

О СТРУКТУРЕ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВОДОНАСЫЩЕННОМ ГРУНТЕ

С. Н. БОРИСОВ, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ, В. П. РАДЧЕНКО

(Москва)

1. Согласно двухфазной модели динамического деформирования пористых насыщенных сред [1] в наблюдаемых акустических волнах сжатия, в водонасыщенных мягких ($\varepsilon \ll 1$) горных породах (грунтах) выполняются (с точностью до ε малых величин) условия равенства фазовых напряжений [2]. При этом процесс распространения волны с хорошей степенью точности будет описываться уравнением

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} - v_0^2 \nabla^2 p \right) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - v_\infty^2 \nabla^2 p \right) = 0 \quad (1.1)$$

обычным для динамических процессов в релаксирующих средах (см., например, [3]). Здесь p — давление, τ — время релаксации, v_0 , v_∞ — равновесная и замороженная скорости звука соответственно, причем механизм релаксации определяется различием инерционных свойств фаз (твердых частиц и жидкости) в рассматриваемой гетерогенной среде. Х. А. Рахматулин предложил ранее [4] модель движения двух взаимопроникающих сплошных баротропных сред, согласно которой фазовые давления равны тождественно; их линеаризация также приводит к уравнению (1.1).

Коэффициенты в уравнении (1.1) выражаются [2] через параметры водонасыщенного грунта

$$v_0^2 = 1/\beta\rho_0, \quad v_\infty^2 = 1/\beta\rho_\infty, \quad \rho_0 = (1 - m_0)\rho_1^\circ + m_0\rho_2^\circ \quad (1.2)$$

$$\tau = \frac{k_0}{\mu} \frac{1 - m_0}{m_0} \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0}, \quad \frac{1}{\rho_\infty} = \frac{1 - m_0}{\rho_1^\circ} + \frac{m_0}{\rho_2^\circ}, \quad \beta = (1 - m_0)\beta_1 + m_0\beta_2$$

Здесь β_1 , β_2 — коэффициенты сжимаемости фаз; ρ_1 , ρ_2 — их плотности; m_0 — пористость среды; k_0 — ее проницаемость, ρ_0 — равновесная плотность среды; ρ_∞ — замороженная плотность; ρ_1° , ρ_2° , m_0 относятся к начальному невозмущенному состоянию среды; μ — вязкость жидкости. Оценки показывают, что в водонасыщенном кварцевом рыхлом песке $\tau \approx 10^{-5} - 10^{-3}$ сек, тогда как $v_0 \approx 1900$ м/сек, $v_\infty \approx 2200$ м/сек (при $m_0 = 0.3$). В связи с этим в сильных ударных волнах релаксационный механизм будет проявляться в непосредственной близости от фронта ударной волны, особенно если учесть, что при большой относительной скорости движения фаз время релаксации будет несколько меньше указанного за счет проявляющихся инерционных сил сопротивления.

Для анализа влияния инерционной релаксации на структуру фронта ударной волны в водонасыщенном грунте воспользуемся системой уравнений Х. А. Рахматулина [4], к которой сводится более общая нелинейная система [1, 5], если принять гипотезу о равенстве фазовых напряжений; при этом, однако, в выражении для силы межфазового взаимодействия учтем дополнительный член, пропорциональный квадрату относительной скорости движения фаз.

2. Стационарное в подвижной системе координат $\zeta = x - Ut$, t течение описывается [6] системой уравнений

$$\rho_1(1-m)(u-U) \frac{du}{d\zeta} + \rho_2 m(w-U) \frac{dw}{d\zeta} + \frac{dp}{d\zeta} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{d\zeta} (1-m)\rho_1(u-U) = 0, \quad \frac{d}{d\zeta} m\rho_2(w-U) = 0$$

$$\rho_2(w-U) \frac{dw}{d\zeta} + \frac{dp}{d\zeta} = -\frac{\mu m}{k(m)}(w-u) - b(w-u)^2 \quad (2.2)$$

$$\rho_1 = \rho_1^\circ (1 + \beta_1 \kappa_1 (p - p_0))^{1/\kappa_1}, \quad \rho_2 = \rho_2^\circ (1 + \beta_2 \kappa_2 (p - p_0))^{1/\kappa_2} \quad (2.3)$$

Здесь U — скорость ударной волны; u, w — скорости движения фаз относительно неподвижной системы координат; b — коэффициент в двучленном законе фильтрации (учитывающий поправку к закону Дарси за счет инерционного сопротивления); κ_1, κ_2 — параметры соответствующей фазы, константы в рассматриваемом диапазоне давлений.

Введем безразмерные величины

$$\bar{u} = \frac{u-U}{U}, \quad \bar{w} = \frac{w-U}{U}, \quad \bar{\zeta} = \zeta \frac{\mu_0}{U k_0 (1-m_0) \rho_2^\circ}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1^\circ}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_2^\circ}, \quad \bar{p} = \beta_2 (p - p_0), \quad \mu = \frac{\mu(\bar{p})}{\mu_0}, \quad \bar{b} = \frac{b U k_0 (1-m_0)}{\mu_0}$$

Систему уравнений (2.1) — (2.3) можно привести к виду

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\zeta}} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{\zeta}} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \quad \frac{d\bar{p}}{d\bar{\zeta}} = -Q \frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \quad \frac{d\mu}{d\bar{\zeta}} = -\frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \quad Q = U^2 \rho_2^\circ \beta_2 \quad (2.4)$$

Здесь и в дальнейшем черта у безразмерной величины опускается, безразмерная величина Q — квадрат отношения скорости фронта ударной волны к скорости звука в воде. Детерминанты этой системы имеют вид

$$\Delta_0 = -(1-m_0) \frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ} Q w^2 \vartheta + (1-m_0) \frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ} m u \frac{1}{\rho_2(p)} - m_0 \frac{1-m}{\rho_2(p)} w - (1-m) w^2$$

$$\Delta_1 = \frac{u(w-u)}{\rho_2(p)} \theta \{m_0 Q \vartheta + m\}$$

$$\Delta_2 = \frac{w(w-u)}{\rho_2(p)} \theta \left\{ (1-m_0) \frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ} Q u \vartheta + (1-m) \right\}$$

$$\Delta_3 = \theta \left[\frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ} (1-m_0) m u - m_0 (1-m) w \right]$$

$$\Delta_4 = \frac{w-u}{\rho_2(p)} m (1-m) \theta \left\{ 1 + \frac{(1-m_0) u \beta Q \rho_1^\circ}{(1 + \beta \kappa_1 p) \rho_2^\circ} + \frac{m_0 w Q}{1 + \kappa_2 p} \right\}$$

$$\theta = \frac{\mu(p)m}{k(m)} + b(w-u), \quad \vartheta = \frac{m}{1 + \kappa_2 p} + \beta \frac{1-m}{1 + \beta \kappa_1 p}$$

3. Уравнения (2.1) дают следующие три интеграла, справедливые во всей области рассматриваемого стационарного течения:

$$\begin{aligned} &-(1-m_0)\rho_1^\circ Q u - m_0 \rho_2^\circ Q w + p = \rho_0 Q \\ (1-m)\rho_1(p)u &= -(1-m_0), \quad m\rho_2(p)w = -m_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Искомые стационарные решения могут содержать разрывы параметров потока, причем условия на них будут включать в себе интегралы (3.1) и соотношение на разрыве, следующее из уравнения (2.2)

$$w_A^2 + \frac{2}{(\kappa_2 - 1)Q} \{ [1 + \kappa_2 p_A]^{1-1/\kappa_2} - 1 \} = 1 \quad (\kappa_2 \neq 1) \quad (3.2)$$

Индексом A здесь отмечены значения величин слева от разрыва (для определенности в точке $\zeta = -0$), тогда как справа от него (при $\zeta \geq +0$), по предположению, среда находится в состоянии покоя $u = w = -1$, $p = 0$, $m = m_0$. Решение системы алгебраических уравнений (3.1), (3.2) определяет начальные условия $p = p_A$, $w = w_A$, $u = u_A$, $m = m_A$ при заданном Q в точке $\zeta = -0$ для дифференциальных уравнений (2.4) в области $\zeta \leq -0$. Система (3.1), (3.2) может быть сведена к кубическому уравнению относительно Q , определяемому по задаваемому значению p_A :

$$\begin{aligned} &AQ^3 + BQ^2 + CQ + D = 0 \\ A &= f_1^2 - 2f_1 f_4, \quad B = 2f_1(f_3 + f_2) - [2f_5 f_1 + 2f_4(f_3 + f_2) - f_4^2 f_3] \\ C &= (f_3 + f_2)^2 - 2f_5(f_3 + f_2) + 2f_5 f_4 f_3, \quad D = f_5^2 f_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1-m_0}{m_0} \frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ} \left(1 - \frac{1-m_0}{\rho_1} - \frac{m_0}{\rho_2} \right), \quad f_2 = f_5 \left(1 - \frac{m_0}{\rho_2} \right) \\ f_3 &= \frac{2}{\kappa_2 - 1} [(1 + \kappa_2 p_A)^{1-1/\kappa_2} - 1], \quad f_4 = 1, \quad f_5 = -\frac{p_A}{m_0} \end{aligned}$$

Остальные искомые начальные значения w_A , u_A , m_A определяются затем по известному из (3.3) значению Q , если воспользоваться формулами

$$w_A = (f + f_2/Q + f_3/Q) (f_4 + f_5/Q)^{-1} - 1 \quad (3.4)$$

$$u_A = -\frac{1-m_0}{\rho_1} \frac{w_A}{w_A + m_0/\rho_2}, \quad m_A = -\frac{m_0}{\rho_2 w_A}$$

Рассмотрим частный случай слабой ударной волны, характеризуемой условиями

$$\kappa_2 p \ll 1, \quad |w_A + 1| \ll 1, \quad |u_A + 1| \ll 1.$$

Соотношения для количества движения на скачке (в точке $\zeta = 0$), в пренебрежении величинами второго порядка малости, принимают вид (величины без черточек снова размерные)

$$-(1-m_0)\rho_1^\circ U u_A - m_0 \rho_2^\circ U w_A + p_A = p_0, \quad -\rho_2^\circ U w_A + p_A = p_0. \quad (3.5)$$

Отсюда сразу следует, что «замороженное» состояние, возникающее непосредственно за слабым разрывом, характеризуется (см. [5, 6]) равенством массовых скоростей фаз

$$\rho_1^\circ u_A = \rho_2^\circ w_A \quad (3.6)$$

Соотношения неразрывности фаз при этом записываются в виде

$$\begin{aligned} (1-m_0)\rho_1^\circ u_A + m'\rho_1^\circ U - (1-m_0)\rho_1' U &= 0 & (m' = m_A - m_0) \\ m_0 \rho_2^\circ w_A - m'\rho_2^\circ U - m_0 \rho_2' U &= 0 & (\rho_i' = \rho_i - \rho_i^\circ) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из системы (3.5), (3.7) следует, что для скорости фронта слабой ударной волны справедлива формула

$$U^2 = \frac{1}{\beta \rho_\infty}, \quad \beta = (1 - m_0)\beta_1 + m_0\beta_2, \quad \frac{1}{\rho_\infty} = \frac{1 - m_0}{\rho_1} + \frac{m_0}{\rho_2} \quad (3.8)$$

совпадающая, как и следовало ожидать, со скоростью звука такой частоты ω , что $\omega t \rightarrow \infty$. Кроме того, имеем

$$m' = \frac{m_0(1 - m_0)}{\rho_1^\circ \rho_2^\circ} \rho_\infty (\rho_1' - \rho_2') = \frac{m_0(1 - m_0)}{\rho_1^\circ \rho_2^\circ} \rho_\infty (\rho_1^\circ \beta_1 - \rho_2^\circ \beta_2) (p_A - p_0) \quad (3.9)$$

Отсюда видно, что в водонасыщенном кварцевом песке, где $\beta_2 > \beta_1 \rho_1^\circ / \rho_2^\circ$, пористость на слабом скачке давления возрасти не может (см. также [7], где учитывалась ненулевая разница фазовых напряжений).

В работе Я. З. Клеймана [8] условия на сильном разрыве в многофазной смеси формулировались на основе баланса сил и масс. При этом принималось, что на фазы рассматриваемой двухфазной среды действуют соответственно силы $(1 - m)p$ и mp , что следует также из применения законов сохранения к уравнениям Н. А. Слезкина [9]. Соотношениям Я. З. Клеймана [8] соответствует равенство массовых скоростей фаз и для случая сильных ударных волн. В то же время в уравнениях [4, 5], сводящихся в случае равенства фазовых напряжений к уравнениям Х. А. Рахматулина [4], потенциалом действующих сил в жидкости служит само давление p , а не произведение mp , условие (3.6) справедливо только для слабых волн. Указанное различие определяется различием выбора сил межфазового взаимодействия; последние (см. например [10]) необходимо постулировать при построении модели гетерогенной среды.

4. Из уравнения (2.2) следует, что вдали за фронтом распространяющейся волны (т. е. при $\zeta \rightarrow -\infty$) среда приходит в равновесное состояние (обозначим его B), которое характеризуется равенством скоростей фаз

$$u_B = w_B \quad (4.1)$$

Равенства (4.1) совместно с интегралами (3.1) связывают параметры начального невозмущенного состояния (при $\zeta \geq +0$) с параметрами $u_B = w_B$, p_B , m_B движения, возникающего вдали за фронтом волны. Эти соотношения могут быть представлены в виде

$$U^2 = V_0^2 \frac{p_B - p_0}{V_0 - V_B}, \quad u_B^2 = V_B^2 \frac{p_B - p_0}{V_0 - V_B} \quad (4.2)$$

$$V_B = \frac{1}{m_B \rho_2^B + (1 - m_B) \rho_1^B} = \frac{1}{\rho_0} \left[m_0 \frac{\rho_2^\circ}{\rho_2^B} + (1 - m_0) \frac{\rho_1^\circ}{\rho_1^B} \right], \quad V_0 = \frac{1}{\rho_0}$$

Заметим, что

$$V = c_1^\circ v_1 + c_2^\circ v_2, \quad v_1 = \frac{1}{\rho_1}, \quad v_2 = \frac{1}{\rho_2}, \quad c_1^\circ = \frac{(1 - m_0) \rho_1^\circ}{\rho_0}, \quad c_2^\circ = \frac{m_0 \rho_2^\circ}{\rho_0} \quad (4.3)$$

Здесь c_1° , c_2° — начальные массовые концентрации фаз; v_1 , v_2 — удельные объемы фаз (т. е. V можно интерпретировать ([11], стр. 304) как удельный объем гетерогенной среды).

Если считать, что ударная волна состоит из простого разрыва, сразу за которым возникает равновесное движение [12, 13], то формулы (4.2) будут играть роль соотношений на разрыве. Соответствующие оценки для случая водонасыщенных грунтов были проведены Г. М. Ляховым [12]. Интегрирование системы уравнений (2.4) в области $\zeta \leq -0$ при указанных начальных условиях в точке $\zeta = -0$ позволяет оценить структуру фронта ударной волны; такая постановка задачи обычна для теории ударных волн в релаксирующих средах [14]. В случае слабых ударных волн первая формула (4.2) переходит в формулу для равновесной скорости звука

$$U^2 = 1/(\beta \rho_0) = v_0^2 \quad (4.4)$$

В безразмерном виде формулы (4.2), а также соотношение для пористости m_B принимают вид

$$Q = p_B \left[(1 - m_0) \frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ} + m_0 \right]^{-1} \left(1 - \frac{m_0}{\rho_2} - \frac{1 - m_0}{\rho_1} \right)^{-1}, \quad \rho_i = \rho_i^B$$

$$u_B = w^B = - \left(\frac{m_0}{\rho_2} + \frac{1 - m_0}{\rho_1} \right), \quad m_B = \frac{m_0}{\rho_2} \left(\frac{m_0}{\rho_2} + \frac{1 - m_0}{\rho_1} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

5. Приведем результаты примерного расчета. Для водонасыщенного песка имеем $\rho_1^\circ / \rho_2^\circ = 2.65$, $\beta = 0.1$, $\beta_2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}$. По данным работы [15], замеряемый на ударной адиабате показатель κ_1 для мрамора принимает значение $\kappa_1 = 7.23$ до давления $p \approx 150 \cdot 10^3 \text{ атм}$, а при более высоких давлениях $\kappa_1 = 4.1$. Примем¹ в связи с этим для материала твердой фазы $\kappa_1 = 7.23$. Для воды можно принять $\kappa_2 = 7$. Расчеты были выполнены также для случая $\kappa_1 = \kappa_2 = 3$, поскольку в работе [12] ранее проводились оценки соотношений на фронте ударной волны, как на простом разрыве, именно для таких значений κ_1 , κ_2 . Начальные значения пористости принимались равными $m_0 = 0.2, 0.3, 0.41$. При изменениях пористости среды меняется также ее проницаемость $k(m)$ примерно по закону

$$k = \frac{a}{1 - m}, \quad a(m) = a_0 \left(\frac{m}{m_0} \right)^\gamma \left(\frac{1 - m}{1 - m_0} \right)$$

Исходя из опытных данных Фатта [16], примем $\gamma = 10$.

Для оценки коэффициента b (инерционных потерь) воспользуемся результатами известными экспериментальными исследованиями отклонений от закона Дарси, проведенными Н. М. Жаворонковым, М. Э. Аэровым и Н. Н. Умником. Указанные опытные данные были представлены [16] в виде функции $f = f(R)$ от числа Рейнольдса R , причем

$$f(R) = 1 + \frac{b a_0}{m_0(1 - m_0) \mu_0} (w - u), \quad R = \frac{w - u}{\mu_0} \left(\frac{a_0}{m_0(1 - m_0)} \right)^{1/2} \rho_2^\circ \quad (5.1)$$

Из графиков [16] видно, что $f(R) = 1$ для засыпки шариков пористостью $m \approx 0.4$ и проницаемостью $k \approx 3 \cdot 10^3 \text{ дарси}$ при условии $R \leq 0.4$, а в диапазоне $1 \leq R \leq 4$ может быть приближена прямой линией

$$f(R) = 1 + 0.35R \quad (5.2)$$

Будем считать для простоты, что зависимость (5.2) справедлива для всех значений числа $R \geq 0$, что приводит к завышению эффекта инерционных сил сопротивления для естественных пористых горных пород ($k \sim 1 \text{ дарси}$ и менее) — см. результаты опытов Фенчера, Льюиса и Барнса и их обработку в [16]. Тогда сопоставление соотношений (2.2), (5.1), (5.2) показывает, что

$$\frac{b}{\rho_2^\circ} \left(\frac{a_0}{m_0(1 - m_0)} \right)^{1/2} = 0.35$$

Для рассматриваемых данных [16] имеем

$$\left(\frac{a}{m_0(1 - m_0)} \right)^{1/2} \approx 8.5 \cdot 10^{-4}, \quad \text{или} \quad \frac{b}{\mu_0} \frac{a_0}{m_0(1 - m_0)} = 2.98 \cdot 10^{-4} \frac{\rho_2^\circ}{\mu_0} \text{ см}$$

Отсюда

$$b = \frac{b a_0 U}{\mu_0} = \frac{b a_0}{\mu_0} \left(\frac{Q}{\rho_2^\circ \beta_2} \right)^{1/2} = 4170 \sqrt{Q} m(1 - m) \quad \left(\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\rho_2^\circ}{\beta_2} \right)^{1/2} = 1.4 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1} \right) \quad (5.3)$$

¹ Были выполнены также расчеты при $\kappa_1 = 3.96$ (см. [16]).

Здесь также предполагается, что при деформациях пористой среды величина b меняется примерно так же, как и коэффициент пропорциональности в законе Дарси, т. е. что при деформациях численный коэффициент 4170 остается неизменным.

Для простоты можно также считать, что $\mu = 1$ (более строгий расчет требует учета зависимости вязкости от давления).

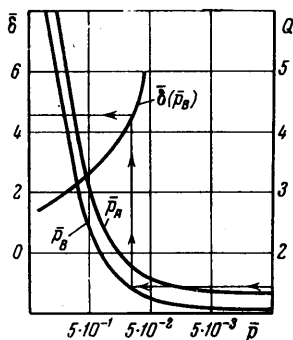
$$m_0 = 0.41, \kappa_1 = 3.96, \kappa_2 = 7.00$$

$p_A = 0.0005$	0.005	0.025	0.05	0.25	0.5	2.5
$Q = 1.3512$	1.3715	1.4587	1.5616	2.2394	2.9037	6.5153
$w_A = -0.9996$	-0.9964	-0.9829	-0.9682	-0.8914	-0.8355	-0.6537
$v_A = -0.9999$	-0.9986	-0.9935	-0.9879	-0.9571	-0.9330	-0.8454
$m_A = 0.4100$	0.4095	0.4076	0.4057	0.3981	0.3958	0.4134
$w_B = -0.9708$	-0.9688	-0.9608	-0.9525	-0.9040	-0.8668	-0.7343
$u_B = -0.9709$	-0.9690	-0.9610	-0.9527	-0.9041	-0.8669	-0.7344
$m_B = 0.3970$	0.3961	0.3928	0.3894	0.3725	0.3633	0.3527
$p = 5.8400$	5.3200	4.6320	4.2980	2.6380	2.3620	1.6050
$p_B = 0.0776$	0.0840	0.1124	0.1454	0.4239	0.7627	3.4150

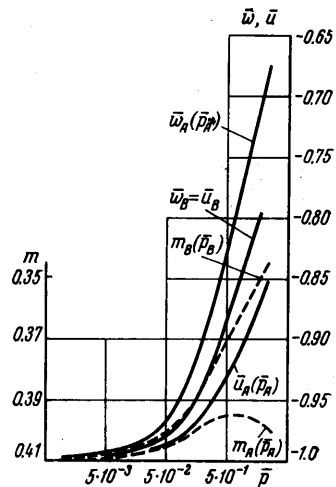
$$m_0 = 0.41, \kappa_1 = 7.23, \kappa_2 = 7.00$$

$p_A = 0.0005$	0.005	0.0250	0.0500	0.250	0.5000	2.5000
$Q = 1.3512$	1.3716	1.4594	1.5633	2.2545	2.9453	6.8700
$w_A = -0.9996$	-0.9969	-0.9830	-0.9682	-0.8922	-0.8381	-0.6759
$u_A = -0.9999$	-0.9986	-0.9935	-0.9879	-0.9579	-0.9339	-0.8522
$m_A = 0.4099$	0.3977	0.4076	0.4057	0.3977	0.3946	0.3998
$w_B = -0.9711$	-0.9697	-0.9612	-0.9525	-0.9062	-0.8714	-0.7597
$u_B = -0.9712$	-0.9698	-0.9614	-0.9526	-0.9064	-0.8716	-0.7598
$m_B = 0.3970$	0.3965	0.3928	0.3892	0.3721	0.3623	0.3432
$\delta = 5.8400$	5.8400	4.6320	4.1220	2.7340	2.2240	1.4757
$p_B = 0.0784$	0.0820	0.1113	0.1462	0.4185	0.7465	3.2573

Некоторые результаты вычислений безразмерных переменных, проведенных на БЭСМ-2М приводим на фиг. 1—8. Численное решение системы уравнений (2.4) строилось методом Адамса—Штермера с автоматическим выбором шага. Начальные данные определялись также машинным счетом как корни кубического уравнения (3.3), по формуле Кордана, а также по соотношениям (3.4).



Фиг. 1

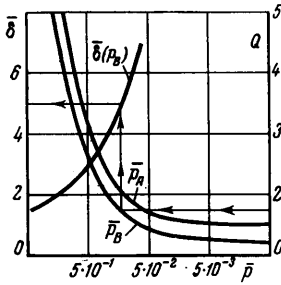


Фиг. 2

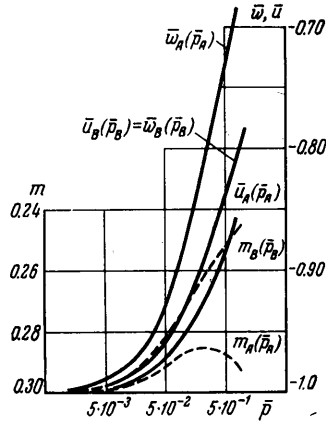
Начальные условия задавались в точке $\zeta_0 = -0$ и численное интегрирование проводилось до точки $\zeta_\infty < \zeta_0$, определяемой условиями $|u(\zeta_\infty) - w(\zeta_\infty)| \leq 0.00015$. Контроль счета осуществлялся путем сравнения получаемых значений $u(\zeta_\infty)$, $w(\zeta_\infty)$, $p(\zeta_\infty)$, $m(\zeta_\infty)$ с соответствующими значениями u_B , w_B , p_B , m_B , подсчитанных независимо по формулам (4.5).

На фиг. 1, 2 приведены результаты расчета для значений параметров: $m_0 = 0.41$, $\kappa_1 = 7.23$, $\kappa_2 = 7.00$, $\rho_1^\circ / \rho_2^\circ = 2.65$, $\beta_1 = 0.1\beta_2$, на фиг. 3, 4 для: $m_0 = 0.3$, $\kappa_1 = 7.23$, $\kappa_2 = 7.00$, $\rho_1^\circ / \rho_2^\circ = 2.65$, $\beta_1 = 0.1\beta_2$. Кружки на фиг. 5—8 соответствуют начальным значениям переменных в точке ξ_0 .

Ширина фронта ударной волны δ оценивалась как $\delta = |\xi_\infty|$. На фиг. 1, 3 построены графики зависимости δ от величины полного перепада давления в ударной волне p_B . Графики распределения давления, пористости и скоростей движения фаз по глу-



Фиг. 3



Фиг. 4

бине фронта ударной волны (см., например, фиг. 5—7) показывают, что практическое возрастание давления до величины p_B и выравнивание скоростей u, w происходят в основном на меньшем расстоянии δ_* , оцениваемом как $\delta_* = 0.1\delta$. Для иллюстрации приведем также вычисленные значения безразмерных величин p, m, u, w при некоторых значениях ξ для ряда значений параметров расчета.

$$m_0 = 0.3, Q = 3.1300, \kappa_1 = 7.23, \kappa_2 = 7.00$$

$\xi = -0.0000$	-0.0080	-0.02100	-0.0470	-0.9470	-2.483
$p = -0.5$	0.6207	0.6718	0.7001	0.7284	0.7294
$m = 0.2852$	0.2732	0.2673	0.2637	0.2539	0.2598
$u = -0.9384$	-0.9151	-0.9045	-0.8983	-0.8922	-0.8919
$v = -0.8485$	-0.8640	-0.8751	-0.8827	-0.8914	-0.8917

$$m_0 = 0.3, Q = 6.902, \kappa_1 = 7.23, \kappa_2 = 7.00$$

$\xi = -0.0000$	-0.0030	-0.0077	-0.0332	-0.8914	-1.4872
$p = 2.5$	2.9267	3.0608	3.1711	3.2115	3.2125
$m = 0.2317$	0.2674	0.2563	0.2476	0.2439	0.2438
$u = -0.8563$	-0.8168	-0.8015	-0.7890	-0.7841	-0.7840
$w = -0.6778$	-0.7241	-0.7489	-0.7731	-0.7836	-0.7839

Как указывалось, в расчете была несколько завышена роль инерционных межфазовых сил. В связи с этим были выполнены также расчеты (фиг. 8) при условии $b \equiv 0$.

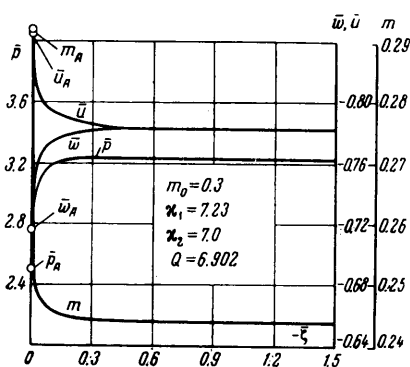
Для перехода к размерным величинам (теперь снова безразмерные величины отмечены чертой сверху) нужно воспользоваться формулой

$$\delta = \Lambda \bar{\delta}, \quad \delta_* = \Lambda \bar{\delta}_*, \quad \Lambda = \frac{U a_0 \rho_2^\circ}{\mu_0} = \frac{a_0 \sqrt{\rho_2^\circ}}{\mu_0 \sqrt{\beta_2}}$$

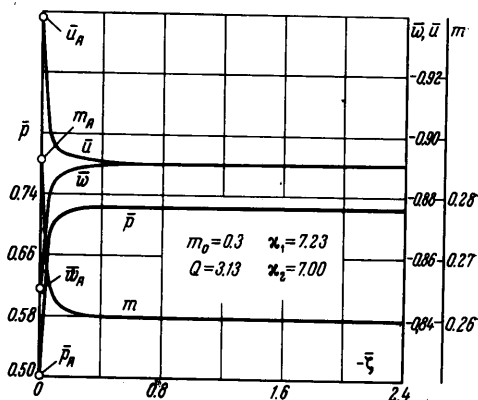
При $U = 1000$ м/сек, $a_0 = 1$ дарси = 10^{-8} см², $\mu_0 = 1$ спз, $\rho_2 = 1$ г/см³ имеем $\Lambda = 0.1$ см. Поэтому скорости $U = 1800$ м/сек, проницаемости $3 \cdot 10^3$ дарси (проницаемость дробы диаметром $d = 0.2-0.3$ см, для которой проводилась опытная оценка коэффициента b [16]) и $\delta = 1$ имеем $\bar{\delta} \approx 5$ м, $\bar{\delta}_* = 50$ см. При проницаемости 300 дарси: $\delta_* = 5$ см. Существенно, что ширина фронта гораздо больше характерного микромасштаба среды ($\delta_* \gg d$).

Аналогичные расчеты были проведены для ударной волны в пыльном воздухе [17]: там ширина фронта ударной волны оценивалась в 30—50 см.

6. Минимальная скорость ударной волны U , при которой возможна стационарная структура фронта, как следует из фиг. 1, 3, оказывается равной замороженной скорости звука $v = v_\infty = \sqrt{1/\beta\rho_\infty}$. Равновесная скорость звука $v_0 \neq v_\infty$, поэтому фронт слабых акустических волн непрерывно расширяется. Для соответствующих оценок можно воспользоваться имеющимися решениями уравнения (1.1), построенными в связи с анализом динамических процессов в релаксирующих газах.



Фиг. 5

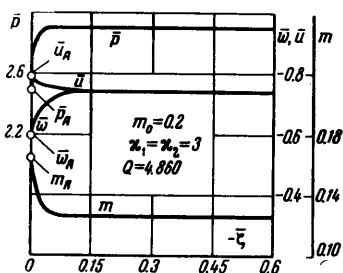


Фиг. 6

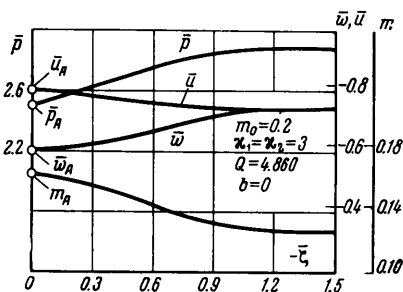
Так, согласно [18], затухание начального скачка на фронте слабой ударной волны происходит по закону

$$[p] = \text{const } x^{-1/2(n-1)} e^{Cx}, \quad C = -1/2(v_\infty^2/v_0^2 - 1)/v_\infty\tau \quad (6.1)$$

Здесь $n = 1, 2, 3$ соответственно в случае плоских, цилиндрических или сферических волн. Отсюда при $x \gg v_\infty\tau$ скачок практически размыва-



Фиг. 7



Фиг. 8

ется, и, например, в плоском случае [3] решение, соответствующее условиям $p(x, 0) = p(\infty, t) = 0, p(0, t) = P_0$, представляется в виде

$$p(x, t) = \frac{P_0}{2} \Phi \left\{ \frac{v_0 t - x}{\sqrt{(\rho_0/\rho_\infty - 1)v_0\tau x}} + 1 \right\}, \quad \Phi(z) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^z e^{-1/2 u^2} du \quad (6.2)$$

Решение (6.2) соответствует представлению среды в виде жидкости, обладающей объемной вязкостью η [3, 6].

Ширина размывающегося фронта слабой ударной волны при $x \gg v_\infty \tau$ определится отсюда формулой

$$\delta = \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} - 1 \right) v_0 \tau x \right]^{1/2} = \left(\frac{\eta}{\rho_0} \frac{x}{v_0} \right)^{1/2} \quad (6.3)$$

Для водонасыщенного кварцевого песка ($m_0 = 0.3$, $v_0 = 1.9$ км/сек, $v_\infty = 2.2$ км/сек, $\tau = 10^{-3}$) формулой (6.3) можно пользоваться при $x \gg 2.2$ м, причем $\delta = 7.3$ м при $x = 100$ м, $\delta = 22.2$ м при $x = 1$ км.

Институт физики Земли
Вычислительный центр Академии наук СССР

Поступило 7 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз., 1944, т. 8, № 4.
2. Николаевский В. Н. О неустановившихся деформациях водонасыщенных грунтов. Arch. Mech. Stosow. 1965, т. 17, № 3.
3. Стаханов И. П., Ступоченко Е. В. О некоторых вопросах гидродинамики релаксирующих сред. ПМТФ, 1963, № 2.
4. Рахматулин Х. О. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
5. Николаевский В. Н. Об основных уравнениях динамики насыщенных жидкостью упругих пористых сред. Сб. «Добыча нефти» (ежегодник, 1963). Изд. «Недра», 1964.
6. Nikolaevskii V. N. On some relaxation process connected with heterogeneity of continuous media. Appl. Mech. Proc. XI Internat. Congr. Appl. mech., 1966, p. 862—867 (Munich, 1964), Springer Verlag.
7. Золотарев П. П., Николаевский В. Н. О распространении скачков напряжения и давления в водонасыщенном грунте. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1.
8. Клейман Я. З. О распространении сильных разрывов в многокомпонентной среде. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
9. Слёзкин Н. А. Дифференциальные уравнения движения пульпы. Докл. АН СССР, 1951, т. 79, № 5.
10. Green A. E., Naghdi P. M. Dynamical theory of interacting continua. Internat. J. Engng Sci., 1965, No. 2.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
12. Ляхов Г. М. Ударные волны в многокомпонентных средах. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1959, № 1.
13. Chamberlé P. L. J. Acoust. Soc. America, 1954, vol. 26, p. 329—331. (русск. перев.: Шамбре П. Скорость плоских волн в смеси. Сб. перев. «Проблемы современной физики. Гидроакустика», Изд. иностр. лит., 1955, № 8).
14. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1963.
15. Дремин А. Н., Ададуров Г. А. Ударная адиабата мрамора. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 2.
16. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Огаджанянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостоптехиздат, 1962.
17. Rüdinger G. Some properties of shock relation in gas flows carrying small particles. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 5.
18. Wegener P. P., Chu Bo-ten, Klikoff W. A. Weak waves in relaxing flows. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, p. 4.
19. Дремин А. Н., Карпунин И. А. Метод определения адиабат дисперсных веществ. ПМТФ, 1960, № 3, стр. 184—187.