

ОБ ОДНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Б. И. ЛЕВИ, М. И. ШВИДЛЕР

(Уфа)

Как известно, дифференциальное уравнение двухфазной фильтрации с учетом капиллярности было получено в [1], а позднее численно проинтегрировано для случая однородного пласта конечной длины в [2]. Известны и другие варианты решения уравнения Рапопорта — Лиса или эквивалентной ему системы [3, 4]. В статье приводятся результаты численного решения аналогичной задачи с учетом неоднородности пласта по проницаемости.

1. Система уравнений одномерной двухфазной фильтрации несмешивающихся и несжимаемых жидкостей в неоднородном по проницаемости пласте имеет вид

$$v_1 = -\frac{k(x)k_1(s)}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad v_2 = -\frac{k(x)k_2(s)}{\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = -m \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = m \frac{\partial s}{\partial t} \quad (1.1)$$

$p_k = p_1 - p_2$

Здесь x — координата длины, t — время, m — пористость, $k(x)$ — абсолютная проницаемость пористой среды, s — насыщенность несмачивающей фазой, v_i — скорость фильтрации i -й фазы, μ_i — ее вязкость, p_i — давление в фазе, k_i — относительная фазовая проницаемость, p_k — капиллярное давление. Считается, что индекс $i = 1$ относится к несмачивающей фазе, $i = 2$ — к смачивающей.

Ограничиваясь случаем постоянной суммарной скорости фильтрации $v_1 + v_2 = v$, систему (1.1) можно свести к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{k(x)k_1(s)}{\mu_1} \frac{\partial p_k}{\partial x} + v \right] \left[1 + \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \mu_0 \right]^{-1} \right\} = m \frac{\partial s}{\partial t} \quad \left(\mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \quad (1.2)$$

Введем в рассмотрение новые независимые переменные и безразмерную проницаемость

$$\zeta = x/L, \quad \tau = vt/Lm, \quad k^*(\zeta) = k(\zeta)/k_0$$

и известное соотношение Леверетта [5]

$$p_k = \sigma \sqrt{m/k(x)} f(s) \quad (1.3)$$

Здесь k_0 — характерная проницаемость, L — характерная длина, σ — межфазное натяжение. Приведем (1.2) к безразмерному виду

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{\gamma k^*(\zeta)} \varphi(s) \frac{\partial s}{\partial \zeta} \right] + \alpha(s) \frac{\partial s}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} [\beta(\zeta) \psi(s)] = \frac{\partial s}{\partial \tau} \quad (1.4)$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{B} \frac{k_1(s)k_2(s)f'(s)}{\mu_0 k_1(s) + k_2(s)}, \quad \psi(s) = \frac{1}{2B} \frac{k_2(s)f(s)}{\mu_0 k_1(s) + k_2(s)}, \quad \alpha(s) = \frac{d}{ds} \frac{k_2(s)}{\mu_0 k_1(s) + k_2(s)}$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma k^*(\zeta)} \frac{dk^*(\zeta)}{d\zeta}, \quad B = \frac{\mu_1 Lv}{\sigma \sqrt{m k_0}}$$

Рассмотрим течение в пласте длины L . Тогда к уравнению (1.4) следует добавить граничные и начальные условия. Следуя работе [2], примем, что на входе в пласт ($\zeta = 0$) с момента $\tau = 0$ подается постоянный расход только смачивающей фазы. Тогда для $\zeta = 0$ имеет место условие

$$\frac{\partial s}{\partial \zeta} = g_1(\zeta, s) \quad \left(g_1(\zeta, s) = \frac{\mu_0 B}{k_2(s)f'(s)} + \frac{1}{2} \beta(\zeta) \frac{f(s)}{f'(s)} \right) \quad (1.5)$$

Далее, примем, что на выходе до того момента, пока насыщенность смачивающей фазой не достигнет своего максимального значения $1 - s_1$ (s_1 — минимальная насыщенность несмачивающей фазой), смачивающая фаза не вытекает из пласта. В момент достижения насыщенности смачивающей фазой максимального значения на

выходе происходит прорыв смачивающей фазы с последующим сохранением на выходе постоянного значения насыщенности.

Если τ_1 — момент прорыва, то на выходе ($\zeta = 1$) при $\tau < \tau_1$ имеем условие

$$v_1(1, \tau) = 0, \text{ или } -\sqrt{k^*}(\zeta) \partial s / \partial \zeta = g_2(\zeta, s) \tag{1.6}$$

$$g_2(\zeta, s) = B / k_1(s) f'(s) - 1/2 \beta(\zeta) f(s) / f'(s)$$

При $\tau > \tau_1$ краевое условие имеет вид

$$s(1, \tau) = s_1 \tag{1.7}$$

И, наконец, примем, что в начальный момент $\tau = 0$ насыщенность s постоянна

$$s(\zeta, 0) = s_0 \tag{1.8}$$

2. Для численного решения нелинейного параболического уравнения (1.4) с нелинейными краевыми условиями (1.5) — (1.7) используем метод сеток.

Пусть h и l — шаги по осям ζ и τ . Обозначив $s_i^n = s(ih, nl)$, можно записать неявный разностный аналог уравнения (1.4)

$$\frac{\sqrt{k_{i+1/2}^*} \varphi(s_{i+1/2}^n) (s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}) - \sqrt{k_{i-1/2}^*} \varphi(s_{i-1/2}^n) (s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1})}{h^2} +$$

$$+ \alpha(s_i^n) \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{2h} - \frac{\beta_{i+1/2} \Psi(s_{i+1/2}^n) - \beta_{i-1/2} \Psi(s_{i-1/2}^n)}{h} = \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{l} \tag{2.1}$$

$i = 1, \dots, N-1; \quad N = l/h$

Используя метод, изложенный в [6], можно получить следующие разностные уравнения, аппроксимирующие условия (1.5), (1.6):

$$\sqrt{k_{1/2}^*} \varphi(s_{1/2}^n) \frac{s_1^{n+1} - s_0^{n+1}}{h} = \varphi(s_0^n) g_1(0, s_0^n) + \frac{h}{2} \left[\frac{s_0^{n+1} - s_0^n}{l} - \right.$$

$$\left. - \alpha(s_0^n) \frac{s_1^{n+1} - s_0^{n+1}}{h} + \frac{\beta_{1/2} \Psi(s_{1/2}^n) - \beta_0 \Psi(s_0^n)}{1/2h} \right] \tag{2.2}$$

$$\sqrt{k_{N-1/2}^*} \varphi(s_{N-1/2}^n) \frac{s_N^{n+1} - s_{N-1}^{n+1}}{h} = \varphi(s_N^n) g_2(1, s_N^n) + \frac{h}{2} \left[\frac{s_N^{n+1} - s_N^n}{l} - \right.$$

$$\left. - \alpha(s_N^n) \frac{s_N^{n+1} - s_{N-1}^{n+1}}{h} + \frac{\beta_N \Psi(s_N^n) - \beta_{N-1/2} \Psi(s_{N-1/2}^n)}{1/2h} \right] \tag{2.3}$$

Можно показать, что при естественных ограничениях на коэффициенты уравнения (1.4) и правые части краевых условий (1.5), (1.6) разностная схема (2.1) — (2.3) аппроксимирует исходную краевую задачу с порядком $O(h^2 + l)$. Методом энергетических неравенств [7] при достаточно малых l можно получить априорную оценку, из которой вытекает абсолютная устойчивость разностной схемы по начальным и краевым условиям и правой части. Используя аппроксимацию и устойчивость, можно доказать сходимость в среднем решения разностной схемы к решению краевой задачи со скоростью $O(h^2 + l)$. Следует заметить, что устойчивость и сходимость может быть доказана для достаточно широкого класса коэффициентов дифференциального уравнения (1.4) и правых частей краевых условий (1.5) и (1.6).

Систему линейных алгебраических уравнений (2.1) — (2.3) удобно решать методом прогонки. Легко показать, что решение системы методом прогонки при достаточно малом h устойчиво.

Для контроля за решением целесообразно использовать очевидные балансные соотношения

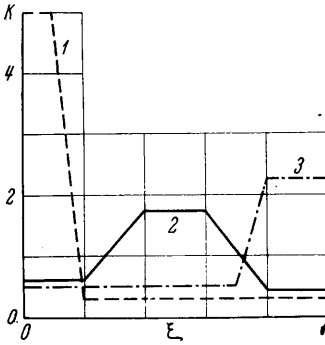
$$\int_0^1 [1 - s(\zeta, \tau)] d\zeta = 1 - s_0 + \tau \quad (\tau \leq \tau_1) \tag{2.4}$$

$$\int_0^1 [1 - s(\zeta, \tau)] d\zeta + v^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} v_2(1, \tau) d\tau = 1 - s_0 + \tau \quad (\tau \geq \tau_1)$$

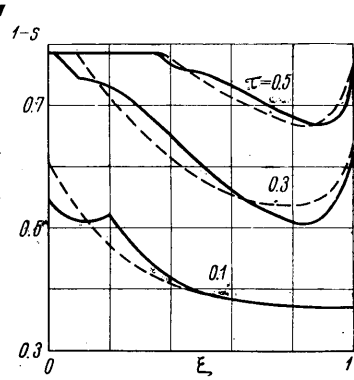
3. Ниже приводятся результаты расчета на ЭВМ «Урал-3» распределения $s(\zeta, \tau)$ для различных $k^*(\zeta)$. Исползованные при вычислениях кривые относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления заимствованы из работы [2] и имеют вид

$$k_1(s) = 1.4256(s - 0.216), \quad k_2(s) = 1.6329(0.7 - s)^2, \quad f(s) = 0.05669(0.7 - s)^{-2} - 0.242$$

Во всех расчетах было принято, что $s_0 = 0.68$, $\mu_0 = 0.5$. Шаг по оси ζ был постоянным $h = 0.005$, по оси τ расчет начинали с $l = 0.0005$, через двести шагов l удваи-

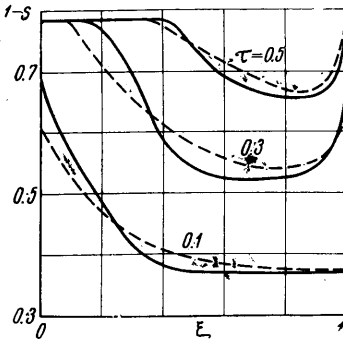


Фиг. 1

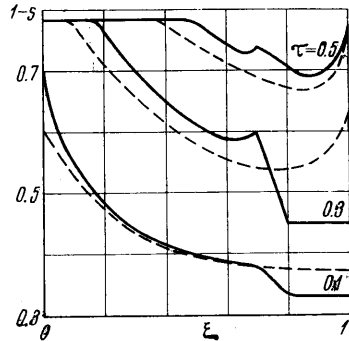


Фиг. 2

валось, после четырехсот шагов и до конца счет велся с шагом 0.002. На каждом временном шаге производился контроль приближенного решения по балансным формулам (2.4). Во всех случаях для $\tau < \tau_1$ балансное соотношение выполнено с точностью до десятых долей процента. После прорыва ($\tau > \tau_1$) баланс несколько ухуд-



Фиг. 3



Фиг. 4

шался и достигал в некоторых случаях 2—3%. Неоднородность пласта по проницаемости варьировалась заданием различных распределений $k^*(\zeta)$. Распределения 1, 2, 3 изображены на фиг. 1, распределение 4 дается формулой

$$k^*(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \zeta \leq 0.005 \\ 1 + \lambda \sin \frac{n\pi(\zeta - 0.005)}{0.99} & \text{при } 0.005 \leq \zeta \leq 0.995 \\ 1 & \text{при } 0.995 \leq \zeta \leq 1 \end{cases}$$

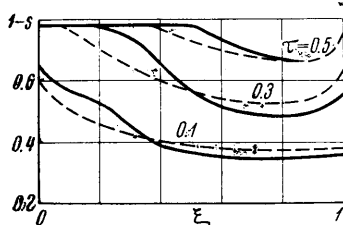
где λ и n также варьировались.

Для определения влияния неоднородности были проведены расчеты насыщенности для однородного пласта, т. е. случая $k^*(\zeta) = 1$, которые практически совпали с результатами работы [2] (небольшое отличие имело место из-за разницы в 0.02 в начальном распределении насыщенности).

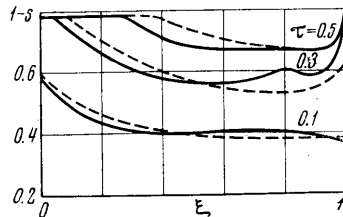
Для каждого из распределений $k^*(\zeta)$ расчеты проводились при следующих значениях параметров B : 0.0159, 0.159, 1.59, 7.95, 15.9. Для иллюстрации приведем ре-

зультаты расчетов $1 - s(\xi, \tau)$ для различных τ при $B = 1.59$. На фиг. 2, 3, 4 изображена кривая водонасыщенности для распределений 1, 2, 3 (пунктирные кривые соответствуют $k^*(\xi) = 1$). Как нетрудно убедиться, при $\tau = 0.1$ кривые насыщенности в неоднородном пласте наиболее заметно отличаются от аналогичных кривых для однородного пласта на участках повышенной проницаемости, где, как правило, водонасыщенность меньше, чем в однородном пласте, что вполне объяснимо капиллярными эффектами. С возрастанием времени τ указанное влияние неоднородности усиливается, а затем начинает ослабевать к концу процесса вытеснения, что видно на кривых, соответствующих $\tau = 0.3$ и $\tau = 0.5$.

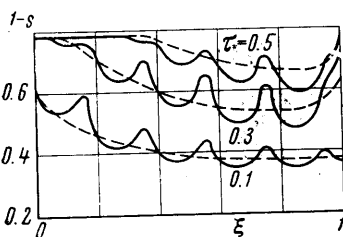
Отметим, что времена прорыва воды на выходе для изучаемых распределений проницаемости равны соответственно $\tau_1 = 0.33$, $\tau_2 = 0.31$, $\tau_3 = 0.39$. Время прорыва в случае однородного пласта оказалось равным $\tau_0 = 0.32$. Поскольку начальная нефтенасыщенность во всех случаях равна 0.68, безводная нефтеотдача $\rho_i = \tau_i / 0.68$, соответственно имеем $\rho_0 = 0.47$, $\rho_1 = 0.49$, $\rho_2 = 0.46$, $\rho_3 = 0.57$.



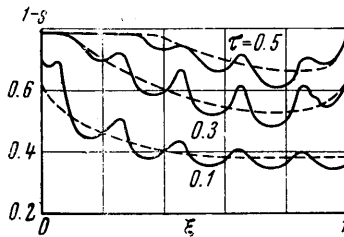
Фиг. 5



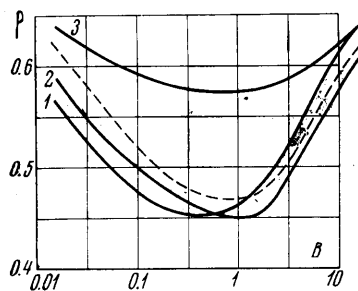
Фиг. 6



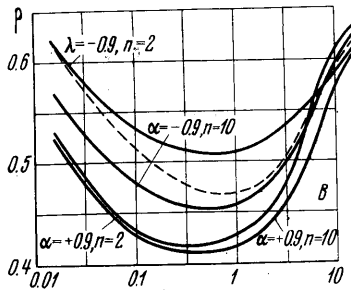
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Таким образом, существенное отличие времени прорыва и безводной нефтеотдачи имеет место лишь для распределения 3.

На фиг. 5, 6 представлены кривые водонасыщенности, соответствующие распределению проницаемости 4 при $n = 2$ и $\lambda = \pm 0.9$ соответственно (пунктирные кривые отвечают однородному пласту). Как и раньше, на участках повышенной проницаемости водонасыщенность снижена по сравнению с однородным пластом, и наоборот. Время прорыва и безводная нефтеотдача при $\lambda = 0.9$ оказались 0.30 и 0.44, для случая $\lambda = -0.9$ — соответственно 0.35 и 0.52.

На фиг. 7, 8 изображены кривые водонасыщенности для случая $\lambda = \pm 0.9$ и $n = 10$. Нетрудно убедиться, что локальные максимумы водонасыщенности находятся на участках пониженной проницаемости. Время прорыва и безводная нефтеотдача при $\lambda = 0.9$ равны 0.29 и 0.43, а для $\lambda = -0.9$ — соответственно 0.32 и 0.47.

Расчеты, проведенные для остальных значений параметра B , показали, что влияние неоднородности на распределение насыщенности при $B < 1.59$ возрастает, а при B , больших 1.59, убывает. Так, при $B = 15.9$ кривые насыщенности до момента прорыва практически совпадают. В заключение приведем зависимости безводной нефтеотдачи от параметра B для различных распределений проницаемости (фиг. 9, 0). На графиках пунктирная кривая соответствует случаю однородного пласта. Следует отметить, что эта кривая несколько отличается от соответствующей кривой, полученной в статье [2], что, по-видимому, в основном вызвано различием в начальном условии. Как нетрудно убедиться, при не слишком больших B неоднородность оказывает значительное влияние на безводную нефтеотдачу. При этом решающее значение имеет проницаемость на выходе пласта.

Авторы благодарят Т. В. Старцеву, Л. Х. Аминову за помощь в проведении расчетов на ЭВМ «Урал-3».

Поступило 21 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Rapoport L. A., Leas W. J. Properties of Linear Waterfloods. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Enging. AIME, 1953, vol. 198.
2. Douglas J., Blair P. M., Wagner R. J. Calculation of Linear Waterflood Behavior Including the Effects of Capillary Pressure. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Enging. AIME, 1958, vol. 213.
3. McEwen C. R. A Numerical solution of the Linear Displacement Equation with Capillary Pressure. Petroleum. Technol., 1959, vol. 11, No. 8.
4. Курбанов А. К., Курбанов И. Ф. Влияние смачиваемости на процесс вытеснения нефти водой. Научно-техн. сб. по добыче нефти, Изд-во «Недра», 1964, вып. 24.
5. Leverett M. C. Capillary Behavior in Porous Solids. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Enging., AIME, 1941, vol. 142.
6. Самарский А. А. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
7. Самарский А. А. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3.

НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Э. А. АВАКЯН

(Москва)

Уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде [1] в предположении, что проницаемость пористых блоков, по сравнению с проницаемостью трещин, и пористость трещин, по сравнению с пористостью блоков, пренебрежимо малы, можно записать в виде

$$\kappa t \Delta p_1 = p_1 - p_2, \quad \tau \partial p_2 / \partial t = p_1 - p_2 \quad (0.1)$$

Здесь p_1 — давление в трещинах; p_2 — давление в пористых блоках; τ — характерное время запаздывания; κ — коэффициент пьезопроводности. Рассмотрим приближенные решения этой системы уравнений в случае фильтрации к скважине, вскрывающей трещиновато-пористый пласт мощностью h , которая в момент $t = 0$ начинает работать с дебитом Q .

§1. Фильтрация в бесконечном пласте. Метод интегральных соотношений. Граничные условия имеют вид

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \frac{Q \mu}{2\pi k h} = q, \quad p_1|_{r=\infty} = p_0 \quad (1.1)$$

где μ — вязкость жидкости; k — проницаемость трещин. Начальное условие

$$p_2|_{t=0} = p_0 \quad (1.2)$$