

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

А. С. БОРИСОВ, В. С. ГАЛКИН

(Москва)

В работе [1] дано обобщение условий существования однородных течений смеси разреженных одноатомных газов [2, 3] на случай наличия внешних сил. Ниже для этого случая получено решение задачи Коши для уравнения Больцмана в «свободномолекулярных» (бесстолкновительных) условиях, когда интегралами столкновений можно пренебречь (число Кнудсена  $K \gg 1$ ). На основе этого решения построено общее решение уравнений кинетических моментов смеси максвелловских одноатомных газов в виде ряда по обратным степеням  $K$ . Сделаны некоторые дополнительные замечания о свойствах решений уравнений кинетических моментов второго порядка, о применимости уравнений 13 моментов Грэда и метода Чепмена — Энскога (в частности, для расчета медленных («стоксовских») движений смеси газов).

1. В случае однородных течений [1, 2] моменты функции распределения зависят лишь от времени  $t$ , а массовая скорость смеси, кроме того, — линейно от координат; функция распределения компоненты  $\alpha$  смеси  $f_\alpha = f_\alpha(t, C_\alpha)$  не зависит непосредственно от декартовых координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Здесь  $C_\alpha = \xi_\alpha - u$ ,  $\xi_\alpha$  — абсолютная скорость молекулы, компонента массовой скорости

$$\begin{aligned} u_i &= \psi_{ij}(t)x_j + \varphi_i(t), & \psi_{ij} &= \Delta_{ij}/\Delta, \quad \psi_{ij}(0) = a_{ij} \\ \Delta &= |\delta_{mn} + ta_{mn}| = |a_{mn}|t^3 + b_{rr}t^2/2 + a_{rr}t + 1 & (1.1) \\ \Delta_{ij} &= \delta_{ij}|a_{mn}|t^2 + b_{ijt} + a_{ij}, & b_{ij} &= a_{rr}a_{ij} - a_{ir}a_{rj} \end{aligned}$$

Здесь и ниже используются тензорные обозначения, предполагается суммирование по повторяющимся индексам,  $\delta_{ij}$  — единичный тензор,  $|a_{mn}|$  — определитель третьего порядка. Массовая плотность

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(0)/\Delta, \quad \Delta > 0 \quad (1.2)$$

В общем случае, когда  $|a_{mn}| > 0$ , при больших  $t$

$$\psi_{ij} = t^{-1} \quad (i = j), \quad \psi_{ij} \sim t^{-2} \quad (i \neq j) \quad (1.3)$$

В простейшем случае внешние силы  $F_{\alpha i}$ , отнесенные к массе молекулы  $m_\alpha$ , зависят только от  $t$  и удовлетворяют соотношению

$$\varphi_i' + \varphi_j \psi_{ij} - F_{\alpha i} = \eta_{\alpha i}(t), \quad \eta_{\alpha i} = \sum_\gamma \frac{\rho_\gamma}{\rho} (F_{\gamma i} - F_{\alpha i}) \quad (1.4)$$

Здесь  $\gamma$  — любая другая компонента смеси.

Одной из основных особенностей однородных течений является то, что в случае максвелловских молекул бесконечная система уравнений моментов функции распределения<sup>1</sup>, описывающая эти течения, распадается на цепочку последовательно решаемых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого по-

<sup>1</sup> Эта система приведена в работе [1] с опечаткой: перед последними членами левых частей уравнений (1.1), (1.11) должен стоять знак плюс (а не минус); замечание на стр. 46 о том, что в свободномолекулярных условиях молекулы газа движутся по инерции, относится к случаю  $F_{\alpha i} = 0$ .

рядка с переменными коэффициентами. В результате удается найти моменты функции распределения, не зная самой этой функции, что позволяет проводить сравнение различных методов решения уравнения Больцмана. Это сравнение облегчается тем, что задача об однородных течениях — суть задача с начальными данными, а не краевая задача с условиями на твердых стенках.

Однако, как показано в ряде работ А. А. Никольского [2], при анализе свойств однородных течений иногда эффективнее пользоваться не уравнениями моментов, а непосредственно уравнением Больцмана для  $f_\alpha(t, C_\alpha)$ . Уравнение Больцмана эффективнее использовать, например, в рассмотренном ниже «свободномолекулярном» случае. Полученное для него решение задачи Коши для уравнения Больцмана имеет не только самостоятельный интерес (построение теории однородных течений). При помощи этого решения легко находятся выражения для моментов любого порядка, с использованием которых можно получить общее решение уравнений моментов смеси максвелловских газов путем их разложения в ряды по обратным степеням  $K$  относительно свободномолекулярного решения.

Уравнение Больцмана для однородных свободномолекулярных течений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \eta_{\alpha i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} - \psi_{ij} C_{\alpha j} \frac{\partial f_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} = 0 \quad (1.5)$$

Так как при заданных  $\eta_{\alpha i}$  движение каждой компоненты газа не зависит от движения других компонент, то ниже индекс  $\alpha$  будет опущен.

Необходимо найти решение уравнения (1.5) при условии

$$f(0, C_1, C_2, C_3) = \Phi(C_1, C_2, C_3) \quad (1.6)$$

При  $\eta_i = 0$  анализ системы уравнений характеристик однородного линейного уравнения в частных производных (1.5) с использованием метода Лапбо — Данилевского (этот анализ для краткости изложения опускаем) показывает, что частные интегралы уравнения (1.5) нужно искать в виде линейных комбинаций из  $C_i$  с коэффициентами — степенными функциями  $t$ . Анализ простейших решений и структуры уравнения (1.5) показывает, что при  $\eta_i \neq 0$  функцию распределения можно искать в виде

$$f = \Phi(g_1, g_2, g_3), \quad g_i = h_{ij}(t)C_j + \int_0^t h_{ij}\eta_j dt, \quad h_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в уравнение (1.5), приравнявая нулю коэффициенты при частных производных от  $\Phi$  и при различных степенях  $t$ , окончательно получим

$$g_i = (\delta_{ij} + a_{ijt})C_j + H_i(t), \quad H_i = \int_0^t (\delta_{ij} + a_{ijt})\eta_j dt \quad (1.8)$$

Якобиан

$$\frac{D(g_1, g_2, g_3)}{D(C_1, C_2, C_3)} = \Delta \neq 0 \quad (1.9)$$

Следовательно, с учетом (1.2) функции  $g_i$  независимы, и решение (1.7), (1.8) будет решением поставленной задачи. Собственные скорости выражаются через  $g_i$  по формулам

$$C_i = \Delta^{-1}(A_{ij}g_j - \Delta_i) \quad (1.10)$$

Здесь определитель  $\Delta_i$  получается из определителя  $\Delta$  заменой его  $i$ -го столбца на столбец из элементов  $H_j$ ,  $A_{ij}$  — алгебраические дополнения элементов  $i$ -го столбца определителя.

Используя формулы (1.7) — (1.10), получим, например, следующее выражение для моментов второго порядка:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij} = m \int C_i C_j f dC = \Delta^{-3} \tau_{mn}(0) A_{im} A_{jn} + \\ + \Delta^{-3} \rho(0) [\Delta_i \Delta_j - U_m(0) A_{im} \Delta_j - U_n(0) A_{jn} \Delta_i] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $p$  — скалярное давление,  $p_{ij}$  — напряжения,  $U$  — диффузионная скорость [1]. Аналогично находятся выражения для моментов других порядков, которые, естественно, будут также решением соответствующих систем уравнений кинетических моментов без правых частей.

Используя эти решения в качестве нулевого приближения, будем искать решение уравнений моментов при конечных  $K$  (с учетом их правых частей) путем их разложения в степенные ряды по малому параметру

$$\alpha_0 = p(0)/\mu(0) \sim 1/K \quad (1.12)$$

являющемуся коэффициентом при правых частях уравнений моментов ( $\mu$  — коэффициент вязкости).

В случае однородных течений [4] уравнения моментов — суть линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами, непрерывно зависящими от  $t$ . При отсутствии внешних сил эти уравнения становятся однородными, тогда в общем случае (3.1) их коэффициенты ограничены и убывают во времени.

Согласно теореме Пуанкаре (например [4]), упомянутые ряды будут сходиться при достаточно малых  $\alpha_0$  в соответствующих диапазонах значений  $t$ , определяемых видом коэффициентов уравнений. Так как решение систем уравнений нулевого (свободномолекулярного) приближения известно, то решение систем уравнений более высоких порядков находится в виде квадратур.

2. Поясним сказанное выше и выясним некоторые асимптотические свойства решений уравнений моментов на примере систем уравнений для  $p$ ,  $p_{ij}$  однокомпонентного максвелловского газа при отсутствии внешних сил [3]

$$\begin{aligned} dp_{ij} / dt + \psi_{kk} p_{ij} + [p_{ir} \psi_{jr}] + [\psi_{ij}] p = -\alpha_0 p_{ij} / \Delta \\ 3dp / dt + 5\psi_{kk} p + 2\psi_{ij} p_{ij} = 0, \quad [A_{ij}] = A_{ij} + A_{ji} - 2/3 \delta_{ij} A_{kk} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Разложение решения системы (2.1) в ряд по  $\alpha_0$  удобнее производить [4], введя замену  $P = p - p^0$ ,  $P_{ij} = p_{ij} - p_{ij}^0$ , где  $p^0$ ,  $p_{ij}^0$  — свободномолекулярные решения системы (2.1) (при  $\alpha_0 = 0$ ), и полагая

$$P = \alpha_0 p^{(1)} + \alpha_0^2 p^{(2)} + \dots, \quad P_{ij} = \alpha_0 p_{ij}^{(1)} + \alpha_0^2 p_{ij}^{(2)} + \dots, \quad p^{(n)}(0) = p_{ij}^{(n)}(0) = 0 \quad (2.2)$$

Тогда, например, в первом приближении получим неоднородную систему

$$\begin{aligned} dp_{ij}^{(1)} / dt + \psi_{kk} p_{ij}^{(1)} + [p_{ir}^{(1)} \psi_{jr}] + [\psi_{ij}] p^{(1)} = -p_{ij}^0 / \Delta \\ 3dp^{(1)} / dt + 5\psi_{kk} p^{(1)} + 2\psi_{ij} p_{ij}^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

отличающуюся от свободномолекулярной наличием члена в правой части первого уравнения и разрешаемую в квадратурах. Аналогично решаются уравнения более высоких приближений.

При анализе области применимости разложения (2.2) при помощи известных критериев [4] нужно иметь в виду, что в общем случае вследствие (1.3) решения системы (2.1) при  $t \rightarrow \infty$  и заданных  $a_{ij}$ ,  $\alpha_0$  стремятся к нулю. Это можно доказать, делая в (2.1) замену аргумента по формуле  $dV/dt = t^2/\Delta$  и рассматривая затем предельную матрицу коэффициентов системы (2.1) при  $t \rightarrow \infty$  ( $V \rightarrow \infty$ ). Эта матрица совпадает с соответствующей матрицей для сферического разлета [4, 3], для которого решения асимптотически устойчивы и монотонно убывают во времени при любых  $t$ . Поэтому, в силу теоремы Четаева [5], при  $t \rightarrow \infty$  система (2.1) асимптотически устойчива, ее решения стремятся к нулю. При этом, конечно, предельные значения  $p$ ,  $p_{ij}$  отличаются от свободномолекулярных (как и в случае сферического разлета).

В работе [1] показано, что разложения решений системы уравнений (2.1) в степенные ряды по большим  $\alpha_0$ , т. е. по малым  $K$ , являются асимптотическими. Следовательно, в общем случае соответствующие ряды Чепмена — Энского и Гильберта также сходятся лишь асимптотически (а решения задачи не являются нормальными в смысле Чепмена — Энского<sup>1</sup>). В то же время разложения (2.2) относительно свободномолекулярного решения сходятся в обычном смысле. В работе [1] на простейших примерах было также показано, что даже тогда, когда ряд Чепмена — Энского сходится в обычном смысле, он применим в меньшем диапазоне значений  $K$ , чем разложение в ряд относительно свободномолекулярного решения.

Эти разложения по большим и малым  $\alpha_0$  проводятся при заданных начальных значениях градиентов скорости  $a_{ij}$  и являются, следовательно, разложениями по малым и большим  $K$  относительно соответствующих предельных состояний течения газа при очень больших и очень малых начальных значениях плотности, так как для максвелловских молекул

$$\alpha_0 \sim \rho(0) \quad (2.4)$$

В других предельных случаях, когда исчезающе малы начальные градиенты скорости, будут иметь место решения, показывающие, как эти малые градиенты влияют на состояние неподвижного разреженного газа. С целью наглядности ограничимся рассмотрением таких предельных состояний для одномерного разлета

$$u_x = x / (t + c), \quad u_y = u_z = 0, \quad c = 1 / a_{11}, \quad t^* = t / c \quad (2.5)$$

при  $p_{yy}(0) = p_{zz}(0)$ ,  $p_{ij}(0) = 0$  ( $i \neq j$ ). Тогда [6]

$$p_{yy}(t) = p_{zz}(t) = 1/2 p_{xx}(t), \quad p_{ij}(t) = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.6)$$

$$\frac{p}{p(0)} = A(1 + t^*)^{1/3 r_1} [1 + B(1 + t^*)^k], \quad A = \frac{2}{r_2 - r_1} \left( \frac{5 + r_2}{2} + \Pi \right) \\ B = 1/A - 1, \quad \beta = 1/\alpha_0 c \sim K, \quad \Pi = p_{xx}(0) / p(0) \quad (2.7)$$

$$\frac{p_{xx}}{p} = -\frac{5 + r_1}{2} [1 + B(1 + t^*)^k]^{-1} \left[ 1 + B \frac{5 + r_2}{5 + r_1} (1 + t^*)^k \right] \\ r_{1,2} = -3/2 \beta^{-1} [1 + 4\beta \mp \sqrt{1 + 4\beta(1/3 + \beta)}], \quad k = 1/3(r_2 - r_1)$$

В работах [1, 6] рассматривались разложения (2.7) в ряды по малым и большим  $\beta$  при фиксированном  $t^*$  (и в основном — при фиксированном  $\Pi$ ). Первому случаю соответствует ряд Чепмена — Энского (или Гильберта), второму — разложение решения около бесстолкновительного. Сравнение этих разложений проводилось [1] на примере  $p_{xx} / p$  либо для больших  $t^*$ , когда убывающими во времени членами можно пренебречь, либо для «нормального» случая  $\Pi = -1/2(5 + r_1)$ , когда  $A = 1$ ,  $B = 0$  и при малых  $\beta$  ряд Чепмена — Энского в обычном смысле сходится к точному решению а все сравнения наиболее наглядны. Построим теперь упомянутые выше предельные переходы.

Пусть  $t$ ,  $\Pi$ ,  $\alpha_0$  (т. е. начальная плотность) фиксированы, а  $c \rightarrow \infty$  (исчезающе малый начальный градиент скорости). Тогда  $\beta \rightarrow 0$ , но предельное состояние уже не «навые — стоксовское»

$$p = p(0) \left\{ 1 - \frac{\beta}{3} \left[ 5 \frac{t}{\tau} + 2\Pi \left( 1 - \exp - \frac{t}{\tau} \right) \right] + O(\beta^2) \right\} \\ \frac{p_{xx}}{p_{xx}(0)} = \exp \left( - \frac{t}{\tau} \right) \left\{ 1 + \frac{\beta}{3} \left[ \frac{4}{\Pi} \left( 1 - \exp - \frac{t}{\tau} \right) - 7 \frac{t}{\tau} + \frac{3}{2} \frac{t^2}{\tau^2} \right] + O(\beta^2) \right\} \quad (2.8)$$

Здесь  $\tau = 1/\alpha_0$  — время релаксации. Первые члены в формулах (2.8) соответствуют решению задачи Максвелла — Карлемана о релаксации неподвижного газа к равновесию, вторые члены отражают влияние малого градиента на состояние газа.

<sup>1</sup> Единственным (из полученных) точным решением уравнения Больцмана, принадлежащим к классу нормальных при производных начальных условиях, является решение для диффузионных скоростей в смеси одноатомных газов [1].

При малых и больших  $t/\tau$  соответственно имеем

$$\frac{p_{xx}}{p_{xx}(0)} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left[ 1 - \frac{\beta}{3} \frac{t}{\tau} \left( 7 + \frac{4}{\Pi} \right) \right],$$

$$\frac{p_{xx}}{p_{xx}(0)} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left( 1 - \frac{4\beta}{3\Pi} \exp\frac{t}{\tau} \right) \quad (2.9)$$

Так как [6]  $-1 < \Pi < 2$ , то из формул (2.9) следует, что при малых  $t/\tau$  малый градиент ускоряет уменьшение  $|p_{xx}|$ , при больших  $t/\tau$  характер его влияния зависит от знака  $\Pi$ . Заметим, что в приближении Навье — Стокса  $p_{xx}$  — величина отрицательная. Таким образом, характер влияния малых градиентов, вообще говоря, зависит от вида начальных возмущений функции распределения.

Выделим аналогичный предельный случай при  $\beta \rightarrow \infty$ . Пусть

$$\beta = \varepsilon^{-1}, \quad \alpha_0 \sim \varepsilon^2, \quad c = m\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad m = \text{const}, \quad t = t/m$$

Тогда с ошибкой порядка  $\varepsilon^2$

$$p = p(0) \left[ 1 - \frac{t}{3\beta} (5 + 2\Pi) \right], \quad p_{xx} = p_{xx}(0) \left[ 1 + \frac{t}{3\Pi\beta} (4 + 7\Pi) \right] \quad (2.10)$$

В нулевом приближении  $p, p_{xx}$  не изменяются во времени вследствие отсутствия столкновений, т. е. имеет место неподвижное свободномолекулярное состояние газа. Характер влияния столкновений, т. е. членов порядка  $1/\beta$ , на  $p_{xx}$  опять зависит от знака  $\Pi$ .

3. Случай (2.10) — пример задачи, в которой часть характерных длин (градиентов) течения  $L_i$  зависит от характерного значения длины свободного пробега, пропорциональной  $\tau$ , и следовательно,  $L_i$  различны по порядку величины при больших и малых  $K$  (в случае однородных течений начальные градиенты скорости  $a_{ij}$  могут быть различными по порядку величины, если часть из них связана с  $\tau$ ). Тогда обычная цепочка уравнений метода Чепмена — Энского, при выводе которой не предполагается различие по порядку между характерными длинами, «переразлагается», происходит «перемешивание» членов приближений Навье — Стокса, Барнетта и т. д.

Известным примером является ламинарный пограничный слой на пластине, где  $L_y/L_x \sim \sqrt{K}$  (напомним, что  $K \sim M/R$ ), поэтому первым приближением по числу Кнудсена будет приближение Прандтля; отброшенные при этом члены приближения Навье — Стокса и наибольшие барнеттовские члены имеют одинаковый порядок  $K$  (например [7]). Иначе говоря, во второе приближение входит часть навье — стоксовских и часть барнеттовских членов, цепочка уравнений метода Чепмена — Энского переразлагается.

Другим примером будет диффузия в медленно движущемся «стоксовском» газе. Скорость диффузии двухкомпонентного максвелловского газа при отсутствии внешних сил [8]

$$W_i = -\frac{n^2}{n_1 n_2} D \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{n_1}{n} + \alpha_p \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho}{p} D \left[ \alpha_1 e_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{n_1}{n} + \alpha_2 \frac{n_1 n_2}{n^2 \mu} \frac{\partial \mu e_{ij}}{\partial x_j} + \dots \right] + O(D^2) \right\} \quad (3.1)$$

$$e_{ij} = [\partial u_i / \partial x_j], \quad \alpha_p = (n\rho)^{-1} n_1 n_2 (m_2 - m_1)$$

Здесь  $D$  — коэффициент диффузии,  $n_i$  — парциальные концентрации,  $\alpha_i$  — коэффициенты порядка единицы, в фигурных скобках первые два члена — приближение Навье — Стокса, остальные — приближение Барнетта.

Уравнение Навье — Стокса для медленных движений при отсутствии внешних сил имеет вид

$$\partial p / \partial x_i = \mu \partial e_{ij} / \partial x_j, \quad \text{или} \quad \Delta p / p \sim \mu i / pL \sim M^2 / R \quad (3.2)$$

Здесь  $M, R$  — характерные значения чисел Маха и Рейнольдса. Используя оценку (3.2) в формуле (3.1) и учитывая, что  $\rho D \sim \mu$ , находим, что ее второй член и «барнеттовский» член с коэффициентом  $\alpha_2$  одного порядка ( $M^2/R$ ), т. е. здесь также име-

ет место «переразложение»: в первом приближении диффузия определяется градиентом концентрации, бародиффузия является эффектом второго порядка малости, так же как и указанный барнеттовский член, пропорциональный градиенту вязких напряжений  $\mu e_{ij}$  (т. е. «вязкому» переносу импульса). Если градиент концентрации пренебрежимо мал, то диффузия определяется вторым приближением.

Тот факт, что при медленном движении диффузия за счет вязкого переноса импульса может быть сравнима с бародиффузией, был отмечен Чепменом и Каулингом (см. [8]). В работе [9] методом Грэда были получены уравнения диффузии для многокомпонентной смеси одноатомных газов. В силу соображений, аналогичных приведенным выше, в них была включена соответствующая часть барнеттовских членов. Однако при этом не было отмечено, что влияние вязкого переноса импульса на диффузию нужно учитывать тогда, когда градиент концентрации также является эффектом второго (или более высокого) порядка, и приближение Навье — Стокса неприменимо. Последнее является примером неприменимости термодинамики необратимых процессов для описания течений газовой среды при малых  $K$ . В работе [1] указан такой случай для однородных течений. Впервые подобный пример был дан Максвеллом, который показал, что в неподвижном неравномерно нагретом газе возникают напряжения.

При помощи решений для однородных течений не удается провести убедительного сравнения уравнений Навье — Стокса и Барнетта с уравнениями 13 моментов Грэда, так как уравнения для  $p_{ij}$  в приближении 13 моментов в этом случае совпадают с точными. В случае однородных течений многокомпонентного максвелловского газа при наличии внешних сил [1] уравнения для диффузионных скоростей и напряжений в приближении [9], аналогичным приближению 13 моментов Грэда для однокомпонентного газа, также совпадают с точными. Это, по-видимому, является случайным фактом. Эксперименты по структуре скачка уплотнения и распространению ультразвука [10] показывают, что результаты расчетов при помощи уравнений 13 моментов Грэда значительно хуже согласуются с экспериментальными данными, чем результаты расчетов при помощи уравнений Навье — Стокса и Барнетта. В то же время результаты расчетов при помощи уравнений Барнетта структуры скачка уплотнения при  $M \leq 2$  хорошо согласуются с экспериментом и правильно указывают направление «отхода» экспериментальных данных от результатов расчетов в приближении Навье — Стокса; результаты расчетов поглощения звука в приближении Барнетта в некоторой области  $K$  лучше согласуются с экспериментальными, чем результаты приближения Навье — Стокса. Такое плохое согласие уравнений 13 моментов Грэда с опытом, видимо, обусловлено тем, что учет в этих уравнениях части членов более высокого порядка, чем порядок приближения Барнетта, вообще говоря, не улучшает, а ухудшает их точность (речь идет о максвелловском газе; в общем случае уравнения 13 моментов не дают точно даже уравнений Навье — Стокса, так как позволяют получить значения коэффициентов переноса лишь в первом — по Чепмену — Энскому — приближении).

Авторы признательны М. Н. Когану и А. А. Никольскому за обсуждение работы.

Поступило 30 VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. О точных решениях уравнений кинетических моментов смеси одноатомных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5. с. 41—50.
2. Никольский А. А. Об одном классе однородных движений сплошных сред и разреженных газов. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6, с. 1044—1050.
3. Галкин В. С. Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, с. 386—388.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, Изд. 2-е, т. II, М., Физматгиз, 1962, с. 289.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, Изд. 2-е. Гостехиздат, 1955.
6. Галкин В. С. Одномерное нестационарное решение уравнений кинетических моментов одноатомного газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, с. 186—188.
7. Галкин В. С. Об эффектах скольжения при обтекании тел гиперзвуковым слаборазреженным потоком. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 1, с. 27—36.
8. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд. иностр. лит., 1960, с. 479—480.
9. Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, вып. 3, с. 857—867.
10. Sherman F. S., Talbot L. Experimental versus kinetic theory for rarefied gases. in «Rarefied Gas Dynamics», London, Pergamon Press, 1960, p. 161—191.