ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

М. Р. УХОВСКИЙ

(*Ростов-на-Дону*)

В данной работе доказывается теорема существования и единственности решения осесимметричной задачи с начальными данными для уравнений Эйлера в случае несжимаемой жидкости. Рассматриваются случай непроницаемой стенки, а также задача протекания в постановке, данной в [1]. Однозначная разрешимость доказана «в целом» при одних лишь предположениях гладкости данных и для всех значений времени t. Существование на малом отрезке времени в случае непроницаемой стенки было доказано для общей трехмерной задачи в [2, 3]. Для доказательства применяется метод, аналогичный развитому в [1] применительно к плоским течениям. Априорная оценка вихря, использованная в настоящей работе, ранее была получена в [4].

§ 1. Постановка задачи, формулировка основного результата. 1.1°. Рассматривается задача об определении осесимметричных скорости $\mathbf{v}(x,t)$ и давления $P(x, t)$, удовлетворяющих в любой момент времени $t\in[0,T]$ (T — любое положительное число) в любой точке $x=(x_1, x_2, x_3)$ ограниченной связной трехмерной области Ω (граница которой Σ — поверхность вращения плоской кривой вокруг оси Ox_3) системе уравнений

$$\partial\mathbf{v}/\partial t+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\nabla P+\mathbf{F}(x,t),\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{1.1}$$

начальным и граничным условиям

$$\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{a}(x);\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_\Sigma=\gamma(x,t),\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}|_{\Sigma^-}=\pi(x,t) \tag{1.2}$$

Здесь векторы $\mathbf{F}(x,t)$, $\mathbf{a}(x)$ и функция $\gamma(x,t)$ заданы и осесимметричны в Ω и на Σ соответственно; $\pi(x, t)$ — вихрь осесимметричного вектора, заданный на Σ^-; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Σ; Σ^- — часть поверхности Σ, на которой $\gamma(x, t)<0$; ту часть Σ, на которой $\gamma(x, t)\geqslant 0$, обозначим Σ^+.

Вектор $\mathbf{v}=(v_r, v_\varphi, v_z)$ называется осесимметричным, если $v_\varphi=0$, а v_r и v_z не зависят от φ; функция называется осесимметричной, если она не зависит от φ.

1.2°. В дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия.

(A) Поверхность Σ состоит из n замкнутых компонент $\Sigma_1, \Sigma_2,\ldots,\Sigma_n$ класса $Л_{3,\alpha}$, из которых первые q $(0\leqslant q\leqslant n)$ гомеоморфны торам, а последние $n-q$ гомеоморфны сферам, причем Σ_n охватывает остальные. Поверхность Σ^- может содержать только целые компоненты[1] Σ, число которых, в частности, может быть равно нулю (отсутствие протекания).

[1] Это ограничение (означающее, что $\gamma(x, t)$ не обращается в нуль на Σ^-) не является существенным и принимается ради простоты изложения.

(B) Данные задачи обладают следующей гладкостью:

$$\mathbf{F}(x,t) \in C_{1,\alpha}(\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{F}(x,t)}{\partial t} \in C_{0,\alpha}(\Omega); \quad \mathbf{a}(x) \in C_{2,\alpha}(\Omega)$$

$$\gamma(x,t) \in C_{2,\alpha}(\Sigma), \quad \pi(x,t) \in C_{1,\alpha}(\Sigma^-)$$

$$\frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial t} \in C_{1,\alpha}(\Sigma), \quad \frac{\partial \pi(x,t)}{\partial t} \in C_{0,\alpha}(\Sigma^-)$$

Здесь $C_{l,\alpha}(\Omega)$ — класс функций, имеющих в Ω все производные l-го порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α; $C_{l,\alpha}(\Sigma)$ — класс функций, определенных на Σ и являющихся предельными значениями функций класса $C_{l,\alpha}(\Omega)$.

Принадлежность $\mathbf{F}$, γ, π указанным классам предполагается в смысле равномерной ограниченности по $t \in [0, T]$ соответствующих норм.

(C) Данные задачи связаны следующими условиями согласования:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}|_\Sigma = \gamma(x,0), \quad \oint_\Sigma \gamma(x,t)\,d\Sigma = 0,$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{a}|_{\Sigma^-} = \boldsymbol{\pi}(x,0), \quad \oint_{\Sigma_i^-} \boldsymbol{\pi}(x,t)\mathbf{n}\,d\Sigma = 0 \tag{1.3}$$

Здесь Σ_i^- — любая из компонент Σ^-. Нетрудно убедиться, что выполнение (1.3) необходимо для существования непрерывно дифференцируемых решений задачи (1.1), (1.2).

(D) При $t = 0$ на Σ^- выполняется условие согласования, необходимое для существования решений, имеющих непрерывно дифференцируемый вихрь

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial t} + a_\xi \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \xi} + a_\eta \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \eta} + a_n \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{a}}{\partial n} = (\boldsymbol{\pi}, \nabla)\mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{F} \tag{1.4}$$

Здесь ξ, η — любые взаимно перпендикулярные направления, касательные к Σ^-. Соотношение (1.4) получается, если взять вихрь от обеих частей (1.1.1) и перейти к пределу по x, t в полученном равенстве.

Основной результат работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть выполнены условия (A) — (D). Тогда в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$ существует и притом единственное решение задачи (1.1), (1.2) — вектор $\mathbf{v}(x, t) \in C_{1,\alpha}(Q_T)$, вихрь которого $\boldsymbol{\omega}(x, t) \in C^{(1)}(Q_T)$.

1.3°. В проекциях на оси цилиндрической системы координат r, φ, z задача (1.1), (1.2) запишется в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + F_r(r,z,t) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + F_z(r,z,t) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \qquad \text{в } D \times [0, T] \tag{1.7}$$

$$v_r(r,z,0) = a_r(r,z), \qquad v_z(r,z,0) = a_z(r,z) \tag{1.8}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_S \equiv (v_r n_r + v_z n_z)|_S = \gamma(r,z,t) \tag{1.9}$$

$$(\partial v_r/\partial z - \partial v_z/\partial r)|_{S^-} = \pi(r,z,t) \tag{1.10}$$

Здесь D, S, S^- — сечения полуплоскостью, проходящей через ось z соответственно Ω, Σ, Σ^-. Кривая S состоит из $q+1$ гомеоморфных окружности контуров $S_1, \ldots, S_{q+1}$, из которых первые q сечения указанной полуплоскостью гомеоморфных тору поверхностей $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_q$, а контур S_{q+1} охватывает остальные и состоит из отрезков оси вращения и сечений полуплоскостью гомеоморфных сфере поверхностей $\Sigma_{q+1}, \ldots, \Sigma_n$.

Условия согласования запишутся в виде

$$\partial a_r / \partial r + \partial a_z / \partial z + a_r / r = 0 \tag{1.11}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}|_S \equiv (a_r n_r + a_z n_z)|_S = \gamma(r, z, 0), \qquad \oint_S r\gamma(r, z, t)\, dS = 0 \tag{1.12}$$

$$(\partial a_r/\partial z - \partial a_z/\partial r)|_{S^-} = \pi(r, z, 0) \tag{1.13}$$

условие (1.55) выполняется автоматически, а условие (1.4) примет вид

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + a_S \frac{\partial \pi}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right) = \frac{a_r}{r}\pi + \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \tag{1.14}$$

при $t = 0$ на S^-.

1.4°. Взяв вихрь от обеих частей (1.1.1), придем к следующей задаче, эквивалентной, как нетрудно проверить, задаче (1.1), (1.2).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}, \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}(x, t), \qquad \mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{F} \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{\omega}|_{\Sigma^-} = \boldsymbol{\pi}(x, t), \qquad \boldsymbol{\omega}|_{t=0} = \operatorname{rot}\mathbf{a}(x) \tag{1.16}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_\Sigma = \gamma(x, t) \tag{1.17}$$

$$\oint_{S_k} \mathbf{v}\, d\mathbf{s} = \oint_{S_k} \mathbf{a}\, d\mathbf{s} + \int_0^t \oint_{S_k} \mathbf{F} d\mathbf{s}\, d\tau + \int_0^t \oint_{S_k} (\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v})\, d\mathbf{s}\, d\tau \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,q)} \tag{1.18}$$

В проекциях на оси цилиндрической системы координат задача (1.15) — (1.18) запишется в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{v_r \omega}{r} = f(r, z, t) \tag{1.19}$$

$$\omega|_{S^-} = \pi(r, z, t), \qquad \omega|_{t=0} = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = \omega, \qquad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{1.21}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_S \equiv (v_r n_r + v_z n_z)|_S = \gamma(r, z, t) \tag{1.22}$$

$$\oint_{S_k} \mathbf{v}\, d\mathbf{s} = \oint_{S_k} \mathbf{a}\, d\mathbf{s} + \int_0^t \oint_{S_k} \mathbf{F}\, d\mathbf{s}\, d\tau + \int_0^t \oint_{S_k} \gamma\omega\, d\mathbf{s}\, d\tau \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,q)} \tag{1.23}$$

§ 2. Метод последовательных приближений. 2.1°. Учитывая (1.3), нетрудно показать, что существует осесимметричное продолжение $\mathbf{b}(x, t)$ вектора $\mathbf{a}(x)$ в цилиндр Q_T такое, что

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = 0, \qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}|_\Sigma = \gamma(x, t), \qquad \operatorname{rot}\mathbf{b}|_{\Sigma^-} = \boldsymbol{\pi}(x, t) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{b}(x, t) \in C_{2,\alpha}(\Omega), \qquad \partial\mathbf{b}(x, t)/\partial t \in C_{1,\alpha}(\Omega) \tag{2.2}$$

Вектор $\mathbf{b}(x, t)$ возьмем в качестве нулевого приближения

$$\mathbf{v}^{(0)}(x, t) = \mathbf{b}(x, t) \tag{2.3}$$

Если m — 1-е приближение $\mathbf{v}^{(m-1)}(x, t)$ уже найдено, то m-е приближение $\mathbf{v}^{(m)}(x, t)$ определим следующим образом.

Найдем вектор $\boldsymbol{\omega}^{(m)}(x, t)$ как решение (линейной) задачи

$$\partial \boldsymbol{\omega}^{(m)} / \partial t + (\mathbf{v}^{(m-1)} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}^{(m)} - (\boldsymbol{\omega}^{(m)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(m-1)} = \mathbf{f}(x, t) \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(m)}|_{\Sigma^-} = \boldsymbol{\pi}(x, t), \qquad \boldsymbol{\omega}^{(m)}|_{t=0} = \operatorname{rot} \mathbf{a} \tag{2.5}$$

после чего вектор $\mathbf{v}^{(m)}$ найдем как решение (линейной) задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(m)} = \boldsymbol{\omega}^{(m)}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}^{(m)} = 0, \qquad \mathbf{v}^{(m)} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} = \gamma(x, t) \tag{2.6}$$

$$\oint_{S_k} \mathbf{v}^{(m)} d\mathbf{s} = \oint_{S_k} \mathbf{a} d\mathbf{s} + \int_0^t \oint_{S_k} \mathbf{F} d\mathbf{s} d\tau + \int_0^t \oint_{S_k} (\mathbf{v}^{(m)} \times \boldsymbol{\omega}^{(m)}) d\mathbf{s} d\tau \tag{2.7}$$

В цилиндрических координатах (2.3) — (2.7) примут вид

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{b}(r, z, t) \equiv (b_r, 0, b_z) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial t} + v_r^{(m-1)} \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial r} + v_z^{(m-1)} \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial z} - \frac{v_r^{(m-1)} \omega^{(m)}}{r} = f(r, z, t) \tag{2.9}$$

$$\omega^{(m)}|_{S^-} = \pi(r, z, t), \qquad \omega^{(m)}|_{t=0} = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial v_r^{(m)}}{\partial z} - \frac{\partial v_z^{(m)}}{\partial r} = \omega^{(m)}, \qquad \frac{\partial v_r^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial v_z^{(m)}}{\partial z} + \frac{v_r^{(m)}}{r} = 0 \tag{2.11}$$

$$\mathbf{v}^{(m)} \cdot \mathbf{n}|_S \equiv (v_r^{(m)} n_r + v_z^{(m)} n_z)|_S = \gamma(r, z, t) \tag{2.12}$$

$$\oint_{S_k} \mathbf{v}^{(m)} d\mathbf{s} = \oint_{S_k} \mathbf{a} d\mathbf{s} + \int_0^t \oint_{S_k} \mathbf{F} d\mathbf{s} d\tau + \int_0^t \oint_{S_k} \gamma \omega^{(m)} d\mathbf{s} d\tau \tag{2.13}$$

2.2°. Покажем, что задачи (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7) однозначно разрешимы.

Лемма 2.1. Задача (2.4), (2.5) имеет и притом единственное решение $\boldsymbol{\omega}^{(m)}(x, t)$, если $\mathbf{v}^{(m-1)}(x, t)$ — осесимметричный вектор. При этом вектор $\boldsymbol{\omega}^{(m)}(x, t)$ — вихрь некоторого осесимметричного вектора.

Доказательство. Введем в рассмотрение траектории движения $\mathbf{v}^{(m-1)}(x, t)$, определяемые уравнением $\alpha = \alpha(x, t; \tau)$; вектор-функция $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — решение задачи

$$d\alpha / d\tau = \mathbf{v}^{(m-1)}(\alpha, \tau), \qquad \alpha|_{\tau=t} = x \tag{2.14}$$

Векторное уравнение (2.4) на рассматриваемых траекториях запишем в виде трех скалярных

$$\frac{\partial \omega_{j(\alpha,\tau)}^{(m)}}{\partial \tau} + v_i^{(m-1)}(\alpha, \tau) \frac{\partial \omega_j^{(m)}(\alpha, \tau)}{\partial \alpha_i} - \omega_i^{(m)}(\alpha, \tau) \frac{\partial v_j^{(m-1)}(\alpha, \tau)}{\partial \alpha_i} = f_j(\alpha, \tau)$$

$$(j = 1, 2, 3) \tag{2.15}$$

или, учитывая (2.14), в виде

$$\frac{d\omega_j^{(m)}(\alpha, \tau)}{d\tau} - \omega_i^{(m)}(\alpha, \tau) \frac{\partial v_j^{(m-1)}(\alpha, \tau)}{\partial \alpha_i} = f_j(\alpha, \tau) \tag{2.16}$$

Здесь (и дальше) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Складывая произведения каждого из равенств (2.16) на якобиан

$$\frac{D(\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2})}{D(x_{k+1}, x_{k+2})}$$

после несложных преобразований получим

$$\frac{d}{d\tau}\left[\omega_j^{(m)}(\alpha,\tau)\frac{D(\alpha_{j+1},\alpha_{j+2})}{D(x_{k+1},x_{k+2})}\right]=\frac{D(F_j,\alpha_j)}{D(x_{k+1},x_{k+2})} \tag{2.17}$$

Задача (2.14) однозначно разрешима при любых начальных данных $(x,t)\in Q_T$. при этом, поскольку $\mathbf{v}^{(m-1)}(x,t)$ удовлетворяет условию (2.6.3), каждая из траекторий входит в цилиндр Q_T либо через его нижнее основание, либо через $\Sigma^-\times[0,T]$. Момент входа траектории $\alpha=\alpha(x,t;\tau)$ в Q_T обозначим $\tau^*(x,t)$. Интегрируя (2.17) по τ от $\tau^*(x,t)$ до t и учитывая (2.3), (2.5), получим при $k=1,2,3$

$$\omega_k^{(m)}(x,t)=\omega_j^{(0)}(\alpha^*,\tau^*)\frac{D(\overset{*}{\alpha}_{j+1},\overset{*}{\alpha}_{j+2})}{D(x_{k+1},x_{k+2})}+\int_{\tau^*}^{t}\frac{D(F_j(\alpha,\tau),\alpha_j(x,t;\tau))}{D(x_{k+1},x_{k+2})}d\tau \tag{2.18}$$

$$\alpha^*(x,t)=\alpha(x,t;\tau^*(x,t)),\qquad \omega^{(0)}(x,t)=\operatorname{rot}\mathbf{b}(x,t).$$

Таким образом, единственность решения задачи (2.4), (2.5) доказана. В том, что (2.18) — действительно решение (2.4), (2.5), можно убедиться непосредственно подстановкой. Остается показать, что вектор $\boldsymbol{\omega}^{(m)}(x,t)$, определяемый (2.18),— вихрь осесимметричного вектора. Для этого, в силу единственности решения задачи (2.4), (2.5), достаточно доказать разрешимость задачи (2.9), (2.10). Это достигается буквальным повторением предыдущих выкладок в цилиндрических координатах применительно к уравнению (2.4); в результате получим

$$\frac{\omega^{(m)}(r,z,t)}{r}=\frac{\omega^{(0)}(\alpha^*,\tau^*)}{\alpha_r^*}+\int_{\tau^*(r,z,t)}^{t}\frac{f(\alpha(r,z,t;\tau),\tau)}{\alpha_r(r,z,t;\tau)}d\tau \tag{2.19}$$

Лемма 2.2. Задача (2.6), (2.7) имеет и притом единственное решение $\mathbf{v}^{(m)}(x,t)$, причем вектор $\mathbf{v}^{(m)}(x,t)$ осесимметричен.

Доказательство. Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{v}^{(m)}(x,t)=\mathbf{v}_0^{(m)}(x,t)+\sum_{k=1}^{q}A_k^{(m)}(t)\mathbf{u}_k(x) \tag{2.20}$$

где $\mathbf{u}_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,q)$ — векторы, удовлетворяющие соотношениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}_k=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{u}_k=0,\qquad \mathbf{u}_k\cdot\mathbf{n}|_\Sigma=0 \tag{2.21}$$

$$\oint_{S_i}\mathbf{u}_k\,d\mathbf{s}=\delta_{ik}\qquad (i=1,2,\ldots,q) \tag{2.22}$$

существование и линейная независимость которых легко устанавливается (см., например, [5]); вектор $\mathbf{v}_0^{(m)}(x,t)$ — решение задачи

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_0^{(m)}=\boldsymbol{\omega}^{(m)},\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}_0^{(m)}=0,\qquad \mathbf{v}_0^{(m)}\cdot\mathbf{n}|_\Sigma=\gamma(x,t) \tag{2.23}$$

$$\oint_{S_i}\mathbf{v}_0^{(m)}\,d\mathbf{s}=0\qquad (i=1,2,\ldots,q) \tag{2.24}$$

Решение (2.23), (2.24) можно записать в виде

$$\mathbf{v}_0^{(m)}=\operatorname{rot}\mathbf{B}^{(m)}+\nabla\varphi^{(m)},\qquad \mathbf{B}^{(m)}(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\frac{\boldsymbol{\omega}^{(m)}(y,t)}{|x-y|}dy \tag{2.25}$$

а $\varphi^{(m)}(x,t)$ — решение задачи

$$\Delta\varphi^{(m)}=0,\qquad \left.\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial n}\right|_\Sigma=\gamma-\operatorname{rot}\mathbf{B}^{(m)}\cdot\mathbf{n}|_\Sigma,\qquad \int_\Omega\varphi^{(m)}\,dx=0 \tag{2.26}$$

однозначная разрешимость которой следует из (1.3.3) и того, что

$$\oint_\Sigma\operatorname{rot}\mathbf{B}^{(m)}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma=0$$

Из (2.25.2) имеем

$$\Delta\mathbf{B}^{(m)}=-\boldsymbol{\omega}^{(m)},\qquad \operatorname{div}\mathbf{B}^{(m)}=0 \tag{2.27}$$

Последнее соотношение следует из того, что $\boldsymbol{\omega}^{(m)}$ — вихрь осесимметричного вектора и поэтому перпендикулярен на Σ вектору $\mathbf{n}$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}^{(m)}(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma \frac{\boldsymbol{\omega}^{(m)}(y,t)}{|x-y|}\mathbf{n}\,d\Sigma = 0$$

Теперь из (2.26.1) и (2.27), непосредственно следует, что (2.25.1) решение задачи (2.23), (2.24).

Коэффициенты $A_k^{(m)}(t)$ в (2.20) определяются из условий (2.13), которые запишем в следующей эквивалентной форме:

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial\mathbf{v}^{(m)}}{dt} - \mathbf{v}^{(m)}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}^{(m)} - \mathbf{F}\right)\mathbf{u}_k\,dx = 0,\quad \oint_{s_k}\mathbf{a}^{(m)}(x,0)d\mathbf{s} = \oint_{s_k}\mathbf{a}\,d\mathbf{s}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q) \tag{2.28}$$

С учетом (2.20) равенства (2.28) приводят к следующей задаче Коши:

$$\frac{dA_i^{(m)}}{dt}\int_\Omega \mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_k\,dx = A_i^{(m)}\int_\Omega \mathbf{u}_i\times\operatorname{rot}\mathbf{v}_0^{(m)}\cdot\mathbf{u}_k\,dx + \int_\Omega(\mathbf{v}_0^{(m)}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}_0^{(m)}+\mathbf{F})\mathbf{u}_i\,dx \tag{2.29}$$

$$A_k^{(m)}(0) = \oint_{s_k}\mathbf{a}d\mathbf{s}\qquad(k = 1, 2, \ldots, q) \tag{2.30}$$

Так как

$$\det\left(\int_\Omega \mathbf{u}_k\mathbf{u}_i\,dx\right) \neq 0,$$

то задачу (2.29), (2.30) можно записать в виде

$$\frac{dA_k^{(m)}(t)}{dt} = c_{ik}(t)A_i^{(m)}(t) + b_k(t),\qquad \mathbf{A}_k^{(m)}(0) = \oint_{s_k}\mathbf{a}d\mathbf{s} \tag{2.31}$$

где $c_{ik}(t)$ и $b_k(t)$ — известные функции, достаточно гладкие для того, чтобы задача (2.31) была однозначно разрешима на сегменте $[0, T]$.

Таким образом, решение задачи (2.6), (2.7) построено. Его единственность устанавливается очевидным образом, осесимметричность следует из единственности и инвариантности задачи относительно поворота вокруг оси Ox_3.

§ 3. Гладкость последовательных приближений. Для нулевого приближения $\mathbf{v}^{(0)}(x, t)$ выполняются условия (2.2). Покажем, что такой же гладкостью обладает любое из приближений $\mathbf{v}^{(m)}(x, t)$.

Лемма 3.1. Если

$$\mathbf{v}^{(m-1)} \in C_{2,\lambda}(\Omega),\qquad \partial\mathbf{v}^{(m-1)}/\partial t \in C_{1,\lambda}(\Omega)\quad (m = 1, 2\ldots) \tag{3.1}$$

то

$$\boldsymbol{\omega}^{(m)} \in C_{1,\lambda}(\Omega),\ \partial\boldsymbol{\omega}^{(m)}/\partial t \in C_{0,\lambda}(\Omega);\ \mathbf{v}^{(m)} \in C_{2,\lambda}(\Omega),\ \partial\mathbf{v}^{(m)}/\partial t \in C_{1,\lambda} \tag{3.2}$$

Доказательство леммы проводится непосредственным прослеживанием гладкости по этапам итерационного процесса. Из (2.14) следует, что

$$\alpha \in C_{2,\lambda}(\Omega),\qquad \partial\alpha/\partial t \in C_{1,\lambda}(\Omega),\qquad \partial^2\alpha/\partial t^2 \in C_{0,\lambda}(\Omega)$$
$$\partial^2\alpha/\partial\tau^2 \in C_{0,1}(Q_T),\qquad \partial^2\alpha/\partial\tau\partial x_i \in C_{0,1}(Q_T),\ \partial^2\alpha/\partial\tau\partial t \in C_{0,1}(Q_T)$$

и, кроме того, $\alpha(x, t; \tau)$ и все ее производные первого и второго порядков по x, t, τ удовлетворяют условию Липшица по переменной τ. Рассмотрим функцию $\tau^*(x, t)$. Она равна либо нулю, либо корню $\tau'(x, t)$ уравнения $g(\alpha(x, t; \tau')) = 0$, где $g(x) = 0$ — уравнение поверхности Σ^-. Учитывая, что $\gamma(x, t) \neq 0$ на Σ^-, нетрудно показать, что $\tau^*(x, t)$ имеет ограниченные в Q_T производные первого порядка по x, t. Далее из (2.18.2) следует

$$\alpha^* \in C_{2,\lambda}(\Omega),\qquad \partial\alpha^*/\partial t \in C_{1,\lambda}(\Omega),\qquad \partial^2\alpha^*/\partial t^2 \in C_{0,\lambda}(\Omega).$$

Теперь из (2.18.1), учитывая (2.7), получим (3.2.1). Из (3.2.1) и (2.25), (2.26) на основании известных теорем о гладкости решений эллиптических уравнений [6] окончательно получим (3.2.2). Лемма доказана.

§ 4. Оценки последовательных приближений. *Лемма* 4.1. Имеет место равномерная по m оценка

$$\max_{(x,\,t)\in Q}|\omega^{(m)}(x,t)\,/\,\sqrt{x_1^2+x_2^2}|\leqslant C, \tag{4.1}$$

где постоянная C зависит лишь от данных задачи и числа T.

Справедливость леммы следует непосредственно из (2.19).

Лемма 4.2. Имеет место равномерная по m оценка

$$\|\mathbf{v}^{(m)}(x,t)\|_{W_p^{(1)}(\Omega)}\leqslant C_p \qquad (p\geqslant 2) \tag{4.2}$$

где постоянная C_p зависит лишь от данных задачи и чисел p и T.

Справедливость следует из (2.20), (2.25) и (2.26.1), (2.29) и предыдущей леммы на основании оценок решений эллиптических уравнений в нормах $W_p^{(l)}$ и $C_{l,\alpha}$ [6].

Лемма 4.3. Имеет место оценка

$$|\nabla\mathbf{v}^{(m)}(x,t)|\leqslant C_1'\ln[C_2'+C_3'\|\nabla\omega^{(m)}(x,t)\|_{L^\cdot(\Omega)} \qquad (p\geqslant 3) \tag{4.3}$$

где постоянные C_1', C_2', C_3' зависят лишь от p, T и данных задачи и остаются ограниченными при $p\to\infty$.

Доказательство леммы основывается на применении к (2.27.1) полученной в [7] оценки решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с ограниченной правой частью, при этом вектор $\mathbf{B}^{(m)}$ разбивается на слагаемые $\mathbf{B}_1^{(m)}$, $\mathbf{B}_2^{(m)}$, первое из которых удовлетворяет (2.27.1) и обращается в нуль на Σ, второе — удовлетворяет уравнению Лапласа и на Σ совпадает с $\mathbf{B}^{(m)}$. Дальнейшие оценки проводятся в том же порядке, что и в лемме 4.2.

Лемма 4.4. Имеют место равномерные по m оценки

$$|\nabla\omega^{(m)}(x,t)\|_{L_p(\Omega)}\leqslant C_p, \quad |\nabla\mathbf{v}^{(m)}(x,t)|\leqslant C_\infty \quad (p\geqslant 3) \tag{4.4}$$

где постоянная C_p зависит лишь от p, T и данных задачи и ограничена при $p\to\infty$.

Доказательство. Учитывая осесимметричность векторов $\mathbf{v}^{(m-1)}$ и $\omega^{(m)}$, из известного тождества

$$\nabla(\mathbf{v}^{(m-1)}\cdot\omega^{(m)})=(\omega^{(m)}\cdot\nabla)\mathbf{v}^{(m-1)}+(\mathbf{v}^{(m-1)}\cdot\nabla)\omega^{(m)}+$$
$$+\omega^{(m)}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}^{(m-1)}+\mathbf{v}^{(m-1)}\times\operatorname{rot}\omega^{(m)}$$

получим

$$(\omega^{(m)}\cdot\nabla)\mathbf{v}^{(m-1)}=-(\mathbf{v}^{(m-1)}\cdot\nabla)\omega^{(m)}-\mathbf{v}^{(m-1)}\times\operatorname{rot}\omega^{(m)}. \tag{4.5}$$

С учетом (4.5) равенство (2.4) можно записать в виде (опуская индекс m)

$$\partial\omega\,/\,\partial t+2(\mathbf{v}\cdot\nabla)\omega+\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\omega=\mathbf{f}. \tag{4.6}$$

Подставляя $\partial^2\omega\,/\,\partial t\partial x_i$ из (4.6) дифференцированием по x_i, в тождество

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega|\nabla\omega|^p\,dx=p\int\limits_\Omega|\nabla\omega|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial t\,\partial x_i}\,dx$$

будем иметь

$$\frac{1}{p}\,\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega|\nabla\omega|^p\,dx=I_1+I_2+I_3+I_4 \tag{4.7}$$

$$I_1=-2\int\limits_\Omega|\nabla\omega|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\,\partial x_k}v_k\,dx,\quad I_2=-\int\limits_\Omega|\nabla\omega|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\omega)\,dx \tag{4.8}$$

$$I_3=-2\int\limits_\Omega|\nabla\omega|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\,dx,\quad I_4=-\int\limits_\Omega|\nabla\omega|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx \tag{4.9}$$

Переходя в (4.8) к цилиндрическим координатам, после некоторых преобразований, учитывая оценку (4.3) и вводя обозначение $R_p(t) = \| \nabla\omega(x, t) \|_{L(\Omega)}$, получим

$$I_1 + I_2 \leqslant \frac{2\pi}{p} \oint_{S-} r\gamma \left[\left(\frac{\partial\pi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)^2 \right] ds + C_1''R_p{}^p \ln(C_2'' + C_3''R_p) \tag{4.10}$$

где C_1'', C_2'', C_3'' зависят лишь от p, T и данных задачи, оставаясь ограниченными при $p \to \infty$. Переходя к пределу, получим на $S-$

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_{S-} = -\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\pi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{s}\frac{\partial\pi}{\partial s} - v_r\frac{\pi}{r} - f\right) \tag{4.11}$$

Из (4.10), (4.11), учитывая оценку $|\mathbf{v}|$, вытекающую по вложению из (4.2), получим

$$I_1 + I_2 \leqslant Q_p(t) + C_1''R_p{}^p \ln(C_1'' + C_3''R_p) \tag{4.12}$$

где $Q_p(t)$ зависит лишь от p, T, t и данных задачи. Из (4.9.1) на основании леммы 4.3 имеем

$$|I_3| \leqslant C_1'''R_p{}^p \ln(C_2''' + C_3'''R_p) \tag{4.13}$$

Вводя обозначение $f_p(t) = \| \nabla\mathbf{f}(x, t) \|_{L_p(\Omega)}$, из (4.9.2) имеем

$$|I_4| \leqslant f_p R_p{}^{p-1} \tag{4.14}$$

Теперь из (4.7), (4.12) — (4.14) следует

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}R_p{}^p \leqslant f_p R_p{}^{p-1} + C_1 R_p{}^p \ln(C_2 + C_3 R_p) + Q_p \tag{4.15}$$

где постоянные C_1, C_2, C_3 зависят лишь от p, T и данных задачи, оставаясь ограниченными при $p \to \infty$. Неравенства (4.4) следуют теперь из (4.15) дословным повторением выкладок, приведенных в [1] применительно к плоскопараллельным течениям.

Лемма 4.5. Имеют место равномерные по m оценки

$$\left\| \frac{\partial\omega^{(m)}(x, t)}{\partial t} \right\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C_p \quad (p > 3), \qquad \left| \frac{\partial\omega^{(m)}(x, t)}{\partial t} \right| \leqslant C_\infty \tag{4.16}$$

Справедливость леммы следует непосредственно из (2.4) и лемм 4.2 и 4.4.

§ 5. Сходимость процесса последовательных приближений. Обозначим $\mathbf{w}^{(m)} = \mathbf{v}^{(m)} - \mathbf{v}^{(m-1)}$, $\sigma^{(m)} = \omega^{(m)} - \omega^{(m-1)}$. Записывая (2.4), (2.5) для m-го и $m - 1$-го приближений и вычитая, получим

$$\partial\sigma^{(m)}/\partial t + 2(\mathbf{v}^{(m-1)}\cdot\nabla)\sigma^{(m)} + 2(\mathbf{w}^{(m-1)}\cdot\nabla)\omega^{(m-1)} +$$
$$+ \mathbf{v}^{(m-1)} \times \operatorname{rot}\sigma^{(m)} + \mathbf{w}^{(m-1)} \times \operatorname{rot}\omega^{(m-1)} = 0 \tag{5.1}$$

$$\sigma^{(m)}|_{\Sigma-} = 0, \qquad \sigma^{(m)}|_{t=0} = 0 \tag{5.2}$$

Подставляя $\partial\sigma^{(m)} / \partial t$ из (5.1) в тождество

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\sigma^{(m)}|^p dx = \int_\Omega |\sigma^{(m)}|^{p-2}\sigma^{(m)}\frac{\partial\sigma^{(m)}}{\partial t}dx$$

после преобразований, аналогичных преобразованиям леммы 4.4, имеем

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\sigma^{(m)}|^p dx = -\frac{1}{p}\oint_{\Sigma+} \gamma|\sigma^{(m)}|^p d\Sigma -$$
$$- 2\pi\int_D r|\sigma^{(m)}|^p\left(\frac{\partial v_r^{(m-1)}}{\partial r} + \frac{\partial v_z^{(m-1)}}{\partial z}\right) dr\,dz -$$
$$- 2\int_\Omega |\sigma^{(m)}|^{p-2}\sigma^{(m)}(\mathbf{w}^{(m-1)}, \nabla)\mathbf{w}^{(m-1)}dx - \int_\Omega |\sigma^{(m-1)}|^{p-2}\sigma^{(m)}\mathbf{w}^{(m-1)} \times \operatorname{rot}\omega^{(m-1)}dx \tag{5.3}$$

Для $w^{(m-1)}$ из (2.20), (2.25) — (2.28.1), (2.29) выведем

$$\|\mathbf{w}^{(m-1)}\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} \leqslant C\left(\|\sigma^{(m-1)}\|_{L_p(\Omega)} + \int_0^t \|\sigma^{(m)}(x,\tau)\|_{L_p(\Omega)} d\tau\right) \quad (p \geqslant 2) \tag{5.4}$$

Из (5.3), (5.4), учитывая предыдущие оценки, получим $(p \geqslant 2)$ (5.5)

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt} g_m{}^p \leqslant C g_m{}^{p-1}\left(g_{m-1} + \int_0^t g_{m-1}\, d\tau\right), \qquad g_m(t) = \|\sigma^{(m)}(x,t)\|_{L_p(\Omega)},$$

где C — постоянная, не зависящая от m. Так как $g_m(0) = 0$, то из (5.5) имеем

$$g_m(t) \leqslant C \int_0^t \left[g_{m-1}(\tau) + \int_0^\tau g_{m-1}(\theta)\, d\theta\right] d\tau \tag{5.6}$$

Пусть $g_0(t) < C_0$ для $t \in [0, T]$, из (5.6) тогда следует

$$g_m(t) \leqslant C_0 C^m \left[\frac{t^m}{m!} + C_m{}^1 \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} + C_m{}^2 \frac{t^{m+2}}{(m+2)!} + \ldots + \frac{t^{2m}}{(2m)!}\right]$$

Отсюда при $m \geqslant T$ получаем на $[0, T]$

$$g_m(t) \leqslant C_0 \frac{(2Ct)^m}{m!}$$

т. е., что ряд $\sigma^{(0)} + (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \cdots)$ сходится сильно в любом $L_p(\Omega)$ равномерно по $t \in [0, T]$ к некоторому вектору $\omega(x,t)$. Из (5.4) теперь следует сильная в любом $W_p{}^{(1)}(\Omega)$ равномерная по $t \in [0, T]$ сходимость ряда $\mathbf{b} + (\mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{w}^{(2)} + \cdots)$ к некоторому вектору $\mathbf{v}(x,t)$. Из (4.4.1), (4.16.1) следует, что первые производные $\omega^{(m)}(x,t)$ сходятся слабо в любом $L_p(Q_T)$, и по теореме о слабой замкнутости оператора обобщенного дифференцирования получаем, что $\omega(x,t) \in W_p{}^{(1)}(Q_T)$. По вложению $\omega(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера с любым показателем $0 < \lambda < 1$. Переходя к пределу по $m \to \infty$ в равенствах (2.4) — (2.7), придем к равенствам (1.15) — (1.18). Из (1.17), (1.18) следует, что вектор $\mathbf{v}(x,t)$ определяется соотношениями, которые получаются из (2.20), (2.25), (2.26), (2.29), (2.30) формальным опусканием индекса m.

Отсюда следует, что $\mathbf{v}(x, t)$ имеет первые производные по x, t, удовлетворяющие в Q_T условию Гельдера с любым показателем $0 < \lambda < 1$. Повторяя теперь рассуждения леммы 3.1, приходим к выводу, что вектор $\omega(x, t)$ имеет производные первого порядка по x, t, непрерывные в Q_T. Записывая (1.15), (1.18) в виде

$$\operatorname{rot}\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \triangle)\mathbf{v} - \mathbf{F}\right] = 0$$

$$\oint_{s_k} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \triangle)\mathbf{v} - \mathbf{F}\right] ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

заключаем, что найдется однозначная в Ω функция $P(x, t)$, для которой

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v}, \triangle)\mathbf{v} - \mathbf{F} = -\triangle P(x, t)$$

Далее из (1.16) — (1.18) имеем

$$\operatorname{rot}[\mathbf{v}(x,0)-\mathbf{a}(x)]=0,\qquad \operatorname{div}[\mathbf{v}(x,0)-\mathbf{a}(x)]=0$$

$$[\mathbf{v}(x,0)-\mathbf{a}(x)]\mathbf{n}|_{\Sigma}=0,\qquad \oint\limits_{S_k}[\mathbf{v}(x,0)-\mathbf{a}(x)]\,d\mathbf{s}=0$$

Отсюда следует, что $\mathbf{v}(x,\ 0)=\mathbf{a}(x)$, и существование решения задачи (1.1), (1.2), таким образом, доказано.

§ 6. **Единственность решения.** Предположим, что, кроме $\mathbf{v}(x,\ t)$, задача (1.1), (1.2) имеет решение $\mathbf{v}'(x,\ t)$, вихрь которого $\boldsymbol{\omega}'(x,\ t)$. Вводя обозначения $\mathbf{w}=\mathbf{v}-\mathbf{v}'$, $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}'$, будем иметь из (1.15 — 1.18)

$$\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial t+2(\mathbf{w},\nabla)\boldsymbol{\omega}+2(\mathbf{v}',\nabla)\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{w}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{v}'\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\sigma}=0 \qquad (6.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma^-}=0,\quad \boldsymbol{\sigma}|_{t=0}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{w}=\boldsymbol{\sigma},\quad \operatorname{div}\mathbf{w}=0,\quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma}=0 \qquad (6.2)$$

$$\oint\limits_{S_k}\mathbf{w}\,d\mathbf{s}=\int\limits_0^t\oint\limits_{S_k}\gamma\sigma\,ds\,d\tau \qquad (k=1,2,\ldots,q) \qquad (6.3)$$

Из (6.1), (6.2.1), (6.2.2) преобразованиями, аналогичными преобразования выше, получим вводя обозначение $g(t)=\|\boldsymbol{\sigma}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}$,

$$\frac{d}{dt}g\leqslant C\Big(g+\int\limits_0^t g\,d\tau\Big) \qquad (6.4)$$

Из (6.4) после некоторых преобразований будем иметь

$$g(t)\leqslant C_1\int\limits_0^t g(\tau)\,d\tau$$

Отсюда обычным способом получим $g(t)\equiv 0$.

Из (6.2.3) — (6.2.5), (6.3) теперь следует, что $\mathbf{w}(x,\ t)\equiv 0$. Таким образом, $\mathbf{v}'(x,\ t)\equiv\mathbf{v}(x,\ t)$, и единственность решения задачи (1.1), (1.2) доказана.

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе и ряд ценных указаний.

Поступило 20 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область. Матем. сб., 1964, т. 64, 106, № 4, стр. 562—568.
2. Гюнтер Н. М. Об основной задаче гидродинамики. Изв. Матем. ин-та им. Стеклова, 1927, т. 2, стр. 1—168; О движении жидкости. заключенной в данном перемещающемся сосуде. Изв. АН СССР. Отд. физ.-матем. наук, 1926, т. 20, стр. 1323—1348, 1503—1532; 1927, т. 21, стр. 621—656, 735—756, 1139—1162; 1928, т. 22, стр. 9—30.
3. Lichtenstein L. Grundlagen der Hydromechanik. Berlin, 1929.
4. Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 6, стр. 1032—1066.
5. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1960, т. 59, стр. 5—36.
6. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. Изд. иностр. лит., 1962.
7. Юдович В. И. О задаче протекания идеальной несжимаемой жидкости через заданную область. Докл. АН СССР, т. 146, № 3, стр. 561—564.