

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ УГЛА ПОТОКОМ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

И. Ю. БРАЙЛОВСКАЯ

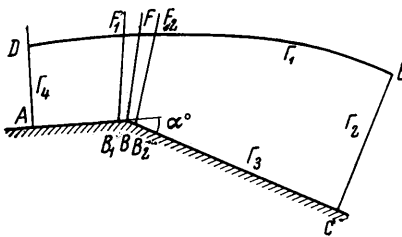
(Москва)

Рассматривается задача о расчете параметров течения, возникающего при обтекании угла (большого π) сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа. В небольшой окрестности Q_1 угловой точки (характерный размер $l \sim 1/\sqrt{R}$) решается полная система уравнений Навье — Стокса для вязкого сжимаемого газа. На границе Q_1 задаются условия гладкого сопряжения решения уравнений Навье — Стокса и решения уравнений идеального газа или пограничного слоя. Все эти решения заранее неизвестны, и условия гладкого сопряжения сводятся к некоторым дифференциальным уравнениям на границе Q_1 . При этом учитывается взаимное влияние течений вблизи обтекаемой поверхности и в так называемой внешней области [1].

Заметим, что в Q_1 , таким образом, не делается заранее никаких предположений о качественном поведении решения, в отличие от других работ о вязком обтекании угла (например [2-4]).

Система Навье — Стокса в Q_1 решается численно, разностная схема предложена в [5]. Эта схема позволяет получать стационарное решение методом установления при больших числах Рейнольдса R , а также имеет точность аппроксимации, достаточную для учета эффектов малой вязкости и теплопроводности.

I. Постановка задачи. Рассмотрим стенку с изломом, помещенную в сверхзвуковой равномерный поток вязкого газа (фиг. 1). На линии AD , расположенной достаточно далеко от точки B , заданы параметры набегающего потока, а именно, предполагается, что они представляют собой решение уравнений пограничного слоя для сжимаемого газа на пластине [6], причем точка D выбрана так, что выше D поток — равномерный, сверхзвуковой, параллельный стенке AB .



Фиг. 1

Итак, требуется найти течение в области Q , ограниченной стенкой угла ABC и полупрямой $AD \perp AB$.

Разобьем Q на подобласти Q_1, Q_2, Q_3 (фиг. 1) так, чтобы выполнялись изложенные ниже требования. В окрестности Q_1 , угловой точки B не делается никаких предположений относительно поведения решения, поэтому в Q_1 решается полная система уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа, с переменными коэффициентами вязкости и теплопроводности.

Область Q_2 расположена выше Γ_1 , достаточно далеко от поверхности тела, чтобы члены уравнений Навье — Стокса, описывающие диссипацию энергии за счет вязкости и теплопроводности, были величинами порядка $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon^2 = 1/R$. Поэтому в Q_2 течение описывается с точностью до ε^2 уравнениями невязкого газа (см., например, [7]); Q_3 — область вблизи стенки, справа от Γ_2 , находящаяся достаточно далеко вниз по потоку от угловой точки B , чтобы градиенты параметров потока в направлении вдоль обтекаемой поверхности были величинами порядка единицы, если поперечные градиенты порядка $1/\varepsilon = \sqrt{R}$. В Q_3 течение описывается уравнениями типа пограничного слоя. Система уравнений (2.10) — (2.13), решаемая в данной работе в области Q_3 , несколько отлична от обычных уравнений погранично-

го слоя, в частности, она отличается от уравнений Навье — Стокса членами порядка $O(\varepsilon^2)$, а не $O(\varepsilon)$ (подробнее об этом см. п. 2).

Параметры течения заранее неизвестны, поэтому нельзя провести точную оценку членов уравнений Навье — Стокса, нужную для выбора границ Γ_1 и Γ_2 (фиг. 1). Однако точность решения не ухудшается при увеличении Q_1 за счет Q_2 и Q_3 , так как в Q_1 решается полная система. Возьмем Q_1 заведомо большей имеющихся априорных оценок [6]. Результаты численного расчета, описанные ниже, подтвердили правильность выбора границ Γ_1 и Γ_2 .

Условия на линиях Γ_1 и Γ_2 — условия гладкого сопряжения решения уравнений Навье — Стокса с решениями системы уравнений невязкого газа и системы (2.10) — (2.13). Все эти решения заранее не известны, так что условия гладкого сопряжения сводятся к некоторым дифференциальным операторам на границах Γ_1 и Γ_2 (см. п. 2).

2. Уравнения и граничные условия. Уравнения Навье — Стокса запишем в форме

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = -(\gamma - 1) \gamma M_0^2 p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\gamma}{RP} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\gamma}{RP} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{M_0^2 \gamma (\gamma - 1)}{R} \mu \Phi \quad (2.4)$$

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

Здесь u и v — продольная и поперечная компоненты скорости; p , ρ , T , μ , λ , R , P , M_0 — давление, плотность, температура, коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности, число Рейнольдса, число Прандтля и число Маха соответственно. Все переменные в уравнениях (2.1) — (2.4) — безразмерные. При образовании безразмерных величин используются параметры набегающего равномерного потока u_0 , ρ_0 , T_0 , μ_0 , λ_0 . В качестве характерной длины l_0 взята толщина набегающего пограничного слоя $AD = H_0$ (фиг. 1). Комбинации величин с индексом 0 образуют числа R , P и M_0 .

Предполагается, что давление, плотность и температура связаны соотношением

$$p = \frac{1}{\gamma M_0^2} T \rho \quad (2.5)$$

коэффициенты вязкости и теплопроводности линейно зависят от температуры; теплоемкости c_p и c_v постоянны и равны их значениям в равномерном набегающем потоке.

Для того чтобы получить решение (2.1) — (2.4) в цилиндре $Q \times t$, необходимо задать начальные условия при $t = 0$, а также краевые условия на боковых поверхностях $\Gamma_1 \times t$, $\Gamma_2 \times t$, $\Gamma_3 \times t$, $\Gamma_4 \times t$.

Будем рассматривать «установившееся» решение, т. е. предел при $t \rightarrow \infty$. При этом задание начальных условий во многом произвольно.

В данной работе в качестве начальных были взяты параметры течения, соответствующие невязкому обтеканию того же угла, измененные у стенки

$$F_i(\xi, \eta, 0) = G_i(\xi, \eta, 0)(1 - e^{-k\eta}) + F_{iw}e^{-k\eta}$$

Здесь F_i — температура, плотность и модуль скорости в начальный момент; G_i — те же величины для невязкого потока; F_{iw} — значения тех же параметров для вязкого потока на стенке; ξ и η — продольная и поперечная координаты.

Граничные условия на Γ_4 , как сказано выше, — параметры набегающего потока; на Γ_3 — обычные условия прилипания для скорости; известна температура стенки; плотность на стенке находилась из уравнения неразрывности, как описано в [5].

Для простоты расчетов удобно, чтобы течение всюду выше Γ_1 было безвихревым. Поэтому Γ_1 была выбрана так, чтобы линии тока в точках Γ_1 были направлены внутрь области Q_1 , если за положительное принять направление набегающего потока слева направо (фиг. 1).

Система уравнений, описывающая течение в Q_2 , имеет вид [7].

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^v} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho^v} = 0 \quad (2.7)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2 + v^2}{2} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Для того чтобы в Q_2 решить уравнения невязкого газа (2.6) — (2.8), на Γ_1 необходимо задать одно граничное условие (в соответствии с числом характеристик системы уравнений невязкого газа, входящих внутрь Q_2 [8]). Для решения уравнений Навье — Стокса в области Q_1 при таком расположении границы Γ_1 на ней требуются четыре условия [8].

Таким образом, чтобы получить решение в $Q_1 + Q_2$, нужно знать на границе Γ_1 пять неизвестных функций. Для их определения задаются пять условий гладкого сопряжения. Первые четыре — это условия непрерывности на Γ_1 компонент скорости, температуры и плотности. В качестве пятого берется условие непрерывности на Γ_1 левой части уравнения (2.6.1) системы уравнений невязкого газа (2.6) — (2.8), т. е. условие непрерывности вихря. Выбор уравнения (2.6.1) из системы (2.6) — (2.8) определяется тем, что дополнительное условие непрерывности при любых возможных в данной задаче течениях не должно быть следствием ни первых четырех условий, ни исходных уравнений, решаемых в Q_1 и Q_2 .

Действительно, рассмотрим уравнения (2.6) — (2.8). Уравнение неразрывности (2.6.2) имеет одинаковый вид в системе Навье — Стокса и в (2.6) — (2.8), т. е. условие непрерывности на Γ_1 его левой части выполняется автоматически. Непрерывность левых частей уравнений (2.7) и (2.8) — следствие первых четырех условий непрерывности искомых функций, если поперечная скорость v равна нулю, что возможно в точках Γ_1 . Остается только уравнение (2.6.1), непрерывность его левой части на Γ_1 не есть следствие непрерывности самих функций, так как в (2.6.1) входит производная по нормали к Γ_1 , и коэффициент при ней не обращается в нуль.

Покажем, каким граничным условиям на Γ_1 эквивалентна описанная система условий гладкого сопряжения. Поскольку течение в Q_2 — простая волна, то искомые величины u , v , ρ , T — функции одного параметра, например $v = v(u)$, $\rho = \rho(u)$, $T = T(u)$. Но параметры потока непрерывны на Γ_1 , следовательно, и в \bar{Q}_1 на Γ_1 справедливы те же соотношения. В Q_2 имеем $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$, вследствие непрерывности и в \bar{Q}_1 на Γ_1

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Итак, в \bar{Q}_1 на Γ_1 имеем следующие краевые условия для системы Навье — Стокса (2.1) — (2.4)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial y} - v'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = v(u), \quad \rho = \rho(u), \quad T = T(u) \quad (2.9)$$

Здесь $v(u)$, $\rho(u)$, $T(u)$ — известные функции, описывающие простую волну в \bar{Q}_2 . Конкретное осуществление условий (2.9) при численном решении см. в п. 3. Опишем граничные условия на Γ_2 , при этом будем для простоты считать, что Γ_2 — координатная линия $x = C$. Рассмотрим систему уравнений

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.11)$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = -(\gamma - 1) \gamma M_0^2 p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{RP} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{M_0^2 \gamma (\gamma - 1)}{R} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

Согласно выбору границы Γ_2 , в Q_3 градиенты параметров потока вдоль стенки — величины порядка единицы. Поэтому уравнения (2.10) — (2.13) в Q_3 отличаются от системы Навье — Стокса (2.1) — (2.4) членами порядка $O(\varepsilon^2)$. При этом поперечный градиент давления не предполагается равным нулю, но отброшено уравнение движения для поперечной составляющей скорости v , сохраняются члены описывающие невязкое течение.

Чтобы решать уравнения (2.10) — (2.13) в Q_3 , требуются четыре граничных условия на Γ_2 . Для уравнений Навье — Стокса требуются три условия на Γ_2 , так как поток течет слева направо [8]. Итак, на Γ_2 требуется знать семь неизвестных функций. Для их определения задаем на Γ_2 семь условий гладкого сопряжения. Первые четыре — это непрерывность искомых функций u , v , ρ , T . Остальные три — непрерывность левых частей уравнений (2.10) — (2.12) системы (2.10) — (2.13). Тогда уравнения (2.10) — (2.12) удовлетворяются на Γ_2 в \bar{Q}_1 и служат граничными условиями для системы (2.1) — (2.4).

Уравнение неразрывности не могло быть взято в качестве граничного условия, так как оно имеет одинаковый вид в Q_3 и Q_1 , т. е. непрерывность его левой части — следствие уравнений, решаемых в Q_1 и Q_3 .

Выбор уравнений (2.10) — (2.13), отличных от классических уравнений Навье — Стокса, объясняется следующими причинами.

1) Уравнения (2.10) — (2.12) в качестве граничных условий на Γ_2 для системы (2.1) — (2.4) аналогичны условию типа $\partial u / \partial t + \partial u / \partial x = \partial^2 u / \partial y^2$ на линии $x = C$ для параболического уравнения

$$\partial u / \partial t = Lu \quad (2.14)$$

(L — эллиптический оператор второго порядка): т. е. «хорошему» условию в смысле разрешимости краевой задачи [9]. Классические уравнения пограничного слоя в каче-

стве граничных условий для уравнений (2.1)–(2.4) аналогичны заданию касательной производной функции u на части границы для параболического уравнения (2.14), так как в них отсутствует производная по нормали к Γ_2 от v , и в точках Γ_2 не удовлетворяют условию Шапиро — Лопатинского [9].

2) Уравнения (2.10)–(2.13) справедливы на сколь угодно далеком расстоянии от стенки, так как, в отличие от обычных уравнений пограничного слоя, в них сохранены все члены, описывающие невязкое течение. Это важно, так как при больших числах Маха часть границы Γ_2 лежит в области волны разрежения.

3) Система (2.10)–(2.13) отличается от (2.1)–(2.4) членами порядка $O(\varepsilon^2)$, а не $O(\varepsilon)$, как обычная система уравнений пограничного слоя.

Точное решение U_T уравнений Навье — Стокса во всей области Q , ограниченной стенкой угла ABC и прямой AD , удовлетворяет уравнениям и граничным условиям в Q_1 с точностью до величин $O(\varepsilon^2)$. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой. Следовательно, если решение U полученной в Q_1 краевой задачи существует и непрерывно зависит от правых частей уравнений внутри и на границе Q_1 , то разность $|U_T - U|$ — величина $O(\varepsilon^2)$ внутри и на границе Q_1 . Поэтому параметры невязкого потока в Q_2 , которые можно получить с использованием полученных значений на Γ_1 , отличаются от точного решения U_T в Q_2 на величину $O(\varepsilon^2)$.

Это важно при применении данной методики к решению таких задач, как взаимодействие ударной волны с пограничным слоем, когда течение существенно зависит от параметров вблизи поверхности тела также и в тех областях, где диссипация за счет вязкости и теплопроводности пренебрежимо мала.

Заметим, что в настоящей работе не существенно то, что в Q_2 использованы стационарные уравнения, а в Q_1 и Q_3 — нестационарные, поскольку, как было сказано, рассматривается лишь предел решения при $t \rightarrow \infty$. Использование стационарных уравнений в Q_2 приводит к более простому виду граничных условий на Γ_1 .

Наличие в Q_2 простой волны создает особенную простоту, так как уравнения в Q_2 интегрируются в явном виде. Однако та же методика применима и в более сложных случаях. Только при этом приходится получать каким-либо образом решение уравнений невязкого газа в Q_2 , а четвертое условие непрерывности на Γ_1 приводит к граничному условию

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\gamma p^{(\gamma-1)/\gamma}}{\gamma - 1} \rho \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0 \quad (2.15)$$

вместо условия $\Omega = \text{rot } V = 0$

3. Определение формы границы Γ_1 ; численный метод. Для того чтобы линии тока в каждой точке Γ_1 входили внутрь области Q_1 , угол между касательной к Γ_1 и прямой AB должен быть несколько больше угла между AB и линией тока чисто невязкого обтекания, выходящей из точки D . Форма $\Gamma_1(f_2(s))$ определялась как решение уравнения

$$\frac{df_2}{ds} = \frac{v'(s)}{u'(s)} + \chi$$

Здесь u' и v' — параметры чисто невязкого обтекания угла ABC в точках границы Γ_1 ; s — длина дуги вдоль Γ_1 , χ — некоторая положительная постоянная. Численное решение рассматриваемой в данной статье задачи было получено методом конечных разностей. Разностная схема описана в работе [5]. Была взята полярная система координат (r', φ') с центром в точке пересечения прямых AD и CE (фиг. 1), где $AD \perp AB$, $CE \perp BC$.

Область $ABCED$ преобразовывалась в прямоугольную заменой независимых переменных

$$r'' = \frac{r' - f_1}{f_2 - f_1} \quad \varphi'' = \frac{\varphi' - (1/2\pi - \alpha_1^0)}{-\alpha^0}$$

где $f_1(\varphi')$ и $f_2(\varphi')$ — уравнения границ Γ_3 и Γ_1 ; α^0 — обтекаемый угол (фиг. 1), α_1^0 — угол между прямой AD и координатным лучом, проходящим через точку B .

Затем производилось логарифмическое сгущение сетки у стенки угла и около луча, проходящего через точку B , как это сделано в [10], а именно, делалась еще одна замена переменных

$$r = \ln \left(1 + \frac{r''}{\delta} \right), \quad \varphi = \begin{cases} -\ln(1 - \varphi''/\delta) & (-\alpha_1^0/\alpha^0 \leq \varphi'' < 0) \\ \ln(1 + \varphi''/\delta) & (0 < \varphi'' \leq \alpha_2^0/\alpha^0) \end{cases}$$

где $\delta < 1$; в частности, бралось $\delta = 0.2$ и $\delta = 0.0555$.

В переменных r, φ уравнения Навье — Стокса (2.1) — (2.4) имеют вид (здесь u — составляющая скорости, перпендикулярная к радиусу, v — параллельная радиусу полярной системы координат).

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u g_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \rho u g_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \rho v e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} + \rho u v g_3 = -g_2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} + g_1 \frac{\partial p}{\partial r} + \left(g_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\mu \Lambda_{\varphi\varphi} - \frac{2}{3} \mu g_4 \operatorname{div} \mathbf{V} \right) + e^{-r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu \Lambda_{r\varphi}) + 2g_3 \mu \Lambda_{r\varphi}, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u g_2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \rho u g_1 \frac{\partial v}{\partial r} + \rho v e^{-r} \frac{\partial v}{\partial r} - \rho u^2 g_3 = -e^{-r} \frac{\partial p}{\partial r} + e^{-r} \frac{\partial}{\partial r} \times \left(\mu \Lambda_{rr} - \frac{2}{3} \mu g_4 \operatorname{div} \mathbf{V} \right) + \left(g_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial}{\partial r} \right) (\mu \Lambda_{r\varphi}) + g_3 \mu (\Lambda_{rr} - \Lambda_{\varphi\varphi}) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g_2 \frac{\partial \rho u}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial \rho u}{\partial r} + e^{-r} \frac{\partial \rho u}{\partial r} + g_3 \rho v = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u g_2 \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \rho u g_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \rho v e^{-r} \frac{\partial T}{\partial r} = -(\gamma - 1) \gamma M_0^2 p \operatorname{div} \mathbf{V} + e^{-r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma}{P} \lambda g_4 e^{-r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + g_4 g_3 \frac{\gamma}{P} \lambda e^{-r} \frac{\partial T}{\partial r} + \left(g_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial}{\partial r} \right) \times \left[\frac{\gamma}{P} \lambda g_4 \left(g_2 \frac{\partial T}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + M_0^2 \gamma (\gamma - 1) \mu \Phi \quad (3.4)$$

$$\Phi = (\Lambda_{rr}' + \Lambda_{\varphi\varphi}' + \Lambda_{r\varphi}') - \frac{2}{3} g_4 (\operatorname{div} \mathbf{V})^2$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = e^{-r} \frac{\partial v}{\partial r} + g_3 v + g_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\Lambda_{rr}' = 2g_4 e^{-2r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2, \quad \Lambda_{\varphi\varphi}' = 2g_4 \left(g_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial u}{\partial r} + g_3 v \right)^2$$

$$\Lambda_{r\varphi}' = g_4 \left(e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} - u g_3 + g_2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2$$

$$\Lambda_{rr} = 2g_4 e^{-r} \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \Lambda_{\varphi\varphi} = 2g_4 \left(g_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial u}{\partial r} + g_3 v \right)$$

$$\Lambda_{r\varphi} = g_4 \left(e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} - u g_3 + g_2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

$$g_1 = \frac{f_1'(1 - r'') + r'' f_2'}{f_1 + r''(f_2 - f_1)} e^{-r}, \quad g_2 = \frac{f_2 - f_1}{-[f_1 + r''(f_2 - f_1)] \alpha^0} e^{-|\varphi|}, \quad f_1' = \frac{df_1}{d\varphi'}$$

$$g_3 = \frac{f_2 - f_1}{f_1 + r''(f_2 - f_1)} \delta, \quad g_4 = \frac{1}{(f_2 - f_1) \mathbf{R} \cdot \delta}, \quad f_2' = \frac{df_2}{d\varphi'}$$

Условия на Γ_2 имеют вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u g_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \rho u g_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \rho v e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} + \rho u v g_3 = -g_2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} + g_1 \frac{\partial p}{\partial r} + e^{-r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu g_4 \left(e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} - u g_3 \right) \right) + 2g_3 \mu g_4 e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.5)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u g_2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \rho u g_1 \frac{\partial v}{\partial r} + \rho v e^{-r} \frac{\partial v}{\partial r} - \rho u^2 g_3 = e^{-r} \frac{\partial p}{\partial r} + e^{-r} \frac{\partial}{\partial r} \times \times' \mu \Lambda_{rr} - \frac{2}{3} \mu g_4 \operatorname{div} \mathbf{V} + \left(g_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\mu g_4 e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} - g_4 g_3 u \right) + g_3 \mu \left(\Lambda_{rr} - 2g_4' g_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.6)$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u g_2 \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \rho u g_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \rho v e^{-r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\gamma(\gamma - 1) M_0^2 p \operatorname{div} \mathbf{V} + e^{-r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma}{P} \lambda g_4 e^{-r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + g_4 g_3 \frac{\gamma}{P} \lambda e^{-r} \frac{\partial T}{\partial r} + M_0^2 \gamma (\gamma - 1) \mu g_4 \left(e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (3.7)$$

Уравнения (3.1)–(3.4) и (3.5)–(3.7) аппроксимировались разностями согласно явной схеме с пересчетом описанной в [5]. При этом во внутренних точках производные по r и φ заменялись разностными отношениями по формулам ($f(r, \varphi) = f(mh_2, lh_1) = f_{m,l}$)

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{f_{m+1,l} - f_{m-1,l}}{2h_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{f_{m,l+1} - f_{m,l-1}}{2h_1} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \frac{1/2(k_{m,l+1} + k_{m,l})(f_{m,l+1} - f_{m,l}) - 1/2(k_{m,l} + k_{m,l-1})(f_{m,l} - f_{m,l-1})}{h_1^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{k_{m,l+1}(f_{m+1,l+1} - f_{m-1,l+1}) - k_{m,l-1}(f_{m+1,l-1} - f_{m-1,l-1})}{4h_1 h_2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \frac{k_{m+1,l}(f_{m+1,l+1} + f_{m+1,l-1}) - k_{m-1,l}(f_{m-1,l+1} - f_{m-1,l-1})}{4h_1 h_2} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1/2(k_{m+1,l} + k_{m,l})(f_{m+1,l} - f_{m,l}) - 1/2(k_{m,l} + k_{m-1,l})(f_{m,l} - f_{m-1,l})}{h_2^2} \quad (3.12)$$

Погрешность аппроксимации этих формул — величина $O(h^2)$. В переменных φ, r шаги $\Delta r = h_2, \Delta \varphi = h_1$ были постоянны. Поскольку уравнение стенки угла $\Gamma_3, f_1(\varphi)$ — функция с разрывной первой производной по φ , коэффициенты уравнений (3.1)–(3.4) g_1 — разрывны на луче BF (фиг. 1), а g_2, g_3, g_4 терпят разрыв первых производных по φ на этом луче. Координатная сетка для разностных уравнений выбрана так, что на луче BF нет узлов сетки. Ближайшие к лучу $BR(\varphi = 0)$ узлы сетки лежат на лучах $\varphi'' = -h_1/2$ и $\varphi'' = h_1/2$ (B_1F_1 и B_2F_2 , фиг. 1). Производные вида $\partial / \partial \varphi (k \partial f / \partial \varphi)$ и $\partial / \partial \varphi (k \partial f / \partial r)$ в точках луча B_1F_1 заменялись разностными отношениями по формулам

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \frac{k_{m,l+1/2}(f_{m,l+1} - f_{m,l}) - 1/2(k_{m,l} + k_{m,l-1})(f_{m,l} - f_{m,l-1})}{h_1^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{k_{m,l}(f_{m+1,l} - f_{m-1,l}) - k_{m,l-1}(f_{m+1,l-1} - f_{m-1,l-1})}{2h_1 h_2}$$

Здесь точки с индексом l лежат на луче B_1F_1 . В точках луча B_2F_2 применялись разностные формулы (индекс l относится к лучу B_2F_2)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \frac{^{1/2}(k_{m,l+1} - k_{ml})(f_{m,l+1} - f_{ml}) - k_{m,l-1/2}(f_{ml} - f_{m,l-1})}{h_1^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{k_{m,l+1}(f_{m+1,l+1} - f_{m-1,l+1}) - k_{ml}(f_{m+1,l} - f_{m-1,l})}{2h_1h_2}$$

Остальные производные заменялись разностями по формулам (3.8) — (3.12).

При этом погрешность аппроксимации для установившегося решения в Q_1 — величина $O(h^2)$ (предполагается достаточная гладкость искомых функций u, v, ρ, T).

Условие на Γ_1

$$\frac{\partial u}{\partial r'} - \frac{1}{r'} \frac{\partial v}{\partial \varphi'} + \frac{u}{r'} = e^{-r} \frac{\partial u}{\partial r} - g_2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} + g_1 \frac{\partial v}{\partial r} + g_3 u = 0$$

аппроксимировано конечными разностями и по формуле

$$\frac{u_{m,l}^{n+1} - u_{m-1,l}^{n+1}}{h_2} - g_{2,m,l} \frac{v_{m,l}^{n+1} - v_{m-1,l}^{n+1}}{h_1} + g_{1,m,l} \frac{v_{m,l}^{n+1} - v_{m-1,l}^{n+1}}{h_2} + g_{3,m,l} u_{m,l}^{n+1} = 0 \quad (3.13)$$

где f_{ml} ($l = 0, 1, \dots, L$) — значения в точках Γ_1 . Затем использованы формулы, выражающие в явном виде все параметры в Q_2 , а следовательно, — и на Γ_1 , через число Маха

$$u = \frac{M}{M_0} \left[\frac{M_0^2 + 2\kappa}{M^2 + 2\kappa} \right]^{1/2} \cos(\beta + \alpha_1^0 + \alpha^0 \varphi''), \quad \kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (3.14)$$

$$v = u \operatorname{tg}(\beta + \alpha_1^0 + \alpha^0 \varphi''), \quad \rho = \left[\frac{M_0^2(\gamma - 1) + 2}{M^2(\gamma - 1) + 2} \right]^\kappa, \quad T = \frac{M_0^2(\gamma - 1) + 2}{M^2(\gamma - 1) + 2}$$

$$\beta = \left\{ \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \operatorname{ctg} \alpha \right] + \alpha \right\} + \alpha_0 +$$

$$+ \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \operatorname{ctg} \alpha_0 \right], \quad \alpha = \arcsin \frac{1}{M}, \quad \alpha_0 = \arcsin \frac{1}{M_0}$$

Выражения $u_{m,l}^{n+1}(M)$ и $v_{m,l}^{n+1}(M)$ подставлены в уравнение (3.13), в результате получено уравнение для определения числа Маха M в каждой точке границы Γ_1 значения $u_{m-1,l}^{n+1}$, $v_{m-1,l}^{n+1}$, $v_{m,l-1}^{n+1}$ — известны и представляют собой результат счета по явной схеме во внутренних точках Q_1 , а также значения в известных уже точках Γ_1 .

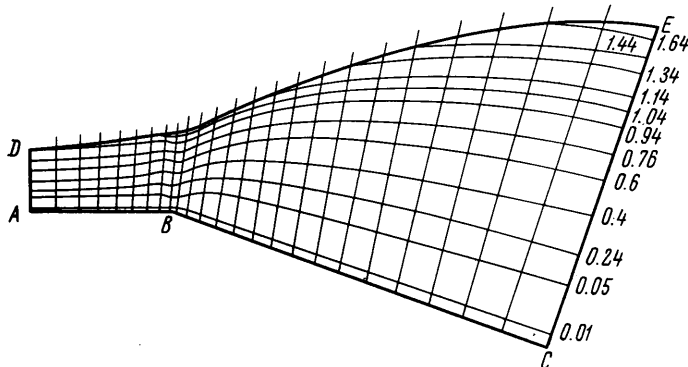
Это уравнение разрешалось относительно M простыми итерациями, затем по найденному таким образом числу M находились величины u, v, ρ, T в точках Γ_1 согласно формулам (3.14), где M_0 — число Маха набегающего равномерного потока.

4. **Результаты счета.** Численное решение описанной задачи получено на машинах М-20 и БЭСМ-3. Установившиеся решения (предел при $t \rightarrow \infty$) были получены для приведенных ниже комбинаций значений чисел Маха M_0 , Рейнольдса R и угла α^0 (число Рейнольдса отнесено к толщине набегающего пограничного слоя, число Маха M_0 — к параметрам набегающего потока на бесконечности), при температуре стенки $T_w / T_\infty = 0.25$:

$M_0 = 1.3$	1.3	2	3	4	5
$R = 100$	100	100	100	400	400
$\alpha^0 = 20^\circ$	40°	20°	20°	20°	20°

Во всех этих расчетах число узлов сетки равно 21×25 , где 21 точка бралась в поперечном направлении по r , 25 точек — в продольном по φ . При этом шаг вдоль координатных линий $\varphi' = c$ составлял $\Delta r'' = 0.0187$ — у стенки, $\Delta r'' = 0.1$ у границы Γ_1 (координатные линии $\varphi' = c$ (лучи) проведены на линиях тока, фиг. 2).

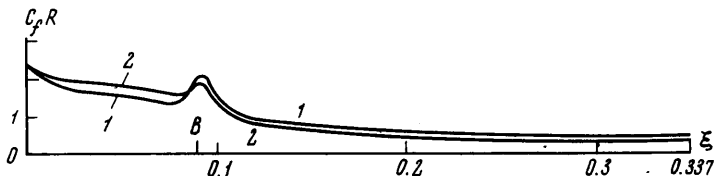
Расстояние между основаниями лучей на стенке $\Delta S = 0.185$ около угловой точки B ; $\Delta S = 0.785$ — у точки A ; $\Delta S = 1.534$ — у точки C . За единицу везде взята толщина AD набегающего пограничного слоя. Расстояния $AB = 4.75$; $BC = 13$.



Фиг. 2

Третий и четвертый столбец из приведенных расчетов были просчитаны также с увеличением в два раза шагом по r'' на сетке размером 11×25 . Получено хорошее совпадение с крупным и мелким шагами.

Форма и размер области Q_1 видны на графике линий тока $\psi = c$ для установившегося течения для четвертого варианта расчетов (фиг. 2). Линии тока, как показали



Фиг. 3

расчеты, расходятся после угловой точки тем сильнее, чем больше число M_0 и чем больше обтекаемый угол α^0 . Все результаты, о которых идет речь, относятся к установившимся течениям. Расстояния от стенок угла ABC вдоль лучей $\varphi' = c$ на фиг. 2 взяты в два раза большем масштабе, чем расстояния вдоль AB и BC . Это приводит к некоторому искажению формы границы DE и линий тока $\psi = c$.

График коэффициента трения

$$C_f = \frac{\tau}{\rho_0 u_0^2}, \quad \tau = \mu \frac{du}{dy}$$

приведен на фиг. 3 для следующих вариантов: 1 — третий, 2 — шестой. Видно, что трение возрастает непосредственно перед угловой точкой.

Профили продольной составляющей скорости вдоль перпендикуляров к поверхности угла не имеют перегибов после угловой точки. Поперечная скорость вдоль перпендикуляров к поверхности — величина того же порядка, что и продольная, непосредственно за угловой точкой, особенно при $\alpha^0 = 40^\circ$. Продольной и поперечной скоростями здесь называются составляющие скорости, соответственно параллельные и перпендикулярные стенкам угла. Модуль скорости вдоль перпендикуляров к стенке также не имеет перегибов после угловой точки. Таким образом, после угловой точки отрыва потока не замечена.

Перед угловой точкой течение имеет характер пограничного слоя. Поперечная составляющая скорости мала — порядка 10^{-2} , 10^{-3} ; градиент давления $\partial p / \partial n$ в перпендикулярном к стенке направлении также очень близок к нулю.

Продольная составляющая скорости вблизи стенки возрастает непосредственно перед угловой точкой. При обтекании большого угла ($\alpha^0 = 40^\circ$) скорость у стенки возрастает перед угловой точкой сильнее, чем в других вариантах.

На фиг. 4 приведены графики давления p/p_0 (p_0 — давление набегающего потока на бесконечности) вдоль перпендикуляров к стенке для шестого варианта. Основания перпендикуляров находятся на стенках угла и удалены от угловой точки на величину $\pm l$ соответственно вправо и влево. 1. $l = -1.49$, 2. $l = 0.187$, 3. $l = 1.04$, 4. $l = 7.66$, 5. $l = 14$. Таким образом, линия 5 есть график давления вдоль границы Γ_2 . Как видно из фиг. 4, поперечный градиент на первых перпендикулярах после угловой точки нигде не равен нулю, затем около стенки появляется область равного нулю градиента. Эта область расширяется при продвижении вниз по потоку. В других вариантах то же самое. Это согласуется с моделью нарастающего после угловой точки пограничного слоя, предложенной например, в [2]. Однако вихревое течение сразу над этой областью сильно отличается от вязкого, например, велики градиенты продольной составляющей скорости вдоль перпендикуляров к стенке. Это видно на графиках продольной составляющей скорости вдоль перпендикуляров к стенке для третьего варианта (фиг. 5). Основания перпендикуляров удалены от угловой точки:

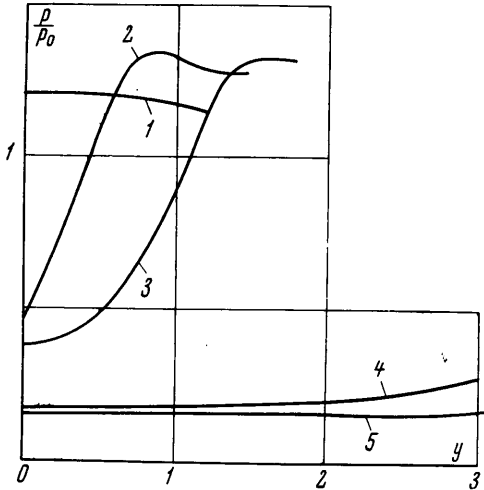
1. $l = -3.96$, 2. $l = -0.578$,
3. $l = 0.187$, 4. $l = 1.04$, 5. $l = 7.66$

Аналогично выглядят графики температуры. Продольные градиенты тех же величин при этом малы.

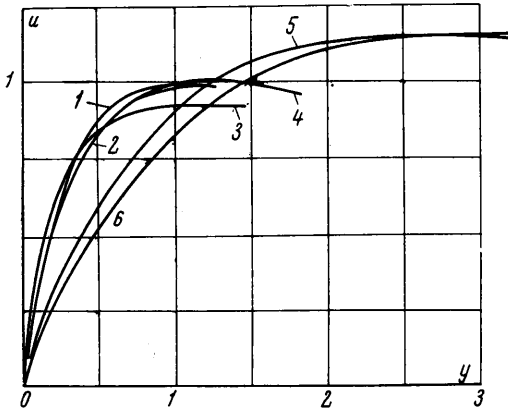
Значения давления p/p_0 для третьего варианта вдоль линий тока на разных расстояниях от стенки в зависимости от $\xi = \frac{1}{2}\pi - \varphi'$ показано на фиг. 6.

Подъем давления вблизи AD ($\xi = 0$) вызван тем, что в набегающем потоке поперечная составляющая скорости положена равной нулю ($v = 0$). Поэтому на первых трех — четырех шагах после AD происходит небольшая перестройка потока, в результате вырабатываются параметры, обычные для пограничного слоя при $v \sim 10^{-2}$.

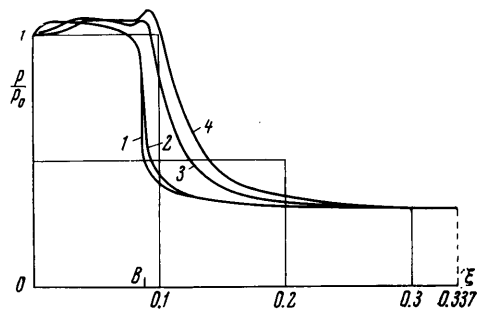
Поведение искомых функций u, v, ρ, T вблизи границы Γ_1 показывает, что она достаточно удалена от стенок, так как градиенты всех величин вблизи Γ_1 достаточно



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

малы, чтобы диссипативные члены уравнений Навье — Стокса были величинами $O(\varepsilon^2)$ (см., например, фиг. 5).

Положение границы Γ_2 также оправдано расчетами, так как продольные градиенты малы вблизи Γ_2 . (См., например, фиг. 6). При больших числах Маха ($M_0 \geq 3$) часть Γ_2 находится в волне разрежения, область пограничного слоя ($\partial p / \partial n = 0$) сливается с волной разрежения ($\partial p / \partial n > 0$).

В подтверждение этого ниже приводится ряд значений p/p_0 для некоторых y в продолжение линий 4 и 5 (фиг. 4).

y	= 3.5	4.0	4.5	4.76 (Кривая 4)
p/p_0	= 0.37	0.507	0.678	0.786
y	= 4.0	5.0	6.0	7.0 (Кривая 5)
p/p_0	= 0.203	0.28	0.406	0.609

Поступило 6 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Браиловская И. Ю. Метод расчета течений с сильным вязким взаимодействием. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 1.
2. Z akkey V., Tani T. Theoretical and experimental investigation of the laminar heat transfer downstream of a sharp corner. Proc. Fourth U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.
3. Ашратов Э. А., Сорокин Л. И., Обтекание внешнего угла вязким сверхзвуковым потоком. Изв. АН СССР, 1965, № 4, стр. 165—168.
4. Нейланд В. Я., Сычев В. В. Асимптотические решения уравнений Навье — Стокса в областях с большими локальными возмущениями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966.
5. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 5.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Физматгиз, 1963.
8. Эскин Г. И. Общие краевые задачи для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными. Матем. сб., 1962, т. 59, с. 105—124.
9. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи матем. н., 1964, т. 19, № 3.
10. Булеев Н. И., Петрищев В. С. Численный метод решения уравнений гидродинамики для плоского потока. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 6.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ОБЛАСТИ ПАДЕНИЯ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ НА ЦИЛИНДР, ОБТЕКАЕМЫЙ ПОТОКОМ БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ

М. П. ТЕТЕРИН (Москва)

1. В работе [1] было показано, что силовое воздействие падающего скачка на цилиндр сводится к силовому воздействию низкоэнтропийной струи, которая образуется в результате интерференции падающего скачка уплотнения и отошедшей ударной волны цилиндра. Эта низкоэнтропийная струя, обладая высокими динамическими параметрами, приводит к значительному местному повышению давления на лобовой поверхности цилиндра, в несколько раз превосходящему давление на критической линии цилиндра, обтекаемого невозмущенным потоком. При малой ширине (составляющей от 3 до 5% диаметра цилиндра) этой плоской сверхзвуковой струи следует ожидать интенсивных градиентов скорости в месте растекания этой струи на лобовой поверхности цилиндра, значительно превосходящих градиенты скорости на критической линии цилиндра, обтекаемого невозмущенным потоком.

Одновременное сочетание повышенного давления и градиентов скорости в критической точке C растекания низкоэнтропийной струи позволяет рассматривать эту точку как место максимальных значений теплопередачи на лобовой поверхности.

Для приближенного расчета теплопередачи в критической точке C цилиндра, перед которой в работе [1] были определены основные параметры низкоэнтропийной струи, можно так же, как и для расчета полного давления, воспользоваться струйным подходом.

Тогда течение в области падения скачка на цилиндр можно рассматривать как натекание плоской равномерной низкоэнтропийной струи под некоторым углом α на пластину, не принимая во внимание окружающее струю течение (фиг. 1).

Обозначения на фиг. 1 и ниже соответствуют обозначениям, принятым в [1].

При этом, по аналогии со схемой работы [2], будем предполагать, что линия тока сверхзвуковой низкоэнтропийной струи, попадающая в критическую точку C , проходит через прямой скачок уплотнения γ . Для определения теплопередачи в точке C