

Расчеты, проведенные для остальных значений параметра B , показали, что влияние неоднородности на распределение насыщенности при $B < 1.59$ возрастает, а при B , больших 1.59, убывает. Так, при $B = 15.9$ кривые насыщенности до момента прорыва практически совпадают. В заключение приведем зависимости безводной нефтеотдачи от параметра B для различных распределений проницаемости (фиг. 9, 0). На графиках пунктирная кривая соответствует случаю однородного пласта. Следует отметить, что эта кривая несколько отличается от соответствующей кривой, полученной в статье [2], что, по-видимому, в основном вызвано различием в начальном условии. Как нетрудно убедиться, при не слишком больших B неоднородность оказывает значительное влияние на безводную нефтеотдачу. При этом решающее значение имеет проницаемость на выходе пласта.

Авторы благодарят Т. В. Старцеву, Л. Х. Аминову за помощь в проведении расчетов на ЭВМ «Урал-3».

Поступило 21 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Rapoport L. A., Leas W. J. Properties of Linear Waterfloods. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Enging. AIME, 1953, vol. 198.
2. Douglas J., Blair P. M., Wagner R. J. Calculation of Linear Waterflood Behavior Including the Effects of Capillary Pressure. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Enging. AIME, 1958, vol. 213.
3. Mcswen C. R. A Numerical solution of the Linear Displacement Equation with Capillary Pressure. Petroleum. Technol., 1959, vol. 11, No. 8.
4. Курбанов А. К., Курбанов И. Ф. Влияние смачиваемости на процесс вытеснения нефти водой. Научно-техн. сб. по добыче нефти, Изд-во «Недра», 1964, вып. 24.
5. Leverett M. C. Capillary Behavior in Porous Solids. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Enging., AIME, 1941, vol. 142.
6. Самарский А. А. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
7. Самарский А. А. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3.

НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Э. А. АВАКЯН

(Москва)

Уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде [1] в предположении, что проницаемость пористых блоков, по сравнению с проницаемостью трещин, и пористость трещин, по сравнению с пористостью блоков, пренебрежимо малы, можно записать в виде

$$\kappa t \Delta p_1 = p_1 - p_2, \quad \tau \partial p_2 / \partial t = p_1 - p_2 \quad (0.1)$$

Здесь p_1 — давление в трещинах; p_2 — давление в пористых блоках; τ — характерное время запаздывания; κ — коэффициент пьезопроводности. Рассмотрим приближенные решения этой системы уравнений в случае фильтрации к скважине, вскрывающей трещиновато-пористый пласт мощностью h , которая в момент $t = 0$ начинает работать с дебитом Q .

§1. Фильтрация в бесконечном пласте. Метод интегральных соотношений. Граничные условия имеют вид

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \frac{Q \mu}{2\pi k h} = q, \quad p_1|_{r=\infty} = p_0 \quad (1.1)$$

где μ — вязкость жидкости; k — проницаемость трещин. Начальное условие

$$p_2|_{t=0} = p_0 \quad (1.2)$$

Точное решение этой задачи получено в работе [1] (см. также поправку в [2]). Решение этой задачи может быть также представлено в другом виде, более удобном для вычислений [3]

$$p_1 = p_0 - q \left[K_0(\xi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \xi^{\nu} K_{\nu}(\xi) a_{\nu-1}(t/\tau)}{2^{\nu} \nu!^2} \right] \quad \left(\xi = \frac{r}{\sqrt{\kappa \tau}} \right) \quad (1.3)$$

$$p_2 = p_0 - q \left[K_0(\xi) (1 - e^{-t/\tau}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^{\nu} K_{\nu}(\xi) a_{\nu}(t/\tau)}{2^{\nu} \nu!^2} \right] \quad (1.4)$$

$$a_0 \left(\frac{t}{\tau} \right) = 1 - e^{-t/\tau}, \quad a_{\nu} \left(\frac{t}{\tau} \right) = \nu a_{\nu-1} \left(\frac{t}{\tau} \right) - \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\nu} e^{-t/\tau}$$

Здесь $K_{\nu}(\xi)$ — функция Макдональда ν -го порядка.

На примере этой задачи покажем возможность построения приближенных решений задач фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде методом интегральных соотношений. Ранее этот метод [4] эффективно использовался для задач фильтрации в обычной пористой среде.

Система уравнений (0.1) с граничными условиями (1.1) и начальным условием (1.2) сводится к одному уравнению для функции p_2

$$\partial p_2 / \partial t = \kappa \Delta p_2 + \kappa \tau \partial \Delta p_2 / \partial t \quad (1.5)$$

с граничными условиями

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial p_2}{\partial r} = q(1 - e^{-t/\tau}), \quad p_2|_{r=\infty} = p_0 \quad (1.6)$$

и начальным условием (1.2).

Вся область течения разбивается введением подвижной границы $r = l(t)$ на две зоны: возмущенную и невозмущенную. Потребуем, чтобы при $r = l(t)$ функция p_2 удовлетворяла условиям

$$p_2|_{r=l(t)} = p_0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial r} \Big|_{r=l(t)} = 0, \quad \frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} \Big|_{r=l(t)} = 0 \quad (1.7)$$

Будем искать p_2 в виде

$$p_2 = p_0 + q(1 - e^{-t/\tau}) \left[\ln \frac{r}{l(t)} + \frac{3}{2} - \frac{2r}{l(t)} + \frac{r^2}{2l^2(t)} \right] \quad (1.8)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (1.7) при $r = l(t)$ и граничному условию на скважине (1.6.1). Потребуем, чтобы она удовлетворяла интегральному соотношению, соответствующему уравнению (1.5).

$$\int_0^{l(t)} r \frac{\partial}{\partial t} (p_2 - \kappa \tau \Delta p_2) dr = \kappa \int_0^{l(t)} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p_2}{\partial r} dr$$

Отсюда получим, учитывая (1.7) и (1.6.1),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{l(t)} r (p_2 - \kappa \tau \Delta p_2) dr &= \kappa \left(r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right)_0^{l(t)} + [r(p_2 - \kappa \tau \Delta p_2)]_{r=l(t)} l'(t) = \\ &= -\kappa q(1 - e^{-t/\tau}) + p_0 l'(t) \end{aligned}$$

Проинтегрируем это соотношение от 0 до t

$$\begin{aligned} \int_0^{l(t)} r (p_2 - \kappa \tau \Delta p_2) dr - \int_0^{l(0)} r [p_2 - \kappa \tau \Delta p_2]_{t=0} dr &= \\ = -\kappa q t - \kappa q \tau (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{1}{2} p_0 l^2(t) - \frac{1}{2} p_0 l^2(0) \end{aligned}$$

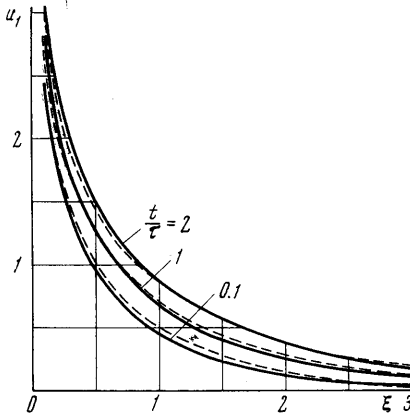
Отсюда, учитывая начальное условие (1.2), получим

$$\int_0^{l(t)} r (p_2 - \kappa \tau \Delta p_2) dr = -\kappa q t - \kappa q \tau (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{p_0 l^2(t)}{2}$$

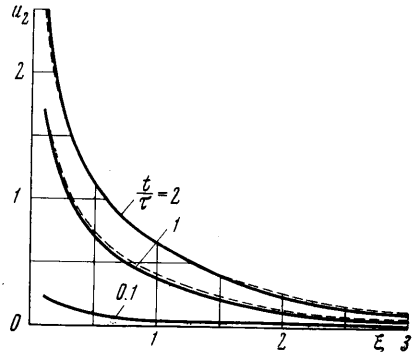
Подставляя сюда выражение (1.8) и производя в левой части интегрирование, получим окончательно

$$l^2(t) = \frac{2\lambda \mu t}{1 - e^{-t/\tau}} \quad (1.9)$$

Заметим, что при $\tau \neq 0$ (т. е. для трещиновато-пористой среды), в отличие от случая обычной пористой среды ($\tau = 0$), оказывается, что $l(0) \neq 0$. Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ в формуле (1.9), получим $l^2(0) = 2\lambda \mu \tau$



Фиг. 1



Фиг. 2

Итак, распределение давления p_2 в пористых блоках дается формулами (1.8) и (1.9). Подставляя (1.8) и (1.9) во второе уравнение системы 0.1, найдем распределение давления в трещинах p_1

$$p_1 = p_0 + q \left(\ln \frac{r}{l(t)} + \frac{3}{2} - \frac{2r}{l(t)} + \frac{r^2}{2l^2(t)} \right) - q \frac{\tau - e^{-t/\tau}(t + \tau)}{2t} \cdot \left(1 - \frac{r}{l(t)} \right)^2 \quad (1.10)$$

В табл. 1 в верхней части графами 1 и 2 обозначены соответственно точные и приближенные значения функций u_1 , в нижней части — u_2 . Кривые $u_1(\xi)$ и $u_2(\xi)$ при

Таблица 1

ξ	$t/\tau = 0.1$		$t/\tau = 1$		$t/\tau = 2$	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
0.1	2.475	2.479	2.820	2.781	3.080	2.982
0.2	1.799	1.824	2.136	2.116	2.391	2.312
0.5	0.965	1.020	1.263	1.282	1.499	1.463
0.8	0.599	0.660	0.856	0.852	1.066	1.059
1	0.451	0.507	0.679	0.722	0.873	0.879
2	0.128	0.146	0.248	0.282	0.380	0.396
3	0.041	0.035	0.100	0.109	0.164	0.186
0.1	0.233	0.234	1.689	1.677	2.503	2.454
0.2	0.169	0.171	1.249	1.259	1.910	1.877
0.5	0.099	0.095	0.706	0.740	1.153	1.143
0.8	0.056	0.061	0.470	0.500	0.793	0.813
1	0.042	0.047	0.365	0.398	0.647	0.663
2	0.011	0.013	0.121	0.140	0.244	0.273
3	0.003	0.003	0.045	0.047	0.103	0.116

ведены на фиг. 1, 2. Пунктирными кривыми представлено приближенное решение, полученное методом интегральных соотношений.

§ 2. Фильтрация в пласте конечного радиуса. Метод коллокаций. Пусть на границе пласта, т. е. при $r = R$, поддерживается постоянное давление p_0 , равное начальному давлению в пласте. Перейдем в системе (0.1) к безразмерным переменным

$$\rho = r/R, \quad \theta = t/\tau, \quad u_1 = (p_0 - p_1)/q, \quad u_2 = (p_0 - p_2)/q$$

Тогда система (0.1) примет вид

$$\Delta u_1 = a^2(u_1 - u_2) \quad (a = R/\sqrt{\kappa\tau}), \quad \partial u_2 / \partial \theta = u_1 - u_2 \quad (2.1)$$

Граничные условия

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \partial u_1 / \partial \rho = -1, \quad \rho \rightarrow 0, \quad u_1|_{\rho=1} = 0$$

Начальное условие

$$u_2|_{\theta=0} = 0$$

Исключим из системы (2.1) величину u_2 , а начальное условие для u_1 получим, решив первое уравнение системы (2.1) при $\theta = 0$. Тогда задача сформулируется так:

$$a^2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = \Delta u_1 + \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \theta}, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial u_1}{\partial \rho} = -1, \quad u_1|_{\rho=1} = 0 \quad (2.2)$$

$$u_1|_{\theta=0} = K_0(a\rho) - \frac{K_0(a)}{I_0(a)} I_0(a\rho) \quad (2.3)$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента; K_0 — функция Макдональда.

Для функции $f = u_1 + \ln \rho$ будем иметь

$$a^2 \frac{\partial f}{\partial \theta} = \Delta f + \frac{\partial \Delta f}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad f|_{\rho=1} = 0$$

$$f|_{\theta=0} = K_0(a\rho) - \frac{K_0(a)}{I_0(a)} I_0(a\rho) + \ln \rho \quad (2.4)$$

Собственными функциями этой краевой задачи будут $f_i = J_0(\lambda_i \rho)$, где $J_0(\lambda_i) = 0$ (J_0 — функция Бесселя). Решение, согласно методу Фурье, можно представить в виде

$$f = \sum_i c_i J_0(\lambda_i \rho) \exp \frac{-\lambda_i^2 \theta}{a^2 + \lambda_i^2}$$

где c_i определяется из начального условия (2.4). Окончательно получим

$$f = u_1 + \ln \rho = -2 \sum_i \frac{1}{\lambda_i^2 (1 + \lambda_i^2/a^2)} \frac{J_0(\rho \lambda_i)}{J_1^2(\lambda_i)} \exp \frac{-\lambda_i^2 \theta}{a^2 + \lambda_i^2} \quad (2.5)$$

Значения λ_i приведены, например, в [5]. Таким образом, получено точное решение задачи.

Таблица 2

ρ	$t/\tau=0.1$		$t/\tau=0.5$		$t/\tau=1$	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
0.01	-0.193	-0.198	-0.140	-0.140	-0.091	-0.091
0.06	-0.196	-0.197	-0.138	-0.139	-0.089	-0.090
0.1	-0.192	-0.193	-0.136	-0.137	-0.088	-0.089
0.2	-0.177	-0.180	-0.125	-0.127	-0.082	-0.083
0.4	-0.135	-0.137	-0.096	-0.096	-0.063	-0.064
0.6	-0.089	-0.087	-0.063	-0.062	-0.041	-0.041
0.8	-0.042	-0.040	-0.030	-0.028	-0.020	-0.019
0.01	-0.587	-0.586	-0.454	-0.452	-0.331	-0.329
0.06	-0.578	-0.581	-0.448	-0.449	-0.327	-0.326
0.1	-0.564	-0.571	-0.438	-0.441	-0.320	-0.321
0.2	-0.514	-0.527	-0.404	-0.410	-0.295	-0.299
0.4	-0.386	-0.393	-0.304	-0.309	-0.226	-0.229
0.6	-0.243	-0.241	-0.198	-0.193	-0.148	-0.146
0.8	-0.116	-0.107	-0.093	-0.087	-0.070	-0.067

Приближенное решение находим методом коллокаций [6]. Ищем функцию u_1 в виде

$$u_1 = -\ln \rho + A + B\rho^2 + C\rho^3 + D\rho^4 \quad (2.6)$$

где коэффициенты A, B, C, D — функции времени. Удовлетворим условиям $u_1|_{\rho=1} = 0$ и $\Delta u_1|_{\rho=1} = 0$. Второе условие следует из условий $u_1|_{\rho=1} = 0$ и $u_2|_{\theta=0} = 0$ и второго уравнения системы (2.1). Это даст

$$u_1 = -\ln \rho + A + B\rho^2 - \frac{4}{7}(4A + 3B)\rho^3 + \frac{1}{7}(9A + 5B)\rho^4 \quad (2.7)$$

Потребуем теперь, чтобы выражение (2.7) удовлетворяло уравнению (2.2.1) и начальному условию (2.3) в двух точках коллокации: $\rho = 0$ и $\rho = \frac{1}{2}$. Тогда для определения A и B получим систему двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнение в точке $\rho = 0$ имеет вид

$$a^2 A' = 4B + 4B' \quad (2.8)$$

Функцию $A(\theta)$ ищем в виде

$$A = C_1 \exp k_1 \theta + C_2 \exp k_2 \theta \quad (2.9)$$

Тогда из (2.8)

$$B = \frac{C_1 k_1 a^2}{4(k_1 + 1)} \exp k_1 \theta + \frac{C_2 k_2 a^2}{4(k_2 + 1)} \exp k_2 \theta \quad (2.10)$$

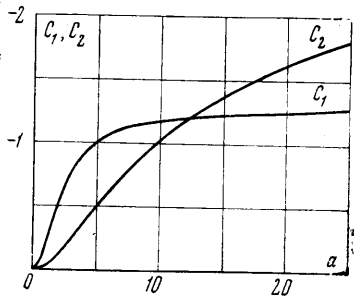
Подставив (2.9) и (2.10) в (2.7), а затем удовлетворив уравнению (2.2.1) в точке $\rho = \frac{1}{2}$, получим уравнение для определения k

$$9 \left(\frac{ka^2}{k+1} \right)^2 + 4 \cdot 113 \frac{ka^2}{k+1} + 4 \cdot 576 = 0$$

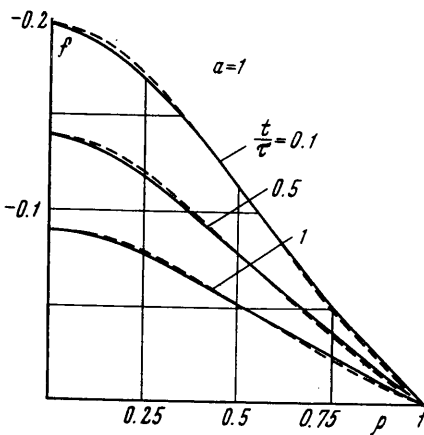
Отсюда

$$k_1 = -\frac{1152}{1152 + a^2(113 + \sqrt{7585})}, \quad k_2 = -\frac{1152}{1152 + a^2(113 - \sqrt{7585})}$$

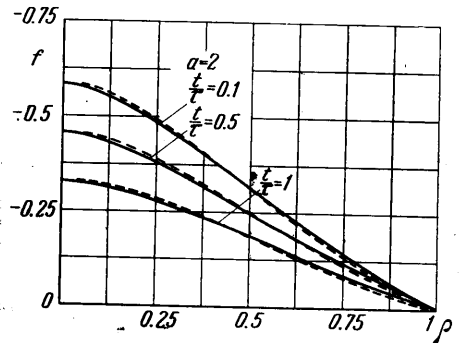
Для определения коэффициентов C_1 и C_2 потребуем, чтобы начальное условие (2.3) удовлетворялось в точках коллокации (при этом в точке $\rho = 0$ применяется асимптотическая формула для функции K_0)



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$$C_1 + C_2 = \ln \frac{2}{\gamma a} - \frac{K_0(a)}{I_0(a)}$$

$$-\ln \frac{1}{2} + \frac{65 + \sqrt{7585}}{224} C_1 + \frac{65 - \sqrt{7585}}{224} C_2 = K_0 \left(\frac{a}{2} \right) - \frac{K_0(a)}{I_0(a)} I_0 \left(\frac{a}{2} \right)$$

Отсюда

$$C_1 = 1,286 \left[K_0 \left(\frac{a}{2} \right) - \frac{K_0(a)}{I_0(a)} I_0 \left(\frac{a}{2} \right) - \ln 2 \right] + 0,1268 \left[\ln \frac{2}{\gamma a} - \frac{K_0(a)}{I_0(a)} \right]$$

Приводим значения C_1 и C_2 , вычисленные для некоторых значений a

$a =$	1	2	10	20	25
$C_1 =$	-0.1498	-0.5108	-1.1639	-1.2566	-1.2849
$C_2 =$	-0.0668	-0.1164	-1.0228	-1.6235	-1.8181

На фиг. 3 приведены кривые $C_1(a)$ и $C_2(a)$. Подставив в (2.7) выражения для A и B , получим

$$u_1 = -\ln \rho + C_1 \exp k_1 \theta (1 - 1.4393\rho^2 + 0.1817\rho^3 + 0.2576\rho^4) + C_2 \exp k_2 \theta (1 - 11.1162\rho^2 + 16.7706\rho^3 - 6.6544\rho^4) \quad (2.11)$$

Значения функции f при различных $\theta = t/\tau$ даны в табл. 2: в верхней части — для $a = 1$, в нижней — для $a = 2$. Кривые $f(\rho)$ приведены на фиг. 4, 5. Сплошные кривые рассчитаны по формуле (2.5) и представляют собой точное решение, пунктирные кривые рассчитаны по формуле (2.11) и представляют собой приближенное решение, полученное методом коллокаций.

Автор благодарит В. Н. Николаевского за обсуждение работы.

Поступило 22 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнения фильтрации жидкости в трещиноватых породах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
3. Авакян Э. А. Осесимметричные задачи неустановившейся фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах. Тр. ВНИИ, 1967, вып. 50.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции, Изд-во «Наука», 1964.
6. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1953.

РАСЧЕТ МЕЛИОРАТИВНОГО ДРЕНАЖА В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИНФИЛЬТРАЦИИ

С. В. КОВАЛЬЧУК, А. Я. ОЛЕЙНИК

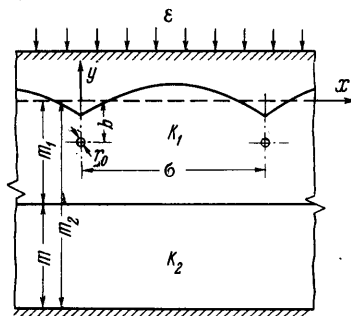
(Киев)

В статье приводится решение задачи фильтрации к мелиоративному дренажу — системе горизонтальных грубчатых дрен — в условиях двухслойной среды и инфильтрационного питания (фиг. 1), причем, в отличие от [1], решение дается в более строгом и компактном виде. Отметим, что подобная задача рассматривалась ранее рядом авторов в условиях однородной среды.

Аналогично, как это принято другими авторами, например, в работах [1, 2], решение задачи выполняется при двух допущениях: а) слабоизогнутая поверхность грунтовых вод заменяется осредненной прямой линией, б) вместо известного точного условия на свободной поверхности принято $\text{Im}(\omega_1) = -\varepsilon$, т. е. вертикальная составляющая скорости фильтрации на свободной поверхности равна интенсивности инфильтрации.

Принятые допущения, как указано в работе [3], не будут вносить существенной погрешности и практические расчеты.

Решение задачи сначала ищем для одиночной дрены (стока), а затем — методом суперпозиции — для бесконечного ряда дрен (стоков), расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, что и является окончательным решением задачи.



Фиг. 1