

О ФОРМИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНОГО СМЕШЕНИЯ В АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ СЛЕДЕ

Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, В. Т. КИРЕЕВ

(Москва)

Рассматривается нестационарное, изотермическое течение в следе за телом, на которое набежала ударная волна. Это течение изучается при достаточно большом удалении от тела, когда влиянием последнего на внешний поток, как и в соответствующей стационарной задаче [1, 2], можно пренебречь. Анализ проводится для ламинарного и турбулентного смешений при плоской и осевой симметрии.

В § 1 путем использования характеристик системы уравнений, состоящей из уравнения количества движения, записанного на оси следа, и интегрального уравнения, приближенно определяется граница, разделяющая стационарное и нестационарное течения. Отмечается, что нестационарное течение имеет место между этой границей и линией отмеченных частиц, которая в момент схода ударной волны с тела совпадала с ней.

В § 2 показана возможность расчета течения в этой области при помощи характеристик указанной выше системы уравнений. Получены некоторые частные решения последней.

Далее, в §§ 3 и 4 приводятся точные решения, соответствующие некоторым областям течений, выявленным в §§ 1 и 2.

В § 3 приведены точные решения линейной системы уравнений для больших значений времени, когда скорость в следе близка к скорости частиц за ударной волной.

В § 4 на основе анализа, проведенного в § 2 и ранее в [3], получено точное решение нелинейной системы уравнений, описывающее развитие смешения вблизи указанной линии отмеченных частиц для плоского турбулентного течения. Это решение сравнивается с соответствующим приближенным решением § 2. При этом показана хорошая точность последнего. Сравнение профилей горизонтальной составляющей скорости с профилями, полученными в этом, предыдущем параграфе и используемым [4] в методе интегральных соотношений показало их удовлетворительное совпадение.

§ 1. При набегании ударной волны на тело, имеющее конечный размер вдоль движения волны, в пространстве между телом и ударной волной происходит формирование аэродинамического следа, течение в котором на достаточно большом расстоянии от тела описывается уравнениями расхода и количества движения

$$\partial y^i u / \partial x + \partial y^i v / \partial y = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{y^i} \frac{\partial y^i \tau}{\partial y} \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$v = 0, \quad \partial u / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.3)$$

$$u = U, \quad \partial u / \partial y = 0 \quad \text{при } y = y^*(x, t), \quad y \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Здесь x — расстояние от тела, t — время, ρ — плотность, u и v — составляющие скоростей по ортогональным осям x , y ; для плоского течения $i = 0$, для осесимметричного $i = 1$; U — скорость частиц за ударной волной во внешнем потоке, который принимается однородным; касательное напряжение

$$\tau = \mu \partial u / \partial y, \quad \tau = \rho \kappa y^* (U - u_{10}) \partial u / \partial y \quad (1.5)$$

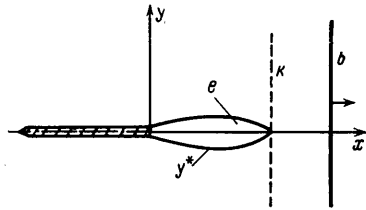
соответственно [2] при ламинарном и турбулентном смешении (μ — вязкость, $y^*(x, t)$ — граница следа, $u_{\perp 0}$ — скорость на его оси, κ — константа, определяемая из опыта).

Очевидно, что тривиальное решение (1.1) — (1.5)

$$u \equiv U \quad \text{при } x \geq Ut \quad (1.6)$$

будет иметь место в пространстве от ударной волны b вплоть до линии отмеченных частиц K (фиг. 1), соответствующих частицам за ударной волной в момент схода последней с тела. Эти частицы первыми начинают участвовать в процессе смешения.

Для приближенного определения характера течения в области e между этой линией отмеченных частиц и телом, так же как при решении стационарных задач [4] о спутном следе и при определении установления стационарного смешения в струях [5], используем уравнение (1.2) на оси следа и интегральное соотношение



Фиг. 1

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + (U - u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} = - \frac{1}{\rho y^i} \frac{\partial y^i \tau}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{y^*} y^i u_1 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y^*} y^i u_1 (U - u_1) dy = 0$$

$$(u_1 = U - u_2, u_0 = u_1 \text{ при } y = 0) \quad (1.8)$$

Представим отношение скорости u_1 к ее значению на оси следа в виде

$$u_1/u_0 = f(r), \quad r = y/y^* \quad (1.9)$$

где f удовлетворяет (1.3), (1.4).

Подставляя (1.9) в (1.7) и (1.8) с учетом (1.5), получим два дифференциальных уравнения для определения двух функций u_0 и $V_0 = u_0 y^{*i+i}$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} V_0 (U - A_i u_0) = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} + (U - u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} = -H \quad (1.10)$$

$$A_i = \int_0^1 r^i f^2 dr \left(\int_0^1 r^i f dr \right)^{-1}, \quad B_i = - \frac{(r^i f)'}{r'} \Big|_{r=0} \quad (1.11)$$

$$H = \kappa^\alpha \nu^{1-\alpha} B_i \frac{u_0^\beta}{V_0^\omega}, \quad \beta = 1 + \alpha + \omega, \quad \omega = \frac{2 - \alpha}{1 + i}$$

($\alpha = 0$ в случае ламинарного, $\alpha = 1$ в случае турбулентного течений).

Система уравнений (1.10), (1.11) имеет два семейства характеристик

$$dx/dt = U - u_0, \quad dx/dt = U - A_i u_0 \quad (1.12)$$

вдоль которых соответственно выполняются условия

$$du_0 = - \frac{H}{U - u_0} dx, \quad du_0 = \frac{1 - A_i u_0}{A_i} \frac{dV_0}{V_0} - \frac{H}{U - A_i u_0} dx \quad (1.13)$$

Если взять $f(r)$ в (1.9) в виде полинома четвертой степени [4],

$$f(r) = 1 - r^2(6 - 8r + 3r^2)$$

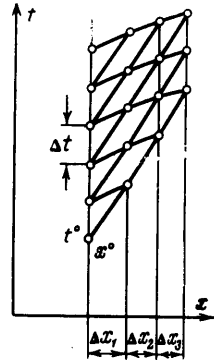
то

$$A_0 = 5/7 \quad (i = 0), \quad A_1 = 11/21 \quad (i = 1) \quad (1.14)$$

Отсюда видно, что угол наклона первого семейства характеристик из (1.12) к оси t меньше, чем второго семейства.

Используя (1.12) и (1.13), можно показать, что, если, начиная с некоторого момента времени t^0 в некотором сечении x^0 параметры потока не зависят от времени, то стационарное течение будет иметь место от сечения x^0 вплоть до характеристики первого семейства из (1.12), проходящей через точку x^0, t^0 .

Для этого проведем из точек, взятых с постоянным шагом Δt в сечении $x = x^0 = \text{const}$, элементы характеристик обоих семейств и определим методом конечных разностей значения V_0 и u_0 в точках пересечения этих характеристик (Фиг. 2). Так как значения V_0 и u_0 одинаковы во всех точках сечения x^0 при $t \geq t^0$ и шаг Δt между ними постояен, то из (1.12) видно, что указанные элементы характеристик пересекутся на одинаковом расстоянии Δx_1 от сечения $x = x^0$. Далее, с учетом этого из (1.13) видно, что во всех точках сечения $x = x^0 + \Delta x_1$ значения V_0 и u_0 изменяются на ΔV_0 и Δu_0 и будут постоянными во всех точках этого сечения, вплоть до элемента характеристики первого семейства, проведенного из точки x^0, t^0 . Точно так же значения V_0 и u_0 будут постоянными в сечении $x = x^0 + \Delta x_1 + \Delta x_2$ и т. д. Устремив Δt к нулю, видим, что стационарное течение будет иметь место во всех точках области между сечением $x = x^0 = \text{const}$ и указанной характеристикой.



Фиг. 2

Известно [1, 2], что при стационарном течении в следе за телом

$$I_i = \frac{W_i}{\rho} = 2\pi^i \int_0^\infty y^i u_i (U - u_i) dy \equiv \text{const} \quad (1.15)$$

Здесь W_i — лобовое сопротивление тела.

Для получения уравнения характеристики, разделяющей стационарное и нестационарное течения, в конечном виде удобно ввести безразмерные параметры

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{J_i}{U^2}\right)^{1/(1+i)} X_j, & t &= \frac{1}{U} \left(\frac{J_i}{U^2}\right)^{1/(1+i)} \tau_j, & u_0 &= U u_j \\ y &= (\kappa^{\alpha} \nu^{1-\alpha} B_i U^{\alpha i/(1+i)-1} J_i^{i/(1+i)})^{1/(2-\alpha)} U^{-1/(1+i)} Y_j \\ V_0 &= (\kappa^{\alpha} \nu^{1-\alpha} B_i U^{\alpha i/(1+i)-1} J_i^{i/(1+i)})^{(1+i)/(2-\alpha)} V_j \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь J_i — постоянные величины, размерности которых совпадают с размерностями I_i из (1.15),

$$\begin{aligned} j &= 1 \quad \text{при } \alpha = 0, i = 0; & j &= 2 \quad \text{при } \alpha = 0, i = 1 \\ j &= 3 \quad \text{при } \alpha = 1, i = 0; & j &= 4 \quad \text{при } \alpha = 1, i = 1 \end{aligned}$$

Подставляя (1.16) в (1.10) — (1.13), соответственно получаем

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} V_j (1 - A_i u_j) = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial \tau_j} + (1 - u_j) \frac{\partial u_j}{\partial X_j} = - \frac{u_j^\beta}{V_j^\omega} \quad (1.17)$$

$$\frac{dX_j}{d\tau_j} = 1 - u_j, \quad \frac{dX_j}{d\tau_j} = 1 - A_i u_j \quad (1.18)$$

$$du_j = - \frac{u_j^\beta}{V_j^\omega} \frac{dX_j}{1 - u_j}$$

$$du_j = \frac{1 - A_i u_j}{A_i} \frac{dV_j}{V_j} - \frac{u_j^\beta}{V_j^\omega} \frac{dX_j}{1 - A_i u_j} \quad (1.19)$$

При стационарном течении из (1.17) получаем

$$V_j(1 - A_i u_j) = D_j = \text{const}, \quad \frac{du_j}{dX_j} = - \frac{u_j^\beta}{V_j^\omega (1 - u_j)} \quad (1.20)$$

Заметим, что второе из этих уравнений совпадает с условием на характеристике первого семейства из (1.19).

Пока неизвестно значение J_i в (1.16) удобно выбрать так, чтобы $D_j = 1$ в (1.20). В этом случае из (1.15) следует

$$J_i = \left[\frac{I_i}{2\pi^i} \left(\int_0^1 r^{if} dr \right)^{-1} \right]^{2-\alpha} \frac{\nu^{(\alpha-1)(1+i)}}{\kappa^{\alpha(1+i)} U^{(\alpha-1)(i-1)} B_i^{1+i}} \quad (1.21)$$

Теперь, исключая V_j из (1.20), а из первых уравнений (1.18) — (1.20) значения V_j и dX_j , получаем для характеристики первого семейства в (1.19), примыкающей к стационарному течению,

$$dX_j = - \frac{(1 - u_j) du_j}{u_j^\beta (1 - A_i u_j)^\omega}, \quad d\tau_j = - \frac{du_j}{u_j^\beta (1 - A_i u_j)^\omega} \quad (1.22)$$

Интегрируя (1.22), приходим к параметрической записи уравнения границы, отделяющей стационарную и нестационарную области для течений:

в ламинарном плоском следе $j = 1$ ($\beta = 3, \omega = 2$)

$$\begin{aligned} X_1 = A_0(3A_0 - 2) \ln \frac{1 - A_0 u_1}{u_1} + \frac{A_0(1 - A_0^2 u_1)}{1 - A_0 u_1} - \\ - \frac{1 - 3A_0(1 - A_0 u_1)}{u_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - A_0 u_1}{u_1} \right)^2 + C_{11} \quad (1.23) \\ \tau_1 = 3A_0^2 \ln \frac{1 - A_0 u_1}{u_1} - A_0^3 \frac{u_1}{1 - A_0 u_1} + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - A_0 u_1}{u_1} \right)^2 + 3A_0 \frac{1 - A_0 u_1}{u_1} + C_{21} \end{aligned}$$

в ламинарном осесимметричном следе $j = 2$ ($\beta = 2, \omega = 1$)

$$\begin{aligned} X_2 = \frac{1}{u_2} - (1 - A_1) \ln \frac{1 - A_1 u_2}{u_2} + C_{12} \\ \tau_2 = \frac{1}{u_2} + A_1 \ln \frac{1 - A_1 u_2}{u_2} + C_{22} \quad (1.24) \end{aligned}$$

в турбулентном плоском следе $j = 3$ ($\beta = 3, \omega = 1$)

$$\begin{aligned} X_3 = \frac{1}{2u_3^2} - \frac{1 - A_0}{u_3} + A_0(1 - A_0) \ln \frac{u_3}{1 - A_0 u_3} + C_{13} \quad (1.25) \\ \tau_3 = \frac{1}{2u_3^2} + \frac{A_0}{u_3} + A_0^2 \ln \frac{1 - A_0 u_3}{u_3} + C_{23} \end{aligned}$$

в турбулентном осесимметричном следе $j = 4$ ($\beta = 5/2, \omega = 1/2$)

$$\begin{aligned} X_4 = \left(\frac{1}{u_4} - A_1 \right)^{1/2} \left(\frac{2}{3u_4} + \frac{4}{3} A_1 - 1 \right) + C_{14} \\ \tau_4 = \left(\frac{1}{u_4} - A_1 \right)^{1/2} \left(\frac{2}{3u_4} + \frac{4}{3} A_1 \right) + C_{24} \quad (1.26) \end{aligned}$$

В (1.23) — (1.26) величины C_{1j} и C_{2j} — произвольные постоянные. Отметим, что первые уравнения в этих выражениях, согласно (1.20) и (1.22), совпадают с известными решениями соответствующих стационарных задач методом интегральных соотношений [4].

Ввиду общности характера течения в струе и следе представляет интерес сравнить примененный здесь способ определения границы областей стационарного и нестационарного течения с определением такой границы в [5] для течения в струях. Там, в связи с тем, что первое условие из (1.4) имеет вид $u = 0$ при $y \rightarrow \infty$, можно, используя автомодельные режимы течения, получить такую границу путем анализа в окрестности особых точек обыкновенного дифференциального уравнения, эквивалентного системе уравнений (1.10), (1.11) для струи. В частности, для плоской ламинарной струи уравнение указанной границы в [5] имеет вид

$$\xi_* = {}^{4/3}A_0 = v^{1/3}x^{4/3}J^{-2/3}t^{-1} \quad (1.27)$$

Покажем на этом примере, что определенная таким способом граница будет характеристикой системы, аналогичной (1.10), (1.11), которая для струи имеет вид

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + A_i \frac{\partial}{\partial x} V_0 u_0 = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -H. \quad (1.28)$$

Эта система уравнений имеет характеристики

$$dx/dt = u_0, \quad dx/dt = A_i u_0 \quad (1.29)$$

Так как $A_i < 1$, то таким же путем, как сделано выше, можно показать, что характеристика второго семейства из (1.29) разделяет нестационарные и стационарные области течения. В последней для ламинарной плоской струи

$$u_0 = J_1^{2/3} v^{-1/3} x^{-1/3} \quad (1.30)$$

Подставляя (1.30) в уравнение указанной характеристики, записываем

$$dx/dt = J_1^{2/3} A_0 v^{-1/3} x^{-1/3} \quad (1.31)$$

Значения постоянной J_1 в (1.27), (1.30) и (1.31) приведены в [5] и $x = 0$ при $t = 0$. Проинтегрировав (1.31), получим (1.27) и убедимся в тождественности двух способов определения указанной границы.

§ 2. Теперь перейдем к рассмотрению нестационарного течения между полученной выше характеристикой и линией отмеченных частиц, на которой, согласно (1.6),

$$u_j = 0, \quad V_j = 0, \quad X_j = \tau_j \quad (2.1)$$

При этом полагаем, что на расстоянии x° от тела, равном длине начального участка следа [6], начиная с известного заранее момента времени t° , отсчитанного от момента прохождения линии отмеченных частиц, устанавливается стационарное течение. Отметим, что для очень тонкого тела $x^\circ \approx 0$, а в качестве t° приближенно можно взять время установления стационарного пограничного слоя на торце тела, которое, согласно [7], для плоского ламинарного течения будет

$$t^\circ = lU^{-1} ({}^{35/13} - U/U_0) \quad (2.2)$$

Здесь l — длина тела, U_0 — скорость ударной волны.

Теперь значения произвольных постоянных в (1.23) — (1.26) для тонкого тела приближенно можно определить из условий

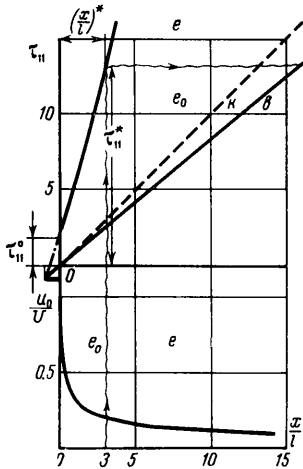
$$X_j = X_j^\circ \approx 0, \quad \tau_j = \tau_j^\circ \quad \text{при } u_j = 1 \quad (2.3)$$

В частности, учитывая, что для пластины длиной l значение I_0 в (1.15) определяется [1] как $I_0 = 1.328\sqrt{vlU^3}$, из (2.2), (1.11), (1.14) — (1.16), (1.21) находим

$$\tau_1^\circ = \frac{48}{5(1.328)^2} \left(\frac{35}{13} - \frac{U}{U_0} \right) \quad (2.4)$$

На фиг. 3 сплошной линией проведена эта характеристика DC для сильной ударной волны ($U/U_0 = 2/(\gamma + 1)$, $\gamma = 1.4$) в (2.4) и пунктиром — траекторная линии отмеченных частиц; $\tau_{11} = 0.1836 \tau_1$.

Для расчета течения при помощи характеристик (1.18), (1.19) в рассматриваемой здесь области e необходимо определить течение в окрестности линии отмеченных частиц, так как последняя обладает той особенностью, что характеристики (1.18), (1.19), проведенные из ее точек, согласно (2.1), совпадают с этой линией. В этой связи, записывая уравнения (1.17) в системе координат, связанной с линией отмеченных частиц,



Фиг. 3

получим
$$X_{j0} = \tau_j - X_j, \quad \tau_{j0} = \tau_j \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau_{j0}} + A_i \frac{\partial}{\partial X_{j0}} V_j u_j = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tau_{j0}} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial X_{j0}} = - \frac{u_j^\beta}{V_j^\omega}$$

Эта система уравнений допускает автомодельное решение

$$u_j = u_j(\xi), \quad V_j = X_{j0}^{1/\omega} F_j(\xi), \quad \xi = X_{j0}/\tau_{j0} \quad (2.7)$$

Подставив (2.7) в (2.6), получим

$$\xi(u_j - \xi)u_j' = - \frac{u_j^\beta}{F_j^\omega}, \quad (2.8)$$

$$\xi(A_i u_j - \xi)F_j' + \frac{A_i}{\omega} u_j F_j + A_i \xi F_j u_j' = 0$$

с граничным условием

$$u_j = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad (2.9)$$

При этом из (2.9) видно, что второе условие (2.1) автоматически удовлетворяется. Из (2.8) с учетом (2.9) следует, что указанная выше особенность линии отмеченных частиц ($\xi = 0$) естественно присутствует и в (2.8). Вблизи этой особой точки $\xi = 0$ система (2.8) имеет решение

$$u_j = \xi K_{0j}, \quad F_j = \xi^{(\beta-2)/\omega} K_{1j} \quad (2.10)$$

Постоянные K_{0j} и K_{1j} определяются из (2.8) при подстановке (2.10)

$$K_{0j} = \frac{\beta - 2}{(\beta + \omega - 1)A_i}, \quad K_{1j} = \left(\frac{K_{0j}^{\beta-1}}{1 - K_{0j}} \right)^{1/\omega} \quad (2.11)$$

Интересно отметить, что решение (2.10), не зависящее от условий при $\xi = 1$, не содержащее произвольных постоянных и поэтому справедливое при всех $\tau_j > 0$, имеет продолжение, содержащее две произвольные постоянные D_1 и D_2 . В качестве примера выишем решение (2.10) с указанным продолжением для плоского турбулентного течения ($j = 3$)

$$u_3 = 7/15 \xi [1 + \xi^{19/16} (D_1 \cos \omega^\circ z + D_2 \sin \omega^\circ z)]$$

$$V_3 = \frac{7^2}{8 \cdot 15} X_{30} \xi [1 + \xi^{19/16} (D_1^\circ \cos \omega^\circ z + D_2^\circ \sin \omega^\circ z)] \quad (2.12)$$

$$z = -\ln \xi, \quad \omega^\circ = \sqrt[3]{2 - (19/16)^2}$$

$$D_1^\circ = (\omega^\circ + 23/8)D_2 - 19/16 D_1, \quad D_2^\circ = -19/16 D_2 - (\omega^\circ - 23/8)D_1$$

Эти выражения получены путем нахождения решения системы уравнений (2.8), линеаризованного относительно ее частного решения (2.10).

Учтя в окрестности линии отмеченных частиц (2.10), (2.11), можно путем использования характеристик (1.18) и условий вдоль них (1.19) провести расчет значений V_j и u_j в области e . При этом указанные величины при $\tau_j \geq \tau_j^0$, очевидно, будут возрастать от нуля на линии отмеченных частиц до соответствующих стационарных значений на характеристике DC .

§ 3. Получим решение (1.1) — (1.5) при ламинарном течении для больших значений времени $t \geq t^*$, когда скорость в следе мало отличается от скорости частиц за ударной волной (область e на фиг. 3), т. е. $u_1 \ll U$ (согласно [2], при этом $x/l \geq 3$ для пластины).

В этом случае из (1.1) — (1.5) приходим к системе уравнений

$$-\frac{\partial y^i u_1}{\partial x} + \frac{\partial y^i v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + U \frac{\partial u_1}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + i \frac{v}{y} \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$v = 0, \quad \partial u_1 / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Интегральное соотношение (1.8) примет вид

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \left(\Phi(x, t) = \int_0^y y^i u_1 dy \right) \quad (3.3)$$

Оно имеет семейство характеристик

$$dx/dt = U \quad (3.4)$$

Вдоль этих характеристик величина $\Phi(x, t)$ имеет постоянное значение. Это значение, согласно изложенному в предыдущем параграфе, возрастает в некоторый момент времени от нуля на линии отмеченных частиц до стационарного значения. Поэтому пусть

$$2U\Phi(x, t^*) = L(Ut^* - x) \quad \text{при } t = t^* \quad (3.5)$$

$$L = 0 \quad \text{при } x = Ut^*, \quad L = I_i = \text{const} \quad \text{при } x \leq x^*$$

Тогда решением (3.3) с условием (3.5) будет

$$2U\Phi(x, t) = L(Ut - x) \quad (3.6)$$

С учетом (3.6) представим решение (3.1), (3.2) в виде

$$u = \frac{L(Ut - x)}{U(vt)^{1+i/2}} \varphi_i \left(\frac{y}{\sqrt{vt}} \right), \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{vt}} \quad (3.7)$$

и получим

$$\varphi_i'' + \left(\frac{\eta}{2} + \frac{i}{\eta} \right) \varphi_i' + \frac{1+i}{2} \varphi_i = 0 \quad (3.8)$$

с условиями

$$2 \int_0^\infty \eta^i \varphi_i d\eta = 1, \quad \varphi_i' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \varphi_i = 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

Известно, что решением (3.8) с условиями (3.9) является

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \eta^i \exp \frac{-\eta^2}{4} d\eta \right)^{-1} \exp \frac{-\eta^2}{4} \quad (3.10)$$

Непосредственными выкладками легко убедиться, что нестационарное решение (3.7) — (3.10) вдоль направления

$$t = x/U + t^* - x^*/U \quad (3.11)$$

совпадает со стационарным решением (3.1) — (3.3) при $x \geq x^*$. Отметим также, что характеристика (3.4), (3.11) совпадает с характеристиками (1.18), если в последних соотношениях пренебречь (как это сделано выше) величиной u_0 по сравнению с U .

Решение (3.7) — (3.10) легко распространяется на случай плоского ($i = 0$) турбулентного течения, если, согласно [2], вместо ν подставить постоянное в этом случае значение кажущейся кинематической вязкости.

§ 4. Наличие при анализе методом интегральных соотношений вблизи линии отмеченных частиц решения типа (2.10) наводит на мысль о возможности получения вблизи этой линии простых решений системы уравнений (1.1), (1.2) с граничными условиями (1.3), (1.4), (1.6).

Рассмотрим сначала плоское турбулентное течение. В системе координат, связанных с линией отмеченных частиц,

$$x_0 = Ut - x, \quad y_0 = y, \quad t_0 = t \quad (4.1)$$

уравнения (1.1), (1.2) и условия (1.3), (1.4), (1.6) в этом случае будут

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t_0} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} + v \frac{\partial u_1}{\partial y_0} = \kappa y^* u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_0^2} \quad (4.2)$$

$$v = 0, \quad \partial u_1 / \partial y_0 = 0 \quad \text{при } y_0 = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при } x_0 = 0 \quad (u_0 = u_1 \quad \text{при } y = 0) \quad (4.4)$$

По аналогии со стационарным случаем [2], на основании анализа размерностей установив характер изменения ширины следа y^* и скорости u_0 на его оси. Система уравнений (4.2) и граничные условия (4.3), (4.4) не содержат размерных постоянных величин, из которых можно образовать размерности длины, времени и скорости, поэтому [8]

$$y^* = k_1 x_0, \quad u_0 = k_0 x_0 / t_0 \quad (4.5)$$

(где k_1 и k_0 — некоторые безразмерные постоянные), и решение (4.2) с граничными условиями (4.3), (4.4) будем искать в виде

$$\psi_3 = \kappa_1^{1/2} \frac{x_0^2}{t_0} \Phi_3(\eta_3), \quad \eta_3 = \frac{y}{\kappa_1^{1/2} x_0}, \quad \kappa_1 = k_1 \kappa \quad (4.6)$$

$$\left(u_3 = \frac{\partial \psi_3}{\partial y_0}, \quad v_3 = -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_0}, \quad u_3 = \frac{x_0}{t_0} \Phi_3', \quad k_0 = \Phi_3' |_{y=0} = \Phi_{30}' \right)$$

Подставляя (4.6) в (4.2) — (4.4), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\Phi_{30}' \Phi_3''' + 2\Phi_3 \Phi_3'' + \Phi_3' (1 - \Phi_3') = 0 \quad (4.7)$$

с граничными условиями

$$\Phi_3 = 0, \quad \Phi_3'' = 0 \quad \text{при } \eta_3 = 0, \quad \Phi_3' = 0 \quad \text{при } \eta_3 \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

Это уравнение не содержит независимой переменной η_3 , поэтому его удобно переписать в виде

$$\Phi_{30}' \frac{d}{d\Phi_3} \left(\Phi_3' \frac{d\Phi_3'}{d\Phi_3} \right) + 2\Phi_3 \frac{d\Phi_3'}{d\Phi_3} + 1 - \Phi_3' = 0 \quad (4.9)$$

Последнее имеет отличное от нуля решение, удовлетворяющее (4.8)

$$\Phi_3' = 1/2 - \Phi_3^2 \tag{4.10}$$

интегрируя которое по η с учетом (4.8), получаем

$$\Phi_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \exp \sqrt{2} \eta_3}{1 + \exp \sqrt{2} \eta_3}, \quad \Phi_3' = \frac{2 \exp \sqrt{2} \eta_3}{(1 + \exp \sqrt{2} \eta_3)^2} \tag{4.11}$$

Возвращаясь к (4.6), имеем в конечном виде

$$\psi_3 = -\frac{\kappa_1^{1/2}}{\sqrt{2}} \frac{x_0^2}{t_0} \frac{1 - \exp \sqrt{2} \eta_3}{1 + \exp \sqrt{2} \eta_3}, \quad u_3 = \frac{x_0}{t_0} \frac{2 \exp \sqrt{2} \eta_3}{(1 + \exp \sqrt{2} \eta_3)^2} \tag{4.12}$$

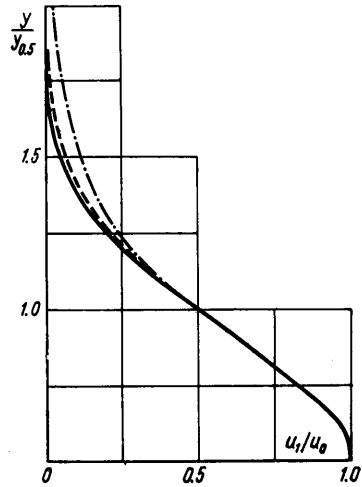
Решение (4.12) описывает нестационарное развитие смешения. Наличие такого типа течений (для другой гипотезы Прандтля о турбулентном трении) ранее отмечалось в [3].

Полученное в конечном виде решение (4.12) может быть использовано для опробирования примененного в §§ 1 и 2 приближенного метода интегральных соотношений. С этой целью сравним полученные методом интегральных соотношений и в этом параграфе значения скорости на оси следа вблизи линии отмеченных частиц. В первом случае из (2.10), (2.11), (2.7) для $j = 3$ ($\beta = 3, \omega = 2$) и во втором из (4.12), (4.1) соответственно имеем

$$u_{30} = 7/15(U - x/t), \quad u_{30} = 1/2(U - x/t) \tag{4.13}$$

т. е. удовлетворительное совпадение точного и приближенного решений.

Сравним также профиль горизонтальной составляющей скорости (фиг. 4), соответствующий (4.12) (штрих-пунктирная линия), профиль, соответствующий линеаризованному (асимптотическому для больших t) решению (3.7) — (3.10), который, как легко видеть из этих выражений, совпадает с профилем при стационарном течении [1, 2] (пунктирная линия) с профилем (1.14), использованным при анализе методом интегральных соотношений. На фиг. 4 по оси абсцисс отложено отношение относительной скорости $u_1 = U - u$ к ее значению на оси u_0 , а по оси ординат — отношение ординаты y к ее значению $y_{0.5}$, при котором $u_1 / u_0 = 0.5$. Из этих графиков видно, что приведенные профили скоростей мало отличаются один от другого.



Фиг. 4

Приведем также аналогичные (4.6) и (4.7) автомодельные выражения для функции тока ψ_j и обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие развитие течения вблизи линии отмеченных частиц, которые первыми вступили в смешение:

для плоского ламинарного течения

$$\psi_1 = v^{1/2} \frac{x_0}{t_0^{1/2}} \Phi_1(\eta_1), \quad \eta_1 = \frac{y_0}{\sqrt{v} t_0} \tag{4.14}$$

$$\Phi_1''' + (\Phi_1 + 1/2 \eta_1) \Phi_1'' + \Phi_1'(1 - \Phi_1') = 0$$

для осесимметричного ламинарного течения

$$\psi_2 = \nu x_0 \Phi_2(\eta_2), \quad \eta_2 = \frac{y_0}{\sqrt{\nu t_0}} \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\Phi_2'}{\eta_2}\right)'' + \left(\frac{\Phi_2}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_2}\right)\left(\frac{\Phi_2'}{\eta_2}\right)' + \frac{\Phi_2'}{\eta_2}\left(1 - \frac{\Phi_2'}{\eta_2}\right) = 0$$

для осесимметричного турбулентного течения

$$\psi_4 = \kappa_1^2 \frac{x_0^3}{t_0} \Phi_4(\eta_4), \quad \eta_4 = \frac{y_0}{\kappa_1 x_0} \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{\Phi_4'}{\eta_4}\right)_{\eta_4=0} \left[\left(\frac{\Phi_4'}{\eta_4}\right)'' + \frac{1}{\eta_4} \left(\frac{\Phi_4'}{\eta_4}\right)' \right] + 3 \frac{\Phi_4}{\eta_4} \left(\frac{\Phi_4'}{\eta_4}\right)' + \frac{\Phi_4'}{\eta_4} \left(1 - \frac{\Phi_4'}{\eta_4}\right) = 0$$

Укажем, что нелинейное дифференциальное уравнение (4.14) имеет частные решения, не удовлетворяющие (4.8),

$$\Phi_1 = -a_1 \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{1/2} \frac{1 - \exp \eta_1 2 \sqrt{a_2 a_3}}{1 + \exp \eta_1 2 \sqrt{a_2 a_3}} - \frac{1}{2} \eta_1 \quad (4.17)$$

где постоянные величины могут принимать значения

$$a_1 = 3/4, \quad a_2 = 4/3, \quad a_3 = 1/32, \quad \text{или} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3/4, \quad a_3 = 1/6$$

В заключение отметим, что приведенные в работе результаты относительно плоского ламинарного течения легко распространяются на неизотермическое течение при числе Прандтля, равном единице [7], путем введения переменных Дородницына и новой функции вместо вертикальной составляющей скорости.

Интересно, что нестационарное течение в следе за тонкой пластиной будет автомодельным в пространстве между концом пластины и линией отмеченных (за ударной волной в момент схода последней с пластины) частиц. Причем автомодельность будет иметь место до тех пор, пока на течение у конца пластины не будет влиять характер течения у ее начала, т. е. пока к концу пластины не подойдет, согласно [8], линия, состоящая из частиц, находившихся непосредственно за ударной волной, когда последняя была на носике пластины. Анализ этого автомодельного течения, в частности, может быть проведен методом интегральных соотношений.

Отметим также, что рассмотренная задача аналогична задаче о течении в следе за телом на достаточно большом расстоянии от него при импульсивном приведении последнего в движение с постоянной скоростью.

Поступило 14 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
3. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. Применение уравнений нестационарного смешения к некоторым задачам аэродинамики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. Гиневский А. С. Турбулентные неизотермические струйные течения сжимаемого газа. Сб. «Промышл. аэродинамика», Оборонгиз, 1962, № 23.
5. Киреев В. Т. Об установлении стационарного смешения в струях, Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
6. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
7. Демьянов Ю. А. Формирование пограничного слоя на пластине с движущимся скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
8. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.
9. Lam S. A., Crosso L. Note on the shock-induced unsteady laminar boundary layer on a semi-infinite flat plate. J. Aeronaut. Sci., 1959, vol. 26, No. 1.