

Приводим значения  $C_1$  и  $C_2$ , вычисленные для некоторых значений  $a$

$a =$	1	2	10	20	25
$C_1 =$	-0.1498	-0.5108	-1.1639	-1.2566	-1.2849
$C_2 =$	-0.0668	-0.1164	-1.0228	-1.6235	-1.8181

На фиг. 3 приведены кривые  $C_1(a)$  и  $C_2(a)$ . Подставив в (2.7) выражения для  $A$  и  $B$ , получим

$$u_1 = -\ln \rho + C_1 \exp k_1 \theta (1 - 1.4393\rho^2 + 0.1817\rho^3 + 0.2576\rho^4) + C_2 \exp k_2 \theta (1 - 11.1162\rho^2 + 16.7706\rho^3 - 6.6544\rho^4) \quad (2.11)$$

Значения функции  $f$  при различных  $\theta = t/\tau$  даны в табл. 2: в верхней части — для  $a = 1$ , в нижней — для  $a = 2$ . Кривые  $f(\rho)$  приведены на фиг. 4, 5. Сплошные кривые рассчитаны по формуле (2.5) и представляют собой точное решение, пунктирные кривые рассчитаны по формуле (2.11) и представляют собой приближенное решение, полученное методом коллокаций.

Автор благодарит В. Н. Николаевского за обсуждение работы.

Поступило 22 XII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнения фильтрации жидкости в трещиноватых породах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
3. Авакян Э. А. Осесимметричные задачи неустановившейся фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах. Тр. ВНИИ, 1967, вып. 50.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции, Изд-во «Наука», 1964.
6. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1953.

### РАСЧЕТ МЕЛИОРАТИВНОГО ДРЕНАЖА В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИНФИЛЬТРАЦИИ

С. В. КОВАЛЬЧУК, А. Я. ОЛЕЙНИК

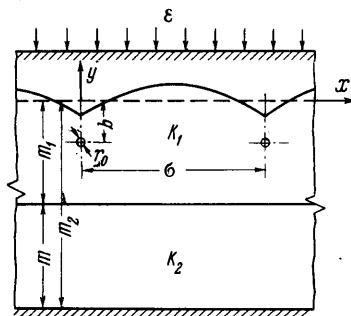
(Киев)

В статье приводится решение задачи фильтрации к мелиоративному дренажу — системе горизонтальных грубчатых дрен — в условиях двухслойной среды и инфильтрационного питания (фиг. 1), причем, в отличие от [1], решение дается в более строгом и компактном виде. Отметим, что подобная задача рассматривалась ранее рядом авторов в условиях однородной среды.

Аналогично, как это принято другими авторами, например, в работах [1, 2], решение задачи выполняется при двух допущениях: а) слабоизогнутая поверхность грунтовых вод заменяется осредненной прямой линией, б) вместо известного точного условия на свободной поверхности принято  $\text{Im}(\omega_1) = -\varepsilon$ , т. е. вертикальная составляющая скорости фильтрации на свободной поверхности равна интенсивности инфильтрации.

Принятые допущения, как указано в работе [3], не будут вносить существенной погрешности и практические расчеты.

Решение задачи сначала ищем для одиночной дрены (стока), а затем — методом суперпозиции — для бесконечного ряда дрен (стоков), расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, что и является окончательным решением задачи.



Фиг. 1

§ 1. Определим потенциал (напор) для одиночной дрены (стока). Выражение для комплексной скорости имеет вид: в верхнем слое, который содержит дрину (сток)

$$w_1(z) = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{1}{z - \zeta} + \frac{\lambda}{z - \bar{\zeta}} \right] + \int_0^{\infty} [A_1(\alpha) e^{i\alpha z} + B_1(\alpha) e^{-i\alpha z}] d\alpha \quad (1.1)$$

в нижнем слое

$$\omega_2(z) = \frac{q(1-\lambda)}{2\pi(z-\zeta)} + \int_0^{\infty} [A_2(\alpha) e^{i\alpha z} + B_2(\alpha) e^{-i\alpha z}] d\alpha \quad (1.2)$$

В формулах (1.1) и (1.2) вид комплексных функций  $A_1(\alpha)$ ,  $A_2(\alpha)$ ,  $B_1(\alpha)$  и  $B_2(\alpha)$  действительной переменной  $\alpha$  выбираем, используя граничные условия задачи

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega_2) &= -\varepsilon & \text{при } y = 0, & & \text{Im}(\omega_2) &= 0 & \text{при } y = -m_2 \\ \text{Im}(\omega_1) &= \text{Im}(\omega_2), & k_2 \text{Re}(\omega_1) &= k_1 \text{Re}(\omega_2) & \text{при } y &= -m_1 \end{aligned}$$

и интегральные представления

$$\frac{1}{z - \zeta} = i \int_0^{\infty} e^{-i\alpha(z-\zeta)} d\alpha \quad \text{при } \text{Im}(z - \zeta) < 0$$

$$\frac{1}{z - \zeta} = -i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(z-\zeta)} d\alpha \quad \text{при } \text{Im}(z - \zeta) > 0$$

$$\frac{1}{z - \bar{\zeta}} = -i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(z-\bar{\zeta})} d\alpha \quad \text{при } \text{Im}(z - \bar{\zeta}) > 0$$

$$\varepsilon = 2\varepsilon \int_0^{\infty} \delta(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$$

где  $\delta(\alpha)$  — дельта-функция Дирака. Тогда для скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имеем

$$\omega_1(z) = - \int_0^{\infty} \frac{qi}{2\pi} (e^{i\alpha(z+ib)} + \lambda e^{i\alpha[z+i(2m_1-b)]}) d\alpha + \int_0^{\infty} [A_1(\alpha) e^{i\alpha z} + B_1(\alpha) e^{-i\alpha z}] d\alpha \quad (1.3)$$

$$\omega_2(z) = \int_0^{\infty} \frac{q(1-\lambda)i}{2\pi} e^{-i\alpha(z+ib)} d\alpha + \int_0^{\infty} [A_2(\alpha) e^{i\alpha z} + B_2(\alpha) e^{-i\alpha z}] d\alpha \quad (1.4)$$

В дальнейшем решение задачи будем осуществлять только для верхнего слоя, которое в рассматриваемом случае представляет практический интерес. Для нижнего слоя, используя граничное условие на подошве пласта, ограничимся написанием следующего выражения для  $\omega_2$ :

$$\omega_2(z) = \int_0^{\infty} [A_2(\alpha) e^{i\alpha z} + \bar{A}_2(\alpha) e^{\alpha(2m_2-iz)}] d\alpha \quad (1.5)$$

Удовлетворяя граничные условия на кровле, подошве и линии раздела слоев пласта, из выражения (1.3) после соответствующих преобразований получаем

$$A_1(\alpha) = - \frac{qi}{2\pi} (e^{-\alpha b} N_1 + e^{\alpha b} N_2) + 2i\varepsilon \delta(\alpha) N_1 \quad (1.6)$$

$$B_1(\alpha) = \frac{qi}{2\pi} [e^{-\alpha b} (1 + N_1) + e^{\alpha b} N_1] - 2i\varepsilon \delta(\alpha) (1 + N_2) \quad (1.7)$$

В выражениях (1.7) и (1.8) для величин  $N_1$  и  $N_2$  приняты следующие выражения:

$$N_1(\alpha) = \frac{e^{-2\alpha m_2} + \lambda e^{-2\alpha m_1}}{1 - \lambda e^{-2\alpha m_1} + \lambda e^{2\alpha(m_1 - m_2)} - e^{-2\alpha m_2}} \quad (1.8)$$

$$N_2(\alpha) = \frac{e^{-2\alpha m_2} + \lambda e^{-2\alpha(m_1 + m_2)} + \lambda^2(e^{-i\alpha m_1} - e^{-2\alpha m_2})}{1 - \lambda e^{-2\alpha m_1} + \lambda e^{2\alpha(m_1 - m_2)} - e^{-2\alpha m_2}} \quad (1.9)$$

Подставляя значения  $A_1(\alpha)$  и  $B_1(\alpha)$  в уравнение (1.3) и выполнив некоторые преобразования, получим

$$\begin{aligned} \omega_1(z) = & \int_0^{\infty} \frac{iq}{\pi} \left( \frac{e^{-i\alpha(z-ib)} - e^{i\alpha(z+ib)}}{2} - 2N_1 \operatorname{ch} \alpha b \operatorname{sh} i\alpha z \right) d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} 2i\varepsilon\delta(\alpha) (2N_1 \operatorname{sh} i\alpha z - e^{-i\alpha z}) d\alpha \end{aligned} \quad (1.10)$$

Представим выражение для  $N_1$  в виде

$$\begin{aligned} N_1(\alpha) = & \frac{s^{p_2} + \lambda s^{p_1}}{1 - \lambda s^{p_1} + \lambda s^{p_2 - p_1} - s^{p_2}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_n s^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2\alpha n m_0} \\ p_1 = & \frac{m_1}{m_0}, \quad p_2 = \frac{m_2}{m_0}, \quad s = e^{-2\alpha m_0} < 1 \end{aligned}$$

Здесь  $m_0$  — общий наибольший делитель  $m_1$  и  $m_2$ , т. е.  $p_1, p_2$  — целые числа. Ряд  $N_1(\alpha)$  будет сходящимся; подставляя его в уравнение (1.10), получим

$$\begin{aligned} \omega_1(z) = & \int_0^{\infty} \frac{iq}{2\pi} \left[ e^{-i\alpha(z-ib)} - e^{-i\alpha(-z-ib)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [e^{-i\alpha[z-i(2nm_0+b)]} + \right. \\ & \left. + e^{-i\alpha[z-i(2nm_0-b)]} - e^{-i\alpha[-z-i(2nm_0+b)]} - e^{-i\alpha[-z-i(2nm_0-b)]}] \right] d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} 2i\varepsilon\delta(\alpha) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2\alpha n m_0} \cdot 2 \operatorname{sh} i\alpha z - e^{-i\alpha z} \right] d\alpha = \\ = & \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{1}{z-ib} + \frac{1}{z+ib} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{1}{z-(2nm_0+b)i} + \frac{1}{z-(2nm_0-b)i} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{z+(2nm_0+b)i} + \frac{1}{z+(2nm_0-b)i} \right) \right] - i\varepsilon \end{aligned} \quad (1.11)$$

Найдем комплексный потенциал

$$W_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1 = k_1 h + i\psi_1 = \int \omega_1(z) dz =$$

$$= \frac{q}{2\pi} [\ln(z+ib) + \ln(z-ib)] + \frac{q}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \{ \ln[z-(2nm_0+b)i] +$$

$$+ \ln[z-(2nm_0-b)i] + \ln[z+(2nm_0+b)i] + \ln[z+(2nm_0-b)i] \} - i\varepsilon z + W_0 \quad (1.12)$$

где  $W_0$  — комплексная величина. Отделяя действительные части, определим напор от стока, расположенного в верхнем слое  $(0, -b)$  и имеющего расход  $q$

$$\begin{aligned} h(x, y) = & \frac{a}{4\pi k_1} \{ \ln[x^2 + (y+b)^2] + \ln[x^2 + (y-b)^2] + \\ & + \frac{q}{4\pi k_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \{ \ln[x^2 + (y-2nm_0-b)^2] + \ln[x^2 + (y-2nm_0+b)^2] + \\ & + \ln[x^2 + (y+2nm_0+b)^2] + \ln[x^2 + (y+2nm_0-b)^2] \} + \frac{\varepsilon}{k_1} y + C \end{aligned} \quad (1.13)$$

§ 2. Выражение для напора в случае бесконечного ряда параллельных дрен, расположенных на расстоянии  $\sigma$  одна от другой (учитывая, что погонный расход дрены составляет  $q = \varepsilon\sigma$ ) получим в следующем виде

$$\begin{aligned}
 h(x, y) = & \frac{\varepsilon\sigma}{4\pi k_1} \{ \ln [\operatorname{ch} \gamma(y + b) - \cos \gamma x] + \ln [\operatorname{ch} \gamma(y - b) - \cos \gamma x] \} + \\
 + & \frac{\varepsilon\sigma}{4\pi k_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \{ \ln [\operatorname{ch} \gamma(y - 2nm_0 - b) - \cos \gamma x] + \ln [\operatorname{ch} \gamma(y - 2nm_0 + b) - \cos \gamma x] + \\
 & + \ln [\operatorname{ch} \gamma(y + 2nm_0 + b) - \cos \gamma x] + \ln [\operatorname{ch} \gamma(y + 2nm_0 - b) - \cos \gamma x] \} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{k_1} y + C \quad \left( \gamma = \frac{2\pi}{\sigma} \right) \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Значения  $M$  (величина  $x = \kappa_1/\kappa_2$ )

$\sigma/m_1$	$m/m_1$	$x = \infty$	100	25	10	5	3	1	0.33	0.2	0.1	0.04	0.01
10	0.5	0.52	0.52	0.51	0.48	0.45	0.39	0.23	-0.03	-0.12	-0.18	-0.24	-0.26
	1.0	0.52	0.52	0.49	0.45	0.39	0.32	0.11	-0.10	-0.16	-0.22	-0.26	-0.27
	2.0	0.52	0.52	0.48	0.42	0.34	0.26	0.03	-0.14	-0.19	-0.24	-0.27	-0.28
	3.0	0.52	0.51	0.48	0.41	0.32	0.23	0.01	-0.16	-0.20	-0.24	-0.27	-0.28
	7.0	0.52	0.51	0.47	0.40	0.31	0.22	0	-0.17	-0.21	-0.25	-0.28	-0.29
	10.0	0.52	0.51	0.47	0.40	0.31	0.22	0	-0.17	-0.22	-0.25	-0.28	-0.29
20	0.5	1.55	1.54	1.51	1.45	1.37	1.25	0.88	0.30	0.10	-0.13	-0.35	-0.44
	1.0	1.55	1.53	1.48	1.37	1.22	1.04	0.52	0.01	-0.17	-0.32	-0.43	-0.47
	2.0	1.55	1.52	1.45	1.26	1.03	0.80	0.23	-0.17	-0.28	-0.39	-0.46	-0.48
	4.0	1.55	1.51	1.40	1.15	0.82	0.56	0.07	-0.26	-0.34	-0.41	-0.47	-0.49
	6.0	1.55	1.51	1.38	1.10	0.75	0.47	0.03	-0.29	-0.36	-0.42	-0.47	-0.50
	10.0	1.55	1.50	1.37	1.07	0.72	0.42	0	-0.30	-0.38	-0.43	-0.48	-0.50
40	0.5	3.84	3.81	3.74	3.62	3.43	3.20	2.23	1.06	0.44	-0.03	-0.43	-0.62
	1.0	3.84	3.79	3.66	3.42	3.08	2.70	1.55	0.41	0.03	-0.30	-0.55	-0.68
	2.0	3.84	3.76	3.56	3.17	2.67	2.05	0.85	0	-0.24	-0.48	-0.63	-0.71
	4.0	3.84	3.70	3.37	2.82	2.08	1.43	0.36	-0.33	-0.45	-0.60	-0.66	-0.72
	6.0	3.84	3.66	3.22	2.58	1.76	1.13	0.17	-0.42	-0.52	-0.64	-0.68	-0.73
	10.0	3.84	3.60	3.02	2.28	1.54	0.88	0.05	-0.48	-0.57	-0.66	-0.70	-0.73
100	0.5	11.05	11.00	10.80	10.45	10.00	9.50	7.00	3.40	1.90	0.95	-0.10	-0.75
	1.0	11.05	10.95	10.60	9.95	9.00	8.05	5.00	2.00	1.00	0.10	-0.55	-0.80
	2.0	11.05	10.90	10.20	9.10	7.70	6.40	3.05	0.95	0.13	-0.43	-0.75	-0.95
	3.0	11.05	10.85	9.90	8.35	6.70	5.20	2.10	0.30	-0.30	-0.65	-0.85	-0.98
	5.0	11.05	10.75	9.30	7.10	5.20	3.60	1.20	-0.25	-0.60	-0.75	-0.90	-1.00
	7.0	11.05	10.65	8.90	6.20	4.15	2.65	0.75	-0.50	-0.70	-0.83	-0.95	-1.02
	10.0	11.05	10.55	8.15	5.20	3.30	1.85	0.45	-0.65	-0.78	-0.90	-0.95	-1.05

Предположим, что на контуре трубчатой дрены радиуса  $r_0$  напор равен  $h_0$ . Тогда, полагая в уравнении (2.1)  $x = 0$  и  $y = -b + r_0$  найдем выражение для постоянной  $C$ , подставляя которое в (2.1) получим окончательное выражение для напора

$$\begin{aligned}
 h(x, y) = & h_0 + \frac{\varepsilon\sigma}{4\pi k_1} \left\{ \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma(y + b) - \cos \gamma x}{\operatorname{ch} \gamma r_0 - 1} + \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma(y - b) - \cos \gamma x}{\operatorname{ch} 2\gamma(b - 0.5r_0) - 1} + \right. \\
 + & \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma(y - 2nm_0 - b) - \cos \gamma x}{\operatorname{ch} 2\gamma(nm_0 + b - 0.5r_0) - 1} + \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma(y - 2nm_0 + b) - \cos \gamma x}{\operatorname{ch} 2\gamma(nm_0 - 0.5r_0) - 1} + \right. \\
 + & \left. \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma(y + 2nm_0 + b) - \cos \gamma x}{\operatorname{ch} 2\gamma(nm_0 + 0.5r_0) - 1} + \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma(y + 2nm_0 - b) - \cos \gamma x}{\operatorname{ch} 2\gamma(nm_0 - b + 0.5r_0) - 1} \right] \left. \right\} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{k_1} (y + b - r_0) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Уравнение (2.2) при  $y = 0$  с некоторым приближением может быть принято как уравнение кривой депрессии. Для практических расчетов важным является нахождение напора  $H$  посередине между дренами ( $x = 1/2\sigma$ ,  $y = -b$ ).

При  $r_0 < b$  и  $r_0 \ll m_0$  величина  $H$  составит

$$H = h_0 + \frac{\varepsilon\sigma}{2\pi k_1} \left[ \ln \frac{\sigma \operatorname{ch} \gamma b}{\pi r_0 \operatorname{sh} \gamma b} + \sum_{n=1} c_n \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma (nm_0 + b) \operatorname{ch}^2 \gamma n m_0 \operatorname{ch} \gamma (nm_0 - b)}{\operatorname{sh} \gamma (nm_0 + b) \operatorname{sh}^2 \gamma n m_0 \operatorname{sh} \gamma (nm_0 - b)} \right] \quad (2.3)$$

Если в формуле (2.3) принять  $b = 0$ , то получим для напора  $H$  выражение.

$$H = h_0 + \frac{\varepsilon\sigma}{\pi k_1} \left( \ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + 2 \sum_{n=1} c_n \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma n m_0}{\operatorname{sh} \gamma n m_0} \right) \quad (2.4)$$

Для определения напора над дренаем  $H_0$  в уравнении (2.2) необходимо положить  $x = 0$  и  $y = 0$ . В приведенных формулах коэффициенты  $c_n$  определяются по рекомендациям, приведенным в работе [4]. В частности, если мощность верхнего слоя пласта равна мощности нижнего слоя ( $m_1 = m$ ), имеем  $c_n = 1$  ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ),  $c_n = \lambda$  ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ). Если мощность нижнего слоя будет бесконечно большой ( $m_2 \rightarrow \infty$ ), то  $c_n = \lambda^n$ , а вместо  $m_0$  в формулах принимается  $m_1$ .

§ 3. Практические рекомендации. На основании полученного решения приведем некоторые простые формулы, удобные для практических расчетов. Так, формула (2.4) может быть аппроксимирована зависимостью

$$H = h_0 + \frac{\varepsilon\sigma}{k_1} \left( 0,73 \lg \frac{\sigma}{\pi r_0} + M \right) \quad (3.1)$$

Значение величины  $M$  приведено в таблице. При  $\sigma \geq 4 m_2$  формулы (2.3) и (2.4) приближенно аппроксимируются зависимостью

$$H = h_0 + 1/4 \varepsilon \sigma T^{-1} (1/2 \sigma + 4\Phi), \quad T = k_1 m_1 + k_2 m \quad (3.2)$$

Здесь  $\Phi$  — фильтрационное сопротивление на несовершенство дрена, определяемое по формуле

$$\Phi = \beta m_2 \frac{k_2}{k_1} f_0(m_2 b) + m_1 \frac{k_1 - k_2}{k_1} f_0(m_1, b) \quad (3.3)$$

$$f_0(m, b) = 0,366 \lg \frac{m}{2\pi r_0 \sin [\pi(2b - r_0)/2m]} \quad \text{при } b \neq 0 \quad (3.4)$$

$$f_0(m) = 0,73 \lg (m / \pi r_0) \quad \text{при } b = 0 \quad (3.5)$$

В формуле (3.2) поправочный коэффициент  $\beta$  можно определять по специально построенным графикам, по графику  $\beta = f(\lambda_0, r_0 / m_1, m / m_1)$ , либо использовать значения  $\beta$ , рекомендуемые в случае скважин, но с учетом параметров дрена. Из формулы (3.2) при  $k_1 = k_2$  и  $k_2 = 0$  вытекают известные зависимости для однородного пласта мощностями  $m_2$  и  $m_1$ .

Поступило 17 X 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dagan G. Steady Drainage of a Two-Layered Soil. Journal of the Irrigation and Drainage Division, Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1965, vol. 91, No. IR3.
2. Аверьянов С. Ф., Цюй Син-е. О расчете дренажа при наличии инфильтрации. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1957, № 3.
3. Аверьянов С. Ф. О расчете осушительного действия горизонтального дренажа в условиях напорного питания. Научн. зап. Моск. ин-та инж. водн. хоз-ва им. В. Г. Вильямса, 1960, т. 22.
4. Ковальчук С. В., Олейник А. Я. Приток воды к горизонтальной трубчатой дрене в напорном двухслойном пласте ограниченной мощности. ПМТФ, 1966, № 1.