

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА КАТАЛИТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В НЕРАВНОВЕСНО ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

Ю. В. ЛАПИН

(Ленинград)

Большинство работ, в которых рассматривается течение диссоциированного газа в турбулентном пограничном слое, посвящено исследованию либо замороженных, либо равновесных течений на плоской пластине.

Замороженный турбулентный пограничный слой рассматривался в работах Дорренса [1], С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьева [2], Ю. В. Лапина и Г. П. Сергеева [3].

Учет влияния процессов каталитической рекомбинации на поверхности пластины на теплообмен в замороженном турбулентном пограничном слое был произведен в работе Ю. В. Лапина [4].

Исследованию турбулентного пограничного слоя на пластине в равновесно диссоциирующем газе были посвящены работы С. И. Костерина и Ю. А. Кошмарова [5], И. П. Гинзбурга [6], Дорренса [7], Ю. В. Лапина [8].

Расчет теплоотдачи в турбулентном пограничном слое на каталитической поверхности пластины при наличии неравновесной диссоциации был проведен Кульгейном [9]. В этой работе неравновесность процесса диссоциации учитывалась лишь в ламинарном подслое, а в турбулентном ядре течение считалось замороженным. Решение находилось численным методом на цифровой вычислительной машине посредством трудоемкого итерационного процесса.

В настоящей работе излагается метод расчета турбулентного пограничного слоя на плоской каталитической пластине при произвольной скорости диссоциации. Метод, построенный при обычных для теории турбулентного пограничного слоя допущениях, представляет собой метод последовательных приближений. Хорошая сходимость метода обуславливается тем обстоятельством, что учет влияния неравновесности процесса диссоциации на распределение параметров в пограничном слое и, следовательно, на трение и теплообмен может быть сведен к нахождению поправок, обычно относительно небольших, к распределению этих параметров в равновесном или замороженном течениях. В основу исследования положена двухслойная схема турбулентного пограничного слоя. Числа Прандтля и Шмидта, а также их турбулентные аналоги принимаются равными единице. В качестве модели диссоциирующего газа используется модель идеально диссоциирующего газа Лайтхилла [10], распространенная Фрименом [11] на неравновесные течения.

1. Свойства диссоциирующего газа. Химическая кинетика приводит к следующему выражению для массовой скорости образования атомарной компоненты w_1 при диссоциации двухатомной молекулы

$$w_1 = \rho^2 [k_r (1 + z) \rho_d m_1^{-2}] [(1 - z) \exp(-T_d/T) - (\rho/\rho_d) z^2] \quad (1.1)$$

Здесь ρ и T — соответственно плотность и абсолютная температура газа, z — массовая концентрация атомов в смеси, m_1 — атомный вес, ρ_d и T_d — соответственно характеристическая плотность и характеристическая температура газа [10], k_r — константа скорости рекомбинации. Индексами 1 и 2 обозначены соответственно величины, относящиеся к атомарной и молекулярной компонентам смеси.

В общем случае характеристическая плотность — переменная величина, зависящая от температуры, однако для таких газов, как азот и кислород, в широком температурном интервале (1000—7000° K) это изменение мало. Это обстоятельство позволило Лайтхиллу [10] «идеализировать» свойства диссоциирующего газа путем принятия допущения о постоянстве

ρ_d или, что то же, — о постоянном возбуждении молекул по колебательным степеням свободы на половину их классической колебательной энергии. Это допущение приводит к тому, что число степеней свободы молекул (шесть) оказывается вдвое большим числа степеней свободы атомов (три), вследствие чего теплоемкости при постоянном объеме молекул и атомов на единицу массы оказываются одинаковыми $c_{v1} = c_{v2}$, а отношение удельных теплоемкостей для такого газа до начала диссоциации равняется 1,33, а не 1,4, как у реальных газов.

Уравнение состояния идеально диссоциирующего газа имеет вид

$$p = \rho RT(1 + z) \quad (R = R_0/m_2) \quad (1.2)$$

Здесь p — давление газа, R — газовая постоянная единицы массы молекулы, R_0 — универсальная газовая постоянная, m_2 — молекулярный вес.

Величина полной энтальпии H идеально диссоциирующего газа

$$H = RT(4 + z) + Dz + \frac{1}{2}u^2 \quad (D = RT_d) \quad (1.3)$$

Здесь u — составляющая скорости в пограничном слое вдоль пластины, D — энергия диссоциации на единицу массы молекул.

2. Основные уравнения и граничные условия. В предположении, что числа Прандтля и Шмидта и их турбулентные аналоги равны единице, дифференциальные уравнения количества движения, энергии и диффузии атомарной компоненты осредненного стационарного движения реагирующей смеси в турбулентном пограничном слое на пластине имеют вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \epsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \epsilon) \frac{\partial H}{\partial y} \right] \quad (2.2)$$

$$\rho u \frac{\partial z}{\partial x} + \rho v \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \epsilon) \frac{\partial z}{\partial y} \right] + w_1 \quad (2.3)$$

Здесь x , y и u , v — координаты и скорости вдоль пластины и по нормали к ней соответственно, μ , ϵ — коэффициенты динамической и турбулентной вязкости. Граничные условия запишем в виде

$$u = v = 0, \quad H = H_w, \quad \rho_w D_{12} (\partial z / \partial y)_w = k_w (z_w \rho_w)^n \quad \text{при } y = 0 \quad (2.4)$$

$$u \rightarrow U_\infty, \quad H \rightarrow H_\infty, \quad z \rightarrow z_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty$$

Здесь k_w — постоянная скорости каталитической реакции, n — порядок реакции, D_{12} — коэффициент бинарной диффузии.

Условие для концентрации на стенке учитывает влияние каталитических свойств стенки на процесс рекомбинации атомов; $(\partial z / \partial y)_w = 0$ при $k_w = 0$, что соответствует химически изолированной (абсолютно некаталитической) поверхности; $z_w \rightarrow 0$ при $k_w \rightarrow \infty$, что соответствует абсолютной каталитической стенке.

Газовый поток вне пограничного слоя будем считать находящимся в состоянии равновесной диссоциации.

3. Связь между профилями скорости, полной энтальпии и концентраций. Из уравнений (2.1) и (2.2) и граничных условий (2.4) следует подобие профилей скорости и полной энтальпии в пограничном слое

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{H - H_w}{H_\infty - H_w} \quad (3.1)$$

Подставляя в (3.1) вместо полной энтальпии H ее выражение из равенства (1.3), получим после несложных преобразований связь профиля температур с профилем скорости и концентрации

$$T/T_d = [\bar{H}_w + (\bar{H}_\infty - \bar{H}_w)\bar{u} - \gamma\bar{u}^2 - z]/(4 + z) \quad (3.2)$$

$$\bar{u} = u/U_\infty, \quad \gamma = U_\infty^2/2D$$

$$\bar{H}_w = H_w/D = z_w + (4 + z_w)(T_w/T_d) \quad (3.3)$$

$$\bar{H}_\infty = H_\infty/D = z_\infty + (4 + z_\infty)(T_\infty/T_d)$$

Далее обратимся к уравнению диффузии (2.3). Переходя в этом уравнении от переменных x, y к переменным Крокко x, u [12], будем иметь

$$\rho u \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\tau^2}{\mu + \varepsilon} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + w_1 \quad (\tau = (\mu + \varepsilon)(\partial u / \partial y)) \quad (3.4)$$

Здесь τ — напряжение трения в пограничном слое.

Для дальнейших упрощений будем считать движение «квазиустановившимся», т. е. таким, при котором профили концентрации в каждом сечении зависят только от скорости ($\partial z / \partial x = 0$); в этом случае получим

$$\frac{d^2 z}{du^2} = -\frac{\mu + \varepsilon}{\tau^2} w_1 \quad (3.5)$$

Проинтегрируем уравнение (3.5) дважды, определяя константы интегрирования из условий на стенке, тогда будем иметь

$$z = z_w + \left(\frac{dz}{du}\right)_w u - \int_0^u du \int_0^u \frac{\mu + \varepsilon}{\tau^2} w_1 du \quad (3.6)$$

Принимая во внимание принятое допущение о равенстве числа Шмидта единице ($S = \mu_w / \rho_w D_{12} = 1$) и учитывая на каталитической стенке лишь реакции первого порядка ($n = 1$), что справедливо при не слишком высоких температурах стенки, приведем граничное условие для концентрации на стенке (2.4) к виду

$$\tau_w (dz/du)_w = k_w z_w \rho_w \quad (3.7)$$

Используя условие на внешней границе ($z = z_\infty$ при $u = U_\infty$) и равенство (3.7), находим соотношение для определения концентрации атомов на стенке при наличии процессов каталитической абсорбции

$$z_w = \left[z_\infty + \int_0^{U_\infty} du \int_0^u \frac{\mu + \varepsilon}{\tau^2} w_1 du \right] \left[1 + \frac{k_w \rho_w U_\infty}{\tau_w} \right]^{-1} \quad (3.8)$$

Для дальнейшего более удобно записать равенство (3.6) в следующей форме, которая легко получается, если использовать условия на внешней границе пограничного слоя

$$z = z_w + [z_\infty - z_w + J(1)]\bar{u} - J(\bar{u}), \quad (3.9)$$

где

$$J(\bar{u}) = U_\infty^2 \int_0^{\bar{u}} d\bar{u} \int_0^{\bar{u}} \frac{\mu + \varepsilon}{\tau^2} w_1 d\bar{u} \quad (3.10)$$

Таким образом, учет влияния неравновесности процесса диссоциации на распределение концентрации в пограничном слое сводится к необхо-

димости вычисления величины $J(\bar{u})$. В частном случае замороженного течения в пограничном слое ($w_1 = 0$) $J(\bar{u}) = 0$, и распределение концентрации атомов дается выражением

$$z = z_w + (z_\infty - z_w) \bar{u} \quad (3.11)$$

Переходя к определению величины $J(\bar{u})$, запишем ее в виде

$$J(\bar{u}) = U_\infty^2 \int_0^{\bar{u}} d\bar{u} \int_0^{\bar{u}} \frac{w_1 d\bar{u}}{\tau (\partial u / \partial y)} \quad (3.12)$$

Введем универсальные координаты

$$\varphi = u/v_*, \quad \eta = yv_*/v_w, \quad v_* = \sqrt{\tau_w/\rho_w}, \quad v_w = \mu_w/\rho_w \quad (3.13)$$

Получим

$$J(\bar{u}) = \xi^2 v_w \int_0^{\bar{u}} d\bar{u} \int_0^{\bar{u}} (w_1/\tau) \eta d\bar{u} \quad \left(\xi = \frac{U_\infty}{v_*}, \eta = \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) \quad (3.14)$$

В рамках принятой в настоящем исследовании двухслойной схемы турбулентного пограничного слоя необходимо определить зависимость $\eta = \eta(\bar{u})$ в вязком подслое и турбулентном ядре.

Приняв упрощающее допущение о постоянстве напряжения трения поперек пограничного слоя

$$\tau = \text{const} = \tau_w \quad (3.15)$$

и, полагая одновременно, что в вязком подслое определяющей температурой будет температура стенки, можно показать [13], что в подслое профиль скорости имеет вид $\varphi = \eta$ и, следовательно,

$$\eta = 1 \quad \text{при } 0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\tau \quad (3.16)$$

При тех же допущениях можно найти [13], что безразмерная скорость на границе вязкого подслоя и турбулентного ядра

$$U = \alpha/\xi \quad (\alpha = 11.5) \quad (3.17)$$

Здесь α — эмпирическая константа турбулентности.

Используя формулу Кармана для турбулентного напряжения трения

$$\tau = \rho \kappa^2 (\partial u / \partial y)^4 / (\partial^2 u / \partial y^2)^2 \quad (3.18)$$

и допущение (3.15), можно показать [13], что в турбулентном ядре

$$\eta = \frac{1}{f} \exp \left[\kappa \xi \int_{\bar{u}}^{\bar{u}_\tau} (\rho/\rho_w)^{1/2} d\bar{u} \right] \quad \left(U \leq \bar{u} \leq 1, \quad f = \frac{1}{\kappa \alpha} \right) \quad (3.19)$$

Здесь $\kappa = 0.4$ — вторая константа турбулентности.

Возвращаясь к равенству (3.14), подставим в него выражение (1.1) для скорости диссоциации w_1 , тогда после несложных преобразований получим

$$J(\bar{u}) = C_r \frac{\xi^4}{\text{Re}_w} \frac{\rho_w}{\rho_d} \int_0^{\bar{u}} d\bar{u} \int_0^{\bar{u}} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^3 (1+z) \left(\frac{\rho_d}{\rho} (1-z) \exp \frac{-T_d}{T} - z^2 \right) \eta d\bar{u} \quad (3.20)$$

$$\left(C_r = \frac{x/U_\infty}{m_1^2/k_r \rho_d \rho_w}, \quad \text{Re}_w = \frac{U_\infty \rho_w x}{\mu_w} \right)$$

Величина x / U_∞ приблизительно равна времени, в течение которого частица продвинется на расстояние x от передней кромки пластины. Величина $m_1^2 / k_r \rho_d \rho_w$ пропорциональна времени жизни атома. Поэтому коэффициент C_r , представляющий отношение этих двух характерных времен, можно назвать параметром рекомбинации. Если этот коэффициент велик, течение будет равновесным, если мал — замороженным.

В некоторых случаях при вычислении величины $J(\bar{u})$ удобнее пользоваться выражением для скорости диссоциации w_1 , записанным через равновесные концентрации атомов [14]

$$w_1 = 1/2 k_r \rho^3 m_1^{-2} (1 + z) \frac{z_e^2 - z^2}{1 - z_e^2} \quad (3.21)$$

где z_e — равновесная концентрация атомов, определяемая равенством

$$\frac{z_e^2}{1 - z_e^2} = \frac{\rho_d}{\rho} \exp\left(-\frac{T_d}{T}\right) \quad (3.22)$$

В этом случае величина $J(\bar{u})$ может быть вычислена по формуле

$$J(\bar{u}) = 1/2 C_r \frac{\zeta^4}{Re_w} \frac{\rho_w}{\rho_d} \int_0^{\bar{u}} d\bar{u} \int_0^{\bar{u}} \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^3 (1 + z) \frac{z_e^2 - z^2}{1 - z_e^2} \dot{\eta} d\bar{u} \quad (3.23)$$

4. Расчет трения. Для расчета трения можно воспользоваться методом, изложенным в работе [8]. Согласно этому методу, коэффициент трения c_f выражается равенством

$$\frac{c_f}{c_{f_0}} = \left(\frac{FK}{2N}\right)^2 \quad \left(F = 0.242 c_{f_0}^{-1/2}, K = \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{1/2} d\bar{u}\right) \quad (4.1)$$

Здесь c_{f_0} — местный коэффициент трения на пластине, обтекаемой несжимаемой изотермической жидкостью. Этот коэффициент может быть вычислен либо по известной формуле Кармана

$$0.242/\sqrt{c_{f_0}} = 0.41 + \lg(Re_\infty c_{f_0}) \quad (4.2)$$

либо по более простой степенной формуле

$$c_{f_0} = 0.0263 Re_\infty^{-1/7} \quad (Re_\infty = U_\infty \rho_\infty x / \mu_\infty) \quad (4.3)$$

Величина N определяется из решения уравнения

$$N + \lg N = \lg(1/2 FK) + 1/2(F + G) \quad \left(G = \lg \frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right) \quad (4.4)$$

Вместо уравнения (4.4) можно использовать следующее приближенное выражение для N :

$$N = 0.25 + 1.64 [\lg(1/2 FK) + 1/2(F + G)] \quad (4.5)$$

5. Порядок и пример расчета. Порядок расчета по предлагаемому методу, являющемуся по существу методом последовательных приближений, сводится к следующему.

Предварительно рассчитываются параметры пограничного слоя $z(u)$, $T(u)$, $\rho(u)$, c_f , ζ замороженного [4] и равновесного течений [8].

В качестве нулевого приближения можно принять либо параметры замороженного течения (отмеченные индексом f), либо параметры, получаю-

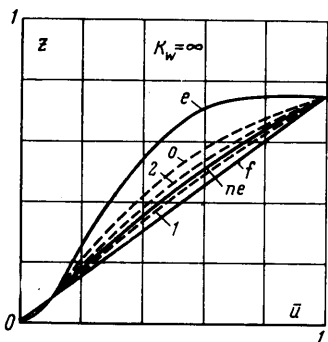
щиеся как среднее арифметическое параметров замороженного и равновесного течений, т. е. $a^{(0)} = 1/2(a_f + a_e)$ (последнее обычно предпочтительнее).

По формулам (3.9), (3.10) и (3.20) (или (3.23)) определяется зависимость концентрации от скорости в первом приближении $z^{(1)}(\bar{u})$. Далее, по формуле (3.2) определяется распределение температуры в пограничном слое $\bar{T}^{(1)}(\bar{u})$, а затем по известным $z^{(1)}$ и $\bar{T}^{(1)}$ и формуле

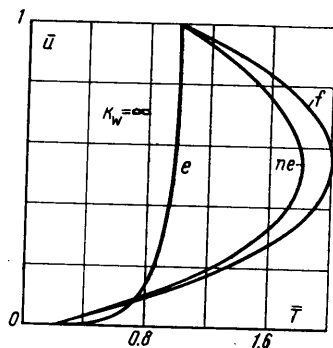
$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T} \frac{1 + z_\infty}{1 + z}$$

рассчитывается распределение плотности $\bar{\rho}^{(1)}(\bar{u})$.

По известному распределению плотности определяются коэффициент трения $c_f^{(1)}$ (п. 4), параметр $\zeta^{(1)}$ (3.14) и параметр $\eta^{(1)}$ (3.19) и т. д.



Фиг. 1



Фиг. 2

Следует заметить, что сходимость метода может быть значительно ускорена, если в качестве второго приближения принять полусумму нулевого и первого приближений, т. е. $a^{(2)} = 1/2(a^{(0)} + a^{(1)})$.

Рассчитанное на основе таким образом составленного $a^{(2)}$ третье приближение оказывается вполне удовлетворительным, и надобность в дальнейших приближениях практически отпадает.

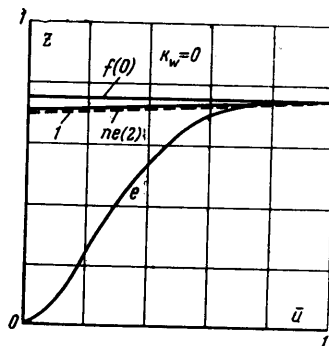
Для иллюстрации предложенного метода был проведен расчет турбулентного пограничного слоя на заостренном клине с углом полураствора 30° , обтекаемом потоком со скоростью $U_\infty = 7$ км/сек на высоте, соответствующей давлению $2.85 \cdot 10^{-4}$ атм и температуре $T_\infty = 220^\circ$ К. Температура стенки принималась равной $T_w = 720^\circ$ К.

В соответствии с данными Лайтхилла [10], было принято: $\rho_d = 130$ г/см³, $T_d = 59\,000^\circ$ К, $D = 3660$ кал/г.

Для константы скорости рекомбинации k_r было принято $k_r = 8.4 \cdot 10^{14}$ см⁶/моль² сек, что соответствует значению этой константы, определенному экспериментально Мэтьюзом [15], при $T = 3500^\circ$ К, т. е. зависимость k_r от температуры не учитывалась.

Результаты расчета профилей концентрации и температуры в пограничном слое на абсолютно каталитической стенке ($k_w \rightarrow \infty$) представлены соответственно на фиг. 1 и 2.

На фиг. 3 изображен профиль концентраций на химически изолированной стенке ($k_w = 0$). При проведении расчета для этого случая в качестве



Фиг. 3

нулевого приближения было принято распределение концентрации в замороженном течении $z^{(0)} = z_f$. Как видно из фиг. 3, учет неравновесности диссоциации привел в рассматриваемом случае к сравнительно незначительному изменению профиля концентрации, по сравнению с z_f .

Отметим, что на всех фигурах буквы e , f , ne обозначают кривые, относящиеся соответственно к равновесному, замороженному и неравновесному течениям. Цифры на фигурах обозначают номера приближений.

Поступило 17 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Dorrance W. H. Dissociation effects upon compressible turbulent boundary layer skin friction and heat transfer. *ARS Journ.*, 1961, vol. 31, No. 1, p. 61—71. (русск. перев.: *Вопр. ракетн. техн. Сб. перев. и обз. ин. период. лит.*, 1961, № 12).
2. Сб. «Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое» (под ред. С. С. Кутателадзе), СО АН СССР, 1964.
3. Лапин Ю. В., Сергеев Г. П. Влияние диссоциации на трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое. *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*, 1964, вып. 230, стр. 98—107.
4. Лапин Ю. В. Влияние каталитической рекомбинации на теплопередачу в замороженном турбулентном пограничном слое. *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*, 1965, вып. 248, стр. 82—87.
5. Kosterin S. I., Koshmarov Yu. A. Turbulent boundary layer on a flat plate in a stream of dissociating gas. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 1960, vol. 1, p. 46—49, Pergamon Press.
6. Гинзбург И. П. Турбулентный пограничный слой в сжимаемой жидкости (смеси газов). *Вестн. Ленингр. ун-та*, 1961, № 1, стр. 75—88.
7. Дорренс У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. Изд. «Мир», 1966.
8. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в диссоциирующем газе. *Ж. техн. физ.*, 1962, т. 32, № 4, стр. 473—479.
9. Kulgein N. G. Heat transfer from a nonequilibrium turbulent boundary layer to catalytic surfaces. *AIAA J.*, 1965, vol. 3, No. 2. (русск. перев.: *Ракетн. техн. и космонавт.*, 1965, № 2, стр. 27—35).
10. Lighthill M. J. Dynamics of the dissociating gas. Part I. Equilibrium Flow. *J. Fluid Mech.*, 1957, vol. 2, No. 1, p. 1—32 (русск. перев.: *Вопр. ракетн. техн. Сб. перев. и обз. ин. период. лит.*, 1957, № 5, 6).
11. Freeman N. C. Non — equilibrium flow of an ideal dissociating gas. *J. Fluid Mech.*, 1958, vol. 4, No. 4, p. 407—425 (русск. перев.: *Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит.*, 1959, № 3 (59)).
12. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
13. Лойцянский Л. Г., Лапин Ю. В. Применение метода Кармана к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине в газовом потоке. *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*, 1961, № 217.
14. Fay J. A., Riddell F. R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air. *J. Aero. Sci.*, 1958, vol. 25, No. 2, p. 73—85 (русск. перев.: Сб. «Проблемы движения головной части ракет дальнего действия». Изд. иностр. лит., 1959, стр. 217—256).
15. Matthews D. L. Interferometric measurement in the Schock Tube of the dissociation rate of oxygen. *Phys. Fluids*, 1959, vol. 2, No. 2, p. 170.