ФИЛЬТРАЦИЯ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

М. В. ФИЛИНОВ

(*Москва*)

Рассмотрим задачу о нагнетании смеси двух несжимаемых жидкостей, обладающих различными вязкостями, в бесконечный неоднородный пористый пласт, первоначально заполненный некоторой третьей жидкостью. Скорость фильтрации каждой из фаз зависит в основном от своей насыщенности и вязкости, поэтому в процессе вытеснения в общем случае их скорости движения будут различными, и вследствие этого в пористой среде образуются зоны трех-, двух и однофазного течения. Эти зоны будут отделяться друг от друга подвижными границами раздела (фронтами), на которых имеют место скачки соответствующих насыщенностей.

Будем предполагать для простоты, что во всей области, где имеет место совместное течение нескольких жидкостей, они несжимаемы и нерастворимы, а вне этой области, во внешней зоне, движется однородная упругая жидкость.

1. Уравнение неразрывности для каждой фазы имеет вид

$$\partial Q_i/\partial x = -mf(x)\partial\sigma_i/\partial t \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Для расхода каждой из фаз Q_i, в соответствии с обобщенным законом Дарси, имеем

$$Q_i = -\frac{k(x)k_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\mu_i} f(x)\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получим дифференциальные уравнения, описывающие фильтрацию в зоне движения трехфазной смеси

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k(x)k_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\mu_i} f(x)\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}\right] = mf(x)\frac{\partial\sigma_i}{\partial t} \qquad (0 < x < x_{10}) \tag{1.3}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1 \tag{1.4}$$

Здесь μ_i, k_i, σ_i — вязкость, фазовая проницаемость и насыщенность жидкости соответственно, m — пористость, x — координата, x_{10} и x_{20} — границы раздела зон, $f(x)$ — площадь поперечного сечения трубки тока.

Закон изменения проницаемости по пласту принимается в виде

$$k(x) = k_0 k(x) = k_0(x/h)^b \tag{1.5}$$

Здесь k_0 — проницаемость пористой среды для однородной жидкости, h — мощность пласта. Индексы *1* и *2* относятся к вытесняющим жидкостям, а индекс *3* — к вытесняемой. Индексы у давления указывают соответствующую зону.

Полагая $\sigma_1 = 0$, из (1.3) для зоны двухфазного течения имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k(x)k_j(\sigma_2, \sigma_3)}{\mu_j} f(x)\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}\right] = mf(x)\frac{\partial\sigma_i}{\partial t} \qquad {}_{j=2,\,3} \qquad (x_{10} < x < x_{20}) \tag{1.6}$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 1 \tag{1.7}$$

Наконец, во внешней зоне имеем дифференциальное уравнение фильтрации упругой капельной жидкости (1.8)

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x}{h}\right)^b f(x)\frac{\partial p}{\partial x}\right]=f(x)\frac{\partial p^{(3)}}{\partial t} \qquad (x_{20}<x<\infty) \qquad \left(a=\frac{k_0K}{m\mu_3}\right)$$

Требуется найти функции $\sigma_i(x, t)$ и $p^{(i)}(x, t)$ в соответствующих зонах при начальных условиях

$$p(x,0)=p_0=\text{const}, \qquad \sigma_3(x,0)=1, \qquad \sigma_1(x,0)=\sigma_2(x,0)=0 \quad (1.9)$$

и следующих граничных условиях.

На неподвижной границе области $x = 0$

$$p^{(1)}(0,t)=p^{\circ}=\text{const}, \quad \sigma_1=\text{const}, \quad \sigma_2=\text{const}, \quad \sigma_3=\sigma_0=\text{const},$$
$$\sigma_1+\sigma_2=\text{const}. \qquad (1.10)$$

Условие (1.10) относительно насыщенностей физически означает, что через галерею $x=0$ закачивается смесь двух жидкостей с постоянными заданными концентрациями.

На подвижных границах раздела фаз (фронтах) имеет место равенство давлений и скоростей фильтрации соответствующих фаз.

На первом фронте $x = x_{10}$

$$p^{(1)}=p^{(2)}, \qquad k(x)\,(k_1/\mu_1+k_2/\mu_2+k_3/\mu_3)\,\partial p^{(1)}/\partial x=$$
$$=k(x)\,(k_2/\mu_2+k_3/\mu_3)\,\partial p^{(2)}/\partial x \qquad (1.11)$$

На втором фронте $x = x_{20}$

$$p^{(2)}=p^{(3)}, \qquad k(x)\left(\frac{k^2}{\mu_2}+\frac{k_3}{\mu_3}\right)\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}=\frac{k(x)}{\mu_3}\frac{\partial p^{(3)}}{\partial x} \qquad (1.12)$$

Наконец имеется условие при $x\to\infty$

$$p_3^{(3)}(\infty,t)=p_0=\text{const}, \qquad \sigma_3(\infty,t)=1, \quad \sigma_1(\infty,t)=\sigma_2(\infty,t)=0 \quad (1.13)$$

На этих же фронтах насыщенности принимают некоторые фронтовые значения, подлежащие определению

$$\sigma_1=\sigma_{10}^{(1)}, \qquad \sigma_2=\sigma_{20}^{(1)} \qquad \text{при } x=x_{10}$$
$$\sigma_2=\sigma_{20}^{\ 2)} \qquad \text{при } x=x_{20} \qquad (1.14)$$

Близкая задача о нагнетании одной жидкости в смесь двух других несжимаемых жидкостей рассматривалась в работе [1]. Задача решалась методом характеристик. Вопрос о характере распределения давления в ней не изучался. Существенным моментом указанной работы является то, что одна из фильтрующихся фаз — газ — обладает весьма малой вязкостью. Это приводит к тому, что в области вытеснения насыщенность этой фазы сразу снижается до остаточной, и в области трехфазного течения в действительности имеет место лишь совместное движение двух других жидкостей в присутствии неподвижного газа.

В сформулированной краевой задаче рассматривается общий случай, когда вяз кости фильтрующихся жидкостей произвольны. В случае, когда они имеют один поря док, в зоне трехфазного течения будет происходить постепенное изменение насыщенностей всех движущихся жидкостей.

Метод решения аналогичен методу, использованному в работах [2, 3], где исследовалась задача о совместной фильтрации двух несжимаемых и нерастворимых жидкостей в однородной пористой среде.

2. Решение сформулированной задачи автомодельно. Подстановка

$$\eta = \frac{xh^{b\gamma}}{2(at)^{\gamma}} \qquad a = \frac{k_0K}{m\mu_3}, \qquad \gamma = \frac{1}{2-b} \tag{2.1}$$

переводит систему уравнений (1.3)—(1.8) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\eta}\left[\mu_{31}\eta^b k_1(\sigma)\frac{dp^{(1)}}{d\eta}\right] = -\alpha\eta\frac{d\sigma_1}{d\eta}, \quad \frac{d}{d\eta}\left[\mu_{32}\eta^b k_2(\sigma)\frac{dp^{(1)}}{d\eta}\right] = -\alpha\eta\frac{d\sigma_2}{d\eta} \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta^b k_3(\sigma)\frac{dp^{(1)}}{d\eta}\right] = \alpha\eta\frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\eta}, \qquad \alpha = \gamma 2^{2-b} \qquad (0 < \eta < \eta_{10})$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[\mu_{32}\eta^b k_2(\sigma)\frac{dp^{(2)}}{d\eta}\right] = -\alpha\eta\frac{d\sigma_2}{d\eta}, \qquad \frac{d}{d\eta}\left[\eta^b k_3(\sigma)\frac{dp^2}{d\eta}\right] = \alpha\eta\frac{d\sigma_2}{d\eta} \tag{2.3}$$

$$(\eta_{10} < \eta < \eta_{20})$$

$$\frac{\partial^2 p^{(3)}}{\partial\eta^2} + \left(\frac{b}{\eta} + \eta^{1-b}\right)\frac{dp}{d\eta} = 0 \qquad \left(\eta_{20} < \eta < \infty, \quad p_i{}^{\circ} = \frac{p^i}{K}\right) \tag{2.4}$$

В дальнейшем индекс 0 у давления опускаем. Сложив уравнения (2.2), в зоне трехфазного течения получим

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta^b\frac{dp}{d\eta}(\mu_{31}k_1 + \mu_{32}k_2 + k_3)\right] = 0 \tag{2.5}$$

отсюда

$$p^{(1)}(\eta) = C_1A(\eta) + C_2, \qquad A(\eta) = \int\limits_0 \frac{d\eta}{\eta^b(\mu_{31}k_1 + \mu_{32}k_2 + k_3)} \tag{2.6}$$

В двухфазной области таким же образом получим

$$\frac{d}{d\eta}\left[\frac{dp^{(2)}}{d\eta}(\mu_{32}k_2 + k_3)\eta^b\right] = 0 \qquad (\eta_{10} < \eta < \eta_{20}) \tag{2.7}$$

Отсюда

$$p^{(2)}(\eta) = C_3B(\eta_{10}, \eta) + C_4, \qquad B(\eta_{10}, \eta) = \int\limits_{\eta_{10}} \frac{d\eta}{\eta^b(\mu_{32}k_2 + k_3)} \tag{2.8}$$

В зоне течения однородной жидкости решением (2.4) будет

$$p^{(3)}(\eta) = C_5F(\eta) + C_6, \qquad F(\eta) = \int\limits_{\eta} \eta^{-b}\exp\left(-\alpha\frac{\eta^{2-b}}{2-b}\right) \tag{2.9}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — постоянные, которые будут определены ниже.

Найдем распределение насыщенностей $\sigma_1(\eta)$ и $\sigma_2(\eta)$. Подставляя (2.6) в первые два уравнения (2.2), после несложных преобразований получим следующую однородную систему линейных уравнений относительно производных по η.

$$\left(C_1\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_1}+\alpha\eta\right)\frac{d\sigma_1}{d\eta}+C_1\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_2}\frac{d\sigma_2}{d\eta}=0,\qquad f_1(\sigma_1,\sigma_2)=\frac{\mu_{31}k_1}{\mu_{31}k_1+\mu_{32}k_2+k_3}$$

$$C_1\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_2}\frac{d\sigma_1}{d\eta}+\left(C_1\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_2}+\alpha\eta\right)\frac{d\sigma_2}{d\eta}=0,\qquad f_2(\sigma_1,\sigma_2)=\frac{\mu_{32}k_2}{\mu_{31}k_1+\mu_{32}k_2+k_3}\tag{2.10}$$

Здесь $f_1(\sigma_1, \sigma_2)$, $f_2(\sigma_1, \sigma_2)$ — известные экспериментальные функции. Нетривиальные решения системы (2.10) имеют вид

$$\eta=-\frac{C_1}{2\alpha}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_1}+\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_2}\mp\sqrt{D}\right)\equiv\frac{C_1}{2\alpha}\psi(\sigma_1,\sigma_2)\tag{2.11}$$

Равенство (2.11) дает одно из уравнений для определения $\sigma_1(\eta)$ и $\sigma_2(\eta)$ в зоне трехфазного течения. Подставляя (2.11) в первое равенство системы (2.10), получим второе уравнение для определения $\sigma_1(\eta)$ и $\sigma_2(\eta)$

$$2\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_2}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_1}-\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_2}\right)\mp\sqrt{D},\qquad \sqrt{D}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_1}-\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_2}\right)+4\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_2}\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_1}\tag{2.12}$$

Равенства (2.11) и (2.12), таким образом, решают задачу об определении насыщенностей в зоне трехфазного течения. В работе [1] было установлено, что для обычных видов зависимостей фазовых проницаемостей от насыщенностей $\partial f_1/\partial\sigma_2<0$ и $\partial f_2/\partial\sigma_1<0$, т. е. $D>0$. Как показывает анализ решения, перед корнем в равенствах (2.11) и (2.12) нужно взять верхний знак.

Подставляя (2.8) в первое равенство системы (2.3), в зоне двухфазного течения получим

$$[C_3f'(\sigma_2)+\alpha\eta]\frac{d\sigma_2}{d\eta}=0,\qquad f(\sigma_2)=\frac{\mu_{32}k_2}{\mu_{32}k_2+k_3}\tag{2.13}$$

что дает, кроме тривиального решения, $\sigma_2=\text{const}$,

$$2\eta=-C_3f'(\sigma_2)\tag{2.14}$$

Это решение представляет собой распределение насыщенности в зоне двухфазного течения, $f(\sigma_2)$ — известная функция насыщенности, называемая функцией Леверетта.

Рассмотрим условия на фронтах. Пусть жидкость *1* движется медленнее жидкости *2*. Тогда на границе раздела трехфазной и двухфазной зон имеет место скачок насыщенностей σ_1 и σ_2.

Поскольку равенство (2.11) справедливо всюду в данной области, в том числе и на фронте, то из него получим

$$\eta_{10}=\frac{C_1}{2\alpha}\psi(\sigma_{10}^{(1)},\sigma_{20}^{(1)})\tag{2.15}$$

Два других соотношения можно получить, рассматривая материальный баланс каждой фазы на фронте

$$
\begin{aligned}
m\frac{dx}{dt}\bigg|_{x=x_{10}} &= \frac{W_1(\sigma_{10}^{(1)},\sigma_{20}^{(1)}) - W_1(\sigma_{1+}^{(1)},\sigma_{2+}^{(1)})}{\sigma_{10}^{(1)}-\sigma_{1+}^{(1)}} \\
m\frac{dx}{dt}\bigg|_{x=x_{10}} &= \frac{W_2(\sigma_{10}^{(1)},\sigma_{20}^{(1)}) - W_2(\sigma_{1+}^{(1)},\sigma_{2+}^{(1)})}{\sigma_{20}^{(1)}-\sigma_{2+}^{(1)}}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Индекс 1 указывает номер скачка, индексы 0 и плюс соответствуют значению насыщенности на скачке со стороны трехфазной и двухфазной зон, W_i — скорость фильтрации соответствующей фазы. Учитывая, что $\sigma_{1+}=0$ и $W_i(\sigma_1,\sigma_2) = Wf_i(\sigma_1,\sigma_2)$, вместо (2.16) получим (2.17)

$$
m\frac{dx}{dt}\bigg|_{x=x_{10}} = W\frac{f_1(\sigma_{10}^{(1)},\sigma_{20}^{(1)})}{\sigma_{10}^{(1)}}, \qquad m\frac{dx}{dt}\bigg|_{x=x_{10}} = W\frac{f_2(\sigma_{10}^{(1)},\sigma_{20}^{(1)}) - f_2(\sigma_{1+}^{(1)},\sigma_{2+}^{(1)})}{\sigma_{20}^{(1)}-\sigma_{2+}^{(1)}}
$$

Уравнения (2.15) и (2.17) для искомой координаты фронта η_{10}, насыщенностей на фронте $\sigma_{10}^{(1)}$ и $\sigma_{20}^{(1)}$ и насыщенностей за фронтом $\sigma_{2+}^{(1)}$ замыкаются уравнением (2.14), которое на фронте имеет вид

$$
2\eta_{10} = -C_3 f'(\sigma_{2+}^{(1)}) \tag{2.18}
$$

Уравнениями (2.15) и (2.17), (2.18) полностью определяются искомые величины на первом скачке.

Для второго фронта (границы раздела между двухфазной зоной и однородной жидкостью) из распределения насыщенности (2.14) имеем

$$
2\eta_{20} = -C_3 f'(\sigma_{20}^{(2)}) \tag{2.19}
$$

Второе условие получим, рассматривая материальный баланс вытесняющей жидкости 2

$$
m\sigma_{20}^{(2)}\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}\right) \tag{2.20}
$$

Отсюда имеем

$$
2\eta_{20} = -C_3 f(\sigma_{20}^{(2)}) \,/\, \sigma_{20}^{(2)} \tag{2.21}
$$

Сравнивая (2.19) и (2.21), получим известное соотношение Баклея — Леверетта для определения фронтовой насыщенности $\sigma_{20}^{(2)}$

$$
f'(\sigma_{20}^{(2)}) = f(\sigma_{20}^{(2)})/\sigma_{20}^{(2)} \tag{2.22}
$$

Перейдем к определению постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Подставляя решения (2.6), (2.8) и (2.9) в соответствующие условия (1.11)—(1.13) для давлений и скоростей фильтрации, будем иметь

$$
C_1 = C_3 = -\frac{p^\circ - p_0}{A(\eta_{10}) + B(\eta_{10},\sigma_{20}) + F(\eta_{20},\infty)\exp(\alpha\gamma\eta_{20}^{2-b})}
$$

$$
C_2 = p^\circ, \qquad C_5 = C_3\exp(\alpha\gamma\eta_{20}^{2-b})
$$

$$
C_4 = p_1 + C_1 A(\eta_{20}), \quad C_6 = p_0 - C_5 F(\eta_{20},\infty).
$$

Подставляя значения постоянных в (2.6), (2.8) и (2.9), получим окончательные выражения для распределения давления в зонах трех-, двух- и однофазного движения

$$p^{(1)} = p^\circ - \frac{(p^\circ - p_0)A(\eta)}{A(\eta_{10}) + B(\eta_{10}, \eta_{20}) + F(\eta_{20}, \infty)\exp(\alpha\gamma\eta_{20}^{2-b})}$$

$$p^{(2)} = p^\circ - \frac{(p^\circ - p_0)[B(\eta_{10}, \eta) + A(\eta_{10})]}{[A(\eta_{10}) + B(\eta_{10}, \eta_{20}) + F(\eta_{20}, \infty)\exp(\alpha\gamma\eta_{20}^{2-b})]}$$

$$p^{(3)} = p_0 - \frac{(p^\circ - p_0)\exp(\alpha\gamma\eta_{20}^{2-b})[F(\eta_{20}, \infty) - F(\eta_{20}, \eta)]}{A(\eta_{10}) + B(\eta_{20}, \eta_{10}) + F(\eta_{20}, \infty)\exp(\alpha\gamma\eta_{20}^{2-b})}$$

Окончательно можно наметить следующий ход решения задачи. Прежде всего из (2.15) и (2.17), (2.18) определяются $\sigma_{10}^{(1)}$, $\sigma_{20}^{(1)}$, $\sigma_{2+}^{(1)}$ и η_{10}, затем из (2.22) и (2.21) определяются $\sigma_{20}^{(2)}$ и η. После этого можно построить распределение насыщенности и давления в соответствующих областях.

Заметим, что изложенный способ позволяет решать задачу о фильтрации трехкомпонентной сжимаемой смеси; однако в этом случае системы уравнений, описывающие процесс фильтрации, будут нелинейными, и результаты можно получить лишь численными методами.

С помощью проведенной в работе методики значительно облегчается и упрощается получение решения задач многофазной фильтрации. Изложенная задача может найти приложение в практике разработки газоконденсатных месторождений и месторождений газированной нефти.

Поступило 10 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Стклянин Ю. И., Чарный И. А. Движение трехкомпонентной жидкости в пористой среде. Научно-техн. сб. по добыче нефти. Гостоптехиздат, 1960, вып. 9.
2. Филинов М. В. Вытеснение одной жидкости другой жидкостью с образованием зоны двухфазного течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
3. Филинов М. В. О вытеснении воды газом в неоднородном пласте. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.