ_1 — неизвестные постоянные.

Обозначая $\zeta^2 = u$, т. е. вводя еще одну вспомогательную плоскость комплексного переменного u , на которую область течения отображается в виде плоскости с разрезом вдоль положительной части действительной оси (фиг. 1, г), получим

$$z = \frac{i\sigma_1}{2} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(c-u)(1-u)(d-u)}} + \tau_1 \quad \left(\begin{matrix} c = a^2 \\ d = m^2 \end{matrix} \right) \tag{1.2}$$

Постоянные σ_1 и τ_1 определяются из выражения (1.2) на участке $0 \leq u \leq c$. Рассмотрев участки $c \leq u \leq 1$ и $1 \leq u \leq d$, для определения неизвестных параметров c , d и q , в зависимости от геометрии пласта, получим следующие соотношения:

$$\frac{\kappa h}{2l} = \frac{K(k_1)}{K(k_1')} \quad \frac{l_0}{l} = \frac{F(\theta_1, k_1')}{K(k_1')}, \quad \frac{\kappa(h-2b)}{2l} = \frac{F(\theta_1, k_1)}{K(k_1')} \quad (1.3)$$

$$k_1 = \left(\frac{1-c}{d-c}\right)^{1/2}, \quad k_1' = \left(\frac{d-1}{d-c}\right)^{1/2}, \quad \theta_1 = \arcsin \sqrt{c}, \quad \theta_1 = \arcsin \left(\frac{q^2-c}{1-c}\right)^{1/2}$$

Здесь $F(u, k)$ — эллиптический интеграл первого рода, $K(k) = F(\pi/2, k)$.

Для нахождения дебита галереи рассмотрим отображение области $ANCB$ плоскости комплексного переменного ω (фиг. 1, б) на плоскость ζ .

На отрезке $-m \leq \zeta \leq -1$ по формуле Кристоффеля — Шварца имеем

$$\omega = \sigma_2 \int_{-m}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(m-\zeta)(-q-\zeta)(-1-\zeta)(\zeta+m)}} + \tau_2 \quad (1.4)$$

Неизвестные постоянные σ_2 и τ_2 определяются из условий $\zeta = -m$, $\omega = \varphi_k + i\psi_1$ в точке B и $\zeta = -1$, $\omega = \varphi_c + i\psi_1$ в точке A .

Рассматривая (1.4) на участке $-1 \leq \zeta \leq -q$, получим

$$\psi_1 - \psi_2 = (\varphi_k - \varphi_c) \frac{K(k_2)}{K(k_2')}, \quad k_2 = \left[\frac{2m(1-q)}{(m+1)(m-q)} \right]^{1/2}, \quad k_2' = \left[\frac{(m+q)(m-1)}{(m+1)(m-q)} \right]^{1/2} \quad (1.5)$$

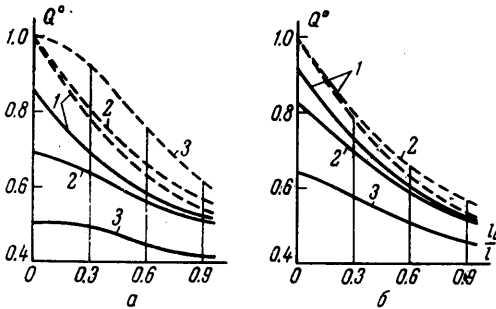
Соотношение (1.5) отражает зависимость между разностью потенциалов $\varphi_k - \varphi_c$ и дебитом от притока к галерее с одной стороны, выраженную через m и q .

Между дебитами в однородно-анизотропном пласте Q и в преобразованном пласте Q_1 имеется следующая связь [2]:

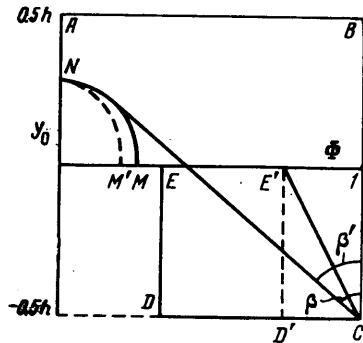
$$Q = Q_1 / \kappa \quad (1.6)$$

При проведении расчетов могут быть использованы таблицы эллиптических интегралов [3, 4]. Для малых значений $\kappa h / 2l$ использование приближенных формул для эллиптических интегралов первого рода [5, 6] позволяет получить приближенные выражения для определения d , m , c и q в явном виде.

На фиг. 2 представлены графики изменения $Q^\circ = Q / Q'$ (Q' — дебит несовершенной галереи в однородном пласте без пропластка) в зависимости от l_0 / l для вскрытый пласта $b/h = 0.5, 0.25$ и 0.05 (соответственно кривые 1, 2 и 3). Графики рассчитаны при $l/h = 5$ (фиг. 2, а) и $l/h = 10$ (фиг. 2, б). Сплошные линии соответствуют $\kappa = 5$, а пунктирные $\kappa = 1$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Можно отметить, что с увеличением анизотропии пласта уменьшается влияние непроницаемого экрана на дебит галереи.

Рассматривая интегралы Кристоффеля — Шварца на участках $-q \leq \zeta \leq m$ и $0 \leq u = \zeta^2 \leq c$, соответственно имеем

$$\varphi = \varphi_c + \frac{\varphi_k - \varphi_c}{K(k_2')} F(\Theta, k_2'), \quad y = \pm \frac{LF(\theta, k_1)}{\kappa K(k_1')} \quad (1.7)$$

$$\Theta(\zeta) = \arcsin \left[\frac{(m+1)(\zeta+q)}{(m+q)(\zeta+1)} \right]^{1/2}, \quad \theta = \arcsin \left(\frac{\zeta^2 - c}{1 - c} \right)^{1/2}$$

Выражения (1.7), решаемые совместно, определяют изменение потенциала вдоль вертикальной оси y .

§ 2. Расчет предельных безводных дебитов. Будем рассматривать горизонтальный пласт с подошвенной водой, где h — нефтенасыщенная мощность на контуре питания. Согласно [2] условие устойчивости конуса имеет вид

$$\Phi' = \frac{\Phi_k - \Phi}{\Phi_k - \Phi_c} = \frac{k\Delta\gamma(0.5h + y_0)}{\mu(\Phi_k - \Phi_c)} \quad (2.1)$$

где $\Delta\gamma$ — разность объемных весов воды и нефти.

При малых размерах экрана l_0 ордината предельно-стабильного конуса y_0 определяется из условия касания прямой (2.1) кривой распределения потенциала невозмущенного потока вдоль оси y [2]. Введя величину v_1 , представляющую собой часть депрессии, идущей на образование конуса пластовой воды [7], для определения y_0 будем иметь следующее трансцендентное уравнение:

$$\left(1 + \frac{2y_0}{h}\right) \left[\frac{(\zeta_0^2 - c)(1 - \zeta_0)}{\zeta_0^2(q + \zeta_0)} \right]^{1/2} = \frac{2v_1 K(k_2')}{K(k_1)} \left[\frac{d - c}{(m + 1)(m - q)} \right]^{1/2} \quad (2.2)$$

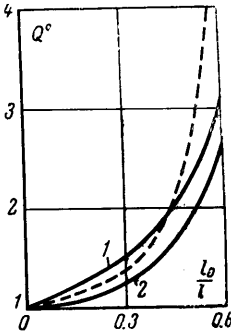
$$v_1 = 1 - \frac{F(\Theta_2, k_2')}{K(k_2')}, \quad \Theta_2 = \Theta(\zeta_0)$$

а связь между ζ_0 и y_0 определяется выражением (1.7.2).

При этом для предельной разности потенциалов $\Phi_k - \Phi_c$ получим соотношение

$$\Phi_k - \Phi_c = \frac{k\Delta\gamma}{\mu v_1} (0.5h + y_0) \quad (2.3)$$

Для больших размеров экрана l_0 предельная разность $\Phi_k - \Phi_c$ определяется из условия равенства Φ выражений (1.7.1) и (2.1) в точке E' (кривая $ANM'E'D'$ на фиг. 3)



Фиг. 4

$$\Phi_k - \Phi_c = \frac{k\Delta\gamma h}{2\mu v_2}, \quad v_2 = 1 - \frac{F(\Theta_3, k_2')}{K(k_2')}, \quad \Theta_3 = \Theta(1) \quad (2.4)$$

Граница применимости формул (2.3) и (2.4) устанавливается из следующих соображений.

Из фиг. 3 видно, что при некотором размере экрана l_0' прямая, проведенная под углом $\beta = \arcs \operatorname{tg} k\Delta\gamma / \mu(\Phi_k - \Phi_c)$ к вертикали.

$\Phi = (\Phi - \Phi_c) / (\Phi_k - \Phi_c) = 1$, будет одновременно касаться кривой изменения потенциала вдоль вертикальной оси y и проходить через точку E последней.

Отсюда имеем следующую систему двух трансцендентных уравнений с двумя неизвестными l_0' и y_0 :

$$\frac{v_1}{v_2} = 1 + \frac{2y_0}{h}, \quad \left[\frac{(\zeta_0^2 - c)(1 - \zeta_0)}{\zeta_0^2(\zeta_0 + q)} \right]^{1/2} = \frac{2v_2 K(k_2')}{K(k_1)} \left[\frac{d - c}{(m + 1)(m - q)} \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

Для нахождения дебита, заведомо меньшего предельного, необходимо рассмотреть невозмущенное движение, когда распределение потенциала вдоль вертикальной оси удовлетворяет условию [2]. Количественный расчет дебитов выполняется по формуле (1.6).

На фиг. 4 представлены кривые увеличения верхнего значения предельного дебита $Q^0 = Q/Q'$ в зависимости от размера непроницаемого пропластка, рассчитанные для $l/h = 10$, $\kappa = 5$, $b/h = 0.5$ (кривая 1) и $b/h = 0.05$ (кривая 2). Пунктирная линия построена при $b/h = 0.5$ в пренебрежении экраном протяженностью l_0/l , но при соответствующем завышении анизотропии пласта из условия равнодебитности невозмущенных потоков.

В заключение отметим интересное обстоятельство, на которое указал И. А. Чарный. На практике разность потенциалов $\Phi_k - \Phi_c$ ограничена требованиями геологического, технического и экономического характера. Пусть прямая $E'C$ соответствует данному $\Phi_k - \Phi_c$, а кривая $ANM'E'$ характеризует распределение потенциала возмущенного потока вдоль оси y при наличии в пласте экрана (фиг. 3). Отсюда следует.

что при некотором размере l_0'' непроницаемого пропластка любой практически возможный дебит будет безводным, и при увеличении экрана высота конуса будет уменьшаться.

Так как точный вид распределения потенциала возмущенного потока неизвестен, можно только установить пределы, внутри которого расположено истинное значение l_0'' . Нижний предел для данного $\Phi_k - \Phi_c$ определяется выражением (2.4), а верхний можно установить аналогично минимальному значению предельной депрессии в теории конусообразования.

Автор благодарит И. А. Чарного, В. А. Евдокимову и И. Н. Кочину за обсуждение результатов настоящей работы.

Поступило 7 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Изд-во «Наука», 1965.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
3. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
4. Беляков В. М., Кравцова Р. И., Рапопорт М. Г. Таблицы эллиптических интегралов, т. 1, 2. М., Изд-во АН СССР, 1963.
5. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1941.
6. Сикорский Ю. С. Элементы теорий эллиптических функций с приложениями к механике. М.—Л., Гл. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1936.
7. Чарный И. А. О предельных дебитах и депрессиях в водоплавающих и подгазовых нефтяных месторождениях. Тр. совещания по развитию н.-и. работ в области вторичных методов добычи нефти. Баку, 1953, с. 81—109.

ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Г. А. ДОМБРОВСКИЙ

(Харьков)

Рассматривается плоская установившаяся напорная фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородном слое единичной мощности. Основные уравнения запишем в виде системы

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

Здесь ψ — функция тока, p — давление, k — коэффициент проницаемости, μ — коэффициент динамической вязкости, x и y — декартовы координаты [1].

Будем считать, что коэффициент проницаемости — функция одной координаты x и изменяется по закону

$$k = \mu(\alpha + \beta x)^2 \quad (\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}) \quad (2)$$

Общие решения системы (1) тогда представляются в простом виде

$$\psi = \text{Re} \left\{ \beta \int F(z) dz - (\alpha + \beta x) F(z) \right\}, \quad p = \frac{1}{\alpha + \beta x} \text{Im} F(z) \quad (3)$$

где $F(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\theta}$. Функция $F(z)$ определяется по заданным граничным условиям и особенностям для p и ψ .

Пусть контур питания и контур скважины представляют собой concentрические окружности с радиусами r_1 и r_0 соответственно. На контуре питания известны значения давления $p_1(\theta)$, на контуре скважины — значения давления $p_0(\theta)$. Задача об определении поля давления в двусвязной области, ограниченной контуром питания и контуром скважины, может быть решена в этом случае следующим образом.

Представим функцию $F(z)$ в виде ряда

$$F(z) = iB \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n \quad (4)$$

где B — действительная постоянная и $C_n = A_n + iB_n$ — комплексные постоянные.