

К ТЕОРИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА РАСХОДА ЖИДКОГО МЕТАЛЛА

А. Н. ПАТРАШЕВ, А. Г. РЯБИНИН, А. И. ХОЖАИНОВ

(Ленинград)

Построена теория нестационарного течения жидкого металла в канале МГД регулятора расхода постоянного тока при малых магнитных числах Рейнольдса. Доказана возможность применения квазистационарного приближения для расчета интегральных параметров течения.

Магнитогидродинамические методы, наряду с их применением для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую, в последние годы все более широко используются в ядерной энергетике и металлургии для транспортировки и измерения параметров течения жидких металлов [1, 2].

Полная герметичность, возможность работы в широком диапазоне температур, простота управления и автоматизации — несомненные достоинства всех магнитогидродинамических устройств.

Существующая теория МГД устройств ограничена преимущественно рамками стационарных режимов работы электромагнитных насосов и магнитных расходомеров.

Для МГД регулятора расхода наиболее характерными режимами работы являются переходные режимы, которые главным образом определяются гидродинамикой течения жидкого металла.

Настоящая статья посвящена рассмотрению нестационарного течения жидкого металла в канале МГД регулятора расхода тока с независимым возбуждением. Магнитные числа Рейнольдса принимаются малыми ($R_m = \sigma \mu U_0 b \ll 1$).

Уравнения магнитной гидродинамики в рассматриваемом случае могут быть записаны в виде

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}], \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \}$$

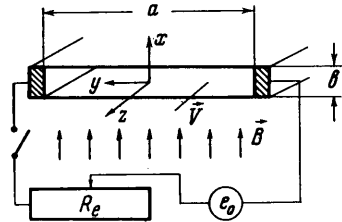
Здесь \mathbf{v} — скорость течения жидкого металла; p — давление; \mathbf{B} , \mathbf{E} — магнитная индукция и напряженность электрического поля; \mathbf{j} — плотность электрического тока; ρ , η , σ , μ — соответственно плотность, динамическая вязкость, проводимость и магнитная проницаемость жидкого металла.

Рассмотрим нестационарное истечение жидкого металла из резервуара через длинный плоский канал при наличии однородного магнитного поля B_0 (фиг. 1). Две стенки канала $x = \pm 1/2 b$ будем считать тонкими и выполненными из металла низкой проводимости. Две другие стенки $x = \pm 1/2 b$ будем считать хорошо проводящими электродами, замкнутыми на внешнюю цепь, содержащую источник э.д.с. и сопротивление R_e .

При этих условиях уравнения (1) сводятся в системе

$$\rho \partial v_z / \partial t = -\partial p / \partial z + \eta \partial^2 v_z / \partial x^2 - j_y B_0, \quad \partial E_y / \partial x = -\partial B_z / \partial t \quad (2)$$

$$j_y = -\mu^{-1} \partial B_z / \partial x, \quad j_y = \sigma (E_y + v_z B_0)$$



Фиг. 1

Интегрируя (2.2) по x и оценивая члены полученного соотношения по порядку величин, будем иметь

$$E_y/U_0B_0 \sim 1 \sim R_m b/TU_0 + f(t)$$

где U_0 и T — характерные величины (скорость течения и время).

При $R_m \ll 1$ и $b/TU_0 \lesssim 1$ можно считать, что E_y не зависит от x и является функцией только времени. Тогда, в соответствии с решением задачи для электрического потенциала на электродах рассматриваемого устройства, напряженность электрического поля в канале регулятора может быть представлена в виде [3, 4]

$$-E_y = UB_0k + E_0k \frac{R_i}{R_e}, \quad \left(U = \frac{1}{b} \int_{-1/2b}^{1/2b} v_z dx, k = \frac{R_e}{R_e + R_i}, R_i = \frac{1}{\sigma} \frac{a}{bl} \right) \quad (3)$$

Здесь R_i — внутреннее электрическое сопротивление регулятора длиной l .

С учетом (3) уравнение количества движения приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P + \frac{Mv}{b}G + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{M^2v}{b^2}kU - \frac{M^2v}{b^2}v, \quad v = v_z(x, t) \quad (4)$$

$$P = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad G = E_0k \frac{R_i}{R_e} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, \quad M = bB_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, \quad v = \frac{\eta}{\rho}$$

с граничными условиями

$$v = 0, \quad x = \pm 1/2b$$

с начальными условиями

$$v = 0 \quad \text{при } t = 0$$

В начальный момент времени изменяются величина E_0 или сопротивление R_e , и жидкий металл приходит в движение.

Будем полагать, что резервуар, из которого вытекает жидкий металл, обладает конечными размерами, так что изменением уровня в нем за счет расхода металла пренебречь нельзя. Давление же за регулятором всегда будем считать равным атмосферному. При этих условиях можно положить

$$P = P_0 - A \int_0^t U dt \quad \left(A = \frac{S^0}{S} \frac{g}{l} \right) \quad (5)$$

Здесь S^0 и S — площади поперечных сечений канала регулятора и резервуара соответственно.

Для решения поставленной задачи применим метод последовательных приближений.

Проинтегрировав (4) по сечению канала, получим следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{dU}{dt} = P_0 - A \int_0^t U dt + \frac{Mv}{b}G + \frac{v}{b} \int_{-1/2b}^{1/2b} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx + \frac{M^2v}{b^2}U(k-1) \quad (6)$$

Будем полагать, что

$$\int_{-1/2b}^{1/2b} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = -\frac{U}{2b}K(\gamma, M, t) \approx -\frac{U}{2b}K(\gamma, M) \quad (7)$$

Здесь параметр $K(\gamma, M)$ соответствует стационарному режиму течения [5].

Тогда уравнение (6) приводится к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = N \frac{dU}{dt} - AU \quad \left(N = -\frac{\nu K(\gamma_2 M)}{2b^2} + \frac{M^2 \nu}{b^2} (k-1) \right) \quad (8)$$

Для решения уравнения (8) зададим следующие условия:

$$U \Big|_{t=0} = 0 \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = P_0 + \frac{M\nu}{b} G \quad (9)$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$U_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\lambda = 1/2 N \pm \sqrt{1/4 N^2 - A}) \quad (10)$$

Из начальных условий следует

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(P_0 + \frac{M\nu}{b} G \right) \quad (11)$$

Из (5) находим

$$P_1(t) = P_0 - A \left\{ \frac{P_0 + MG\nu/b}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - 1) - \frac{1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 t} - 1) \right] \right\} \quad (12)$$

Отметим, что решение первого приближения содержит те же качественные особенности, что и решение, полученное для дозаторов индукционного типа [6]. Выражение (12) может быть использовано для построения второго приближения. Для решения уравнения (4) воспользуемся преобразованием Лапласа; введем изображения

$$V = \int_0^{\infty} \nu e^{-qt} dt, \quad \Pi = \int_0^{\infty} P e^{-qt} dt, \quad W = \int_0^{\infty} U e^{-qt} dt \quad (13)$$

Тогда из уравнения (4) получим

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{(q + \alpha)V}{\nu} = -\frac{D(q)}{\nu} \quad \left(\alpha = \frac{M^2 \nu}{b^2}, D(q) = \Pi + \frac{M\nu G}{qb} + \alpha kW \right) \quad (14)$$

Граничными условиями для уравнения (14) будут

$$V = 0, \quad x = \pm 1/2 b \quad (15)$$

Решением уравнения (14) будет функция

$$V(x, q) = c_1 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x + c_2 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x + \frac{D(q)}{\nu \beta} \quad \left(\beta = \frac{q + \alpha}{\nu} \right) \quad (16)$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий

$$c_2 = 0, \quad c_1 = -\frac{D(q)}{\nu \beta \operatorname{ch} 1/2 \sqrt{\beta} b} \quad (17)$$

После чего решение (16) принимает вид

$$V(x, q) = \frac{D(q)}{\nu \beta} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\beta} x}{\operatorname{ch} 1/2 \sqrt{\beta} b} \right) \quad (18)$$

Для исключения из решения $W(q)$ воспользуемся соотношением

$$W(q) = \frac{1}{b} \int_{-1/2 b}^{1/2 b} V(x, q) dx \quad (19)$$

В результате окончательно получим

$$V(x, q) = \left[\Pi(q) + \frac{1}{q} \frac{Mv}{b} G \right] \frac{b \sqrt{\beta} \theta(x, \beta)}{\Theta(b, \beta)} \quad (20)$$

$$\theta(x, \beta) = \operatorname{ch}^{1/2} \sqrt{\beta} b - \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x,$$

$$\Theta(b, \beta) = v\beta b \sqrt{\beta} \operatorname{ch}^{1/2} \sqrt{\beta} b - \alpha k (b \sqrt{\beta} \operatorname{ch}^{1/2} \sqrt{\beta} b - 2 \operatorname{sh}^{1/2} \sqrt{\beta} b) \quad (21)$$

Теорема обращения Римана-Меллина дает

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left[\Pi(q) + \frac{1}{q} \frac{Mv}{b} G \right] \frac{b \sqrt{\beta} \theta(x, \beta)}{\Theta(b, \beta)} e^{qt} dq$$

Отсюда, используя теорему о свертке, имеем

$$v(x, t) = \int_0^t \left[P(t-\tau) + \frac{Mv}{b} G \right] \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{b \sqrt{\beta} \theta(x, \beta)}{\Theta(b, \beta)} e^{q\tau} dq d\tau \quad (22)$$

Внутренний интеграл берется при помощи теоремы вычетов в точках, являющихся корнями трансцендентного уравнения

$$\beta_n = \frac{M^2 k}{b^2} \left(1 - \frac{2 \operatorname{th}^{1/2} b \sqrt{\beta}_n}{\sqrt{\beta}_n b} \right) \quad \left(\beta_n = \frac{q_n + \alpha}{v} \right) \quad (23)$$

Окончательное решение принимает вид

$$v(x, t) = 2 \int_0^t \left[P(t-\tau) + \frac{Mv}{b} G \right] e^{-\alpha\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(x, \beta_n) \exp(v\beta_n\tau)}{\operatorname{ch}^{1/2} \sqrt{\beta}_n b \Theta(\beta_n)} d\tau \quad (24)$$

С учетом (12) получаем

$$v_1(x, t) = \frac{2A(P_0 + MGv/b)}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(x, \beta_n)}{\operatorname{ch}^{1/2} \sqrt{\beta}_n b \Theta(\beta_n)} \Lambda(t, \beta_n) \quad (25)$$

Здесь

$$\Theta(\beta_n) = 3 - \frac{M^2 k}{4} \left(\frac{b^2 \beta_n}{M^2 k} - 1 \right)^2 \quad (26)$$

$$\Lambda(t, \beta_n) = \frac{\exp(v\beta_n - \alpha)t - \exp \lambda_2 t}{\lambda_2 (v\beta_n - \alpha - \lambda_2)} - \frac{\exp(v\beta_n - \alpha)t - \exp \lambda_1 t}{\lambda_1 (v\beta_n - \alpha - \lambda_1)}$$

Решение (25) может быть использовано для расчета развития профиля скорости во времени и изменения потерь на вязкое трение.

Второе приближение для интегральных параметров течения имеет вид

$$U_2 = \frac{2A(P_0 + MGv/b)}{M^2 k (\lambda_1 - \lambda_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^2 \beta_n \Lambda(t, \beta_n)}{\Theta(\beta_n)} \quad P_2 = P_0 - \frac{2A^2(P_0 + MGv/b)}{M^2 k (\lambda_1 - \lambda_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n b^2 Q_n}{\Theta(\beta_n)} \quad (27)$$

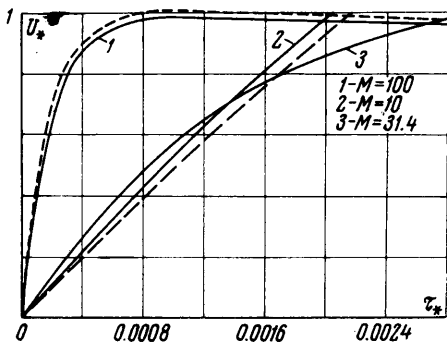
$$Q_n = \frac{1}{\lambda_2 (v\beta_n - \alpha - \lambda_2)} \left[\frac{\exp(v\beta_n - \alpha)t - 1}{v\beta_n - \alpha} - \frac{\exp \lambda_2 t - 1}{\lambda_2} \right] -$$

$$- \left[\frac{\exp(v\beta_n - \alpha)t - 1}{v\beta_n - \alpha} - \frac{\exp \lambda_1 t - 1}{\lambda_1} \right] \frac{1}{\lambda_1 (v\beta_n - \alpha - \lambda_1)}$$

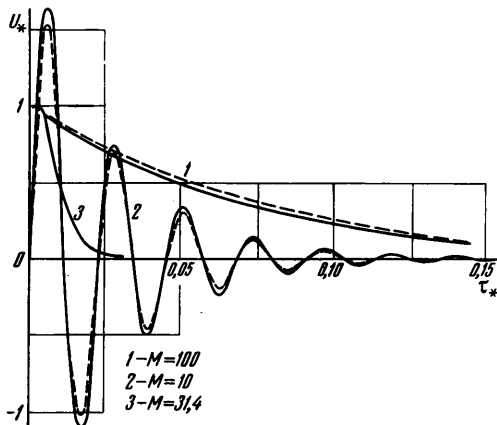
Путем подстановки (27) в (24) было получено третье приближение для интегральных параметров течения.

Сопоставление данных расчета по второму и третьему приближениям показало, что разница между ними уже незначительна.

На фиг. 2 и 3 приведены кривые, характеризующие изменение относительной скорости течения $U_* = U(\lambda_1 - \lambda_2)(P_0 + MvG/b)^{-1}$ в функции от безразмерного вре-



Фиг. 2



Фиг. 3

мени $\tau_* = vt/b^2$. Сплошные линии на фигурах соответствуют первому приближению, штриховые — второму.

Расчеты были выполнены применительно к случаю течения ртути в канале МГД регулятора при 20°C . Было также принято $A = 0.1 \text{ сек}^{-2}$, $b = 0.01 \text{ м}$, $k = 0.5$.

Из приведенных графиков следует, что решение, построенное в первом приближении, дает удовлетворительное описание рассматриваемых процессов. Это позволяет сделать важный вывод о возможности использования в данном случае квазистационарного приближения в учете трения для расчета изменений во времени интегральных параметров течения.

Анализ приведенных кривых показывает, что при больших числах M характер нестационарного течения жидкого металла в канале МГД регулятора расхода будет апериодическим. При малых числах M переходный магнитогидродинамический процесс может быть колебательным. При этом существует критическое значение числа M_* , характеризующее границу между апериодическим и колебательным процессами. Для принятых исходных данных величина M_* составила 31.4.

Поступило 22 VII 66

ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы магнитной гидродинамики, т. 3. Изд. АН Латв. ССР, 1963.
2. Техническая электромагнитная гидродинамика. Донецк. н.-и. ин-т черной металлургии, Изд. «Металлургия», 1965, № 2.
3. Holdaway H. W. A note electromagnetic flowmeters of rectangular cross section. Helv. Phys. Acta, 1957, vol. 30, No. 1.
4. Ригерер С. А. О влиянии пограничного слоя на распределение тока при течении проводящей жидкости по каналу. Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики», т. 3, Изд. АН Латв. ССР, 1963.
5. Рябинин А. Г., Хожайнов А. И. Турбулентное течение электропроводящей жидкости в трубах прямоугольного сечения под действием электродинамических поперечных сил. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 1.
6. Кирко И. М., Лиелпетер Я. Я. Дозирование жидкого металла при помощи электромагнитных индукционных насосов. Прикладная магнитогидродинамика. Тр. Ин-та физики АН Латв. ССР, 1961, № 12.