

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ТОНКОЙ СТРУЕ, НАТЕКАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Д. С. ЦЕЛЬНИК

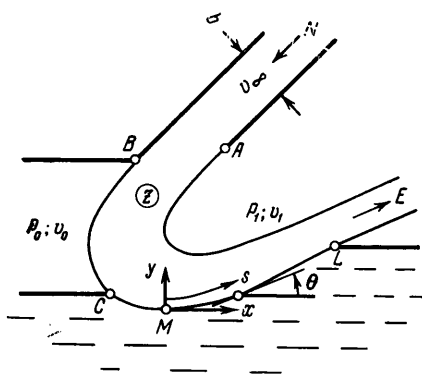
(Москва)

В заметке автора [1] задача о симметричных формах контакта при косом натекании свободной струи на жидкость была поставлена как задача о собственных функциях нелинейного интегрального уравнения.

Ниже рассматривается более общая схема течения — модель струйной завесы аппарата на воздушной подушке над поверхностью воды (фиг. 1); струя вязкой, несжимаемой, невесомой жидкости плотности ρ_1 натекает из сопла на поверхность неподвижной тяжелой жидкости плотности ρ_2 , причем, вообще говоря, давления p_0 и p_1 различны. Задача плоская.

Выводятся нелинейные интегральные уравнения, одно из них аналогично известному уравнению А. И. Некрасова точной теории волн [2]. В предельном случае тонкой струи получено простое дифференциальное уравнение и построены точные решения задачи.

Некоторые данные численных расчетов для нелинейной задачи о тонкой струйной завесе имеются в работе [3]; в линеаризованной постановке задача решалась в работе [4].



Фиг. 1

Фиг. 1; v — модуль скорости, θ — угол вектора скорости с осью x . Отобразим область течения z на полуполосу

$$\operatorname{Re} u \geq 0, \quad 0 \leq \operatorname{Im} u \leq 1/2 \delta$$

и зададим соответствие точек A, B, E , как показано на фиг. 2. Ширина полуполосы δ будет выбрана ниже; c, l, m, n — свободные параметры.

Введем в рассмотрение функцию Жуковского

$$\omega(u) = i \ln \frac{1}{v_1} \frac{dw}{dz} = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln \frac{v}{v_1}$$

Продолжим ω через AB на полуполосу

$$\operatorname{Re} u < 0, \quad 0 \leq \operatorname{Im} u \leq 1/2 \delta$$

При помощи интеграла Шварца для полосы получим

$$\omega(u) = \theta(in) + \frac{1}{\delta} \int_{-l}^{+l} \tau(\varepsilon) \operatorname{cth} \frac{\pi(\varepsilon - u)}{\delta} d\varepsilon \tag{1.1}$$

Здесь контур интегрирования — отрезок действительной оси $[-l, +l]$. При $c \leq \xi \leq l$

$$\theta(\xi) = \theta(in) + \frac{1}{\pi} \int_c^l \tau'(\varepsilon) K(\xi, \varepsilon) d\varepsilon, \quad K(\xi, \varepsilon) = \ln \frac{\operatorname{sh} [\pi(\xi + \varepsilon)/\delta]}{\operatorname{sh} [\pi|\xi - \varepsilon|/\delta]}$$

Пусть $\theta(m) = 0$, тогда

$$\theta(in) + \frac{1}{\pi} \int_c^l \tau'(\varepsilon) K(m, \varepsilon) d\varepsilon = 0 \quad (c \leq m < l)$$

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_c^l \tau'(\varepsilon) [K(\xi, \varepsilon) - K(m, \varepsilon)] d\varepsilon \quad (c \leq \xi \leq l) \quad (1.2)$$

Потребуем, чтобы давление в потоке на границе CL струи с тяжелой жидкостью было равно гидростатическому, тогда при $c \leq \varepsilon \leq l$

$$\tau'(\varepsilon) = \pi \lambda f(\varepsilon) \sin \theta(\varepsilon) e^{-3\tau(\varepsilon)} \quad (1.3)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{\text{sh}(2\pi\varepsilon/\delta)}{2 \text{sh}[\pi(\varepsilon - in)/\delta] \text{sh}[\pi(\varepsilon + in)/\delta]}, \quad \lambda = \frac{2b^2 v_\infty}{\pi \delta v_1} v, \quad v = \frac{\rho_2 g}{b \rho_1 v_1^2}$$

При этом

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = \frac{2bv_\infty}{\delta v_1} f(\varepsilon) \cos \theta(\varepsilon) e^{-\tau(\varepsilon)}, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = \frac{2bv_\infty}{\delta v_1} f(\varepsilon) \sin \theta(\varepsilon) e^{-\tau(\varepsilon)}$$

Интегрируя (1.3), получаем

$$e^{3\tau(\varepsilon)} = 1 + 3\pi\lambda \int_l^\varepsilon f(\mu) \sin \theta(\mu) d\mu \quad (1.4)$$

При помощи (1.2) — (1.4) находим окончательно интегральное уравнение относительно функции θ

$$\theta(\xi) = \lambda \int_c^l \frac{\sin \theta(\varepsilon) f(\varepsilon) [K(\xi, \varepsilon) - K(m, \varepsilon)] d\varepsilon}{1 + 3\pi\lambda J(\varepsilon, l, \theta)} \quad (1.5)$$

$$J(\varepsilon, l, \theta) = \int_l^\varepsilon f(\mu) \sin \theta(\mu) d\mu$$

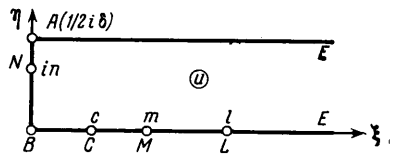
Выбирая за неизвестное $\tau'(\xi)$, можно получить другое уравнение, — аналогичное приведенному в [1].

Пусть фиксирована ширина полуполосы, а также параметры c, l, m, n ; тогда можно поставить задачу о собственных функциях уравнения (1.5), аналогичного известному уравнению А. И. Некрасова точной теории волн [2].

Можно ожидать, что для уравнения (1.5) окажутся справедливыми математические результаты, известные для уравнения А. И. Некрасова [2, 5, 6]: каждое характеристическое число $\lambda_j > 0$, ($j = 1, 2, 3, \dots$) линеаризованного уравнения — простое и является точкой бифуркации уравнения (1.5); каждой точке бифуркации соответствуют две ветви ненулевых решений (одна — значениям $\lambda > \lambda_j$, а другая — значениям $\lambda < \lambda_j$). Если задать угол $\theta(in)$, то вместо (1.5) получается неоднородное уравнение

$$\theta(\xi) = \theta(in) + \lambda \int_c^l \frac{\sin \theta(\varepsilon) f(\varepsilon) K(\xi, \varepsilon) d\varepsilon}{1 + 3\pi\lambda J(\varepsilon, l, \theta)} \quad (1.6)$$

Оставляя рассмотрение уравнений (1.5), (1.6) в стороне, ограничимся ниже получением решений для предельного случая тонкой струи.



Фиг. 2

§ 2. Пусть ширина сопла b — малая величина. Примем ширину полосы $1/2\delta$ равной ширине сопла. Используя предельные выражения для $f(\varepsilon)$, $\delta K(\xi, \varepsilon)$ при $\delta \rightarrow 0$ и полагая также $\tau \rightarrow 0$, получаем для тонкой струи взамен (1.5) следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\theta(\xi) = v \int_c^l \sin \theta(\varepsilon) [K^\circ(\xi, \varepsilon) - K^\circ(m, \varepsilon)] d\varepsilon; \quad K^\circ(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} \xi & (\varepsilon > \xi) \\ \varepsilon & (\varepsilon < \xi) \end{cases} \quad (2.1)$$

Одновременно

$$dx/d\xi = \cos \theta, \quad dy/d\xi = \sin \theta \quad (\xi > 0), \quad \theta|_{\xi=l} = \theta(l) \quad (2.2)$$

$$\theta(\xi) = \theta(0) - (\theta(0) - \theta(c)) \xi/c \quad (0 \leq \xi \leq c)$$

$$\theta(0) = -v \int_c^l \sin \theta(\varepsilon) K^\circ(m, \varepsilon) d\varepsilon \quad (2.3)$$

В предельном случае $\delta = 0$ полуинтервал $0 < \xi \leq c$ отображается функцией $z(\xi)$ на дугу окружности; элементарные соображения заставляют считать последнюю дугой CB или дугой CA в зависимости от того, будет ли на фиг. 1

$$(y(B) - y(A))|_{b=0} < 0 \text{ или } (y(B) - y(A))|_{b=0} > 0$$

Пусть фиксированы величины c, l, m , тогда на основании принципа линеаризации [6, 7] характеристические числа ядра $[K^\circ(\xi, \varepsilon) - K^\circ(m, \varepsilon)]$

$$v_j = v_j(m) = \left[\frac{\pi}{2} \frac{2j-1}{l-m} \right]^2 \quad (j=1, 2, 3, \dots)$$

будут точками бифуркации уравнения (2.1).

Дважды дифференцируя (2.1) по ξ , получаем

$$d^2\theta/d\xi^2 + v \sin \theta = 0, \quad \theta|_{\xi=m} = 0, \quad d\theta/d\xi|_{\xi=l} = 0 \quad (2.4)$$

К последнему уравнению можно прийти из элементарных соображений. Выделим элемент тонкой струи двумя близкими сечениями, нормальными к линии контакта CL . Выше было принято, что с уменьшением ширины струи $\tau \rightarrow 0$; это означает, что такой элемент следует считать движущимся с постоянной по модулю скоростью $v = v_1$. Записывая уравнения движения элемента как несвободной материальной точки в форме Эйлера, получаем

$$d\theta/ds + v(y - y(L)) = 0, \quad d^2\theta/ds^2 + v \sin \theta = 0, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

что совпадает с (2.4), так как для тонкой струи $d\xi = ds$.

Если угол θ на CL мал, то в линейном приближении можно положить $\sin \theta \approx \theta$ или же использовать линейное уравнение [1, 4]

$$d^2y/dx^2 + v(y - y(L)) = 0$$

Дополнительно к полученному выше дифференциальному уравнению следует потребовать непрерывности кривизны $d\theta/ds$ в C, L и угла θ в точках $B(A), C, L$. Эти условия можно получить, исходя из интегрального уравнения тонкой струи и соотношений (2.2).

Дифференциальное уравнение (2.4) хорошо изучено как уравнение колебаний математического маятника или упругой линии тонкого стержня.

Решения задачи (2.4) и, вместе с тем, интегрального уравнения (2.1) определяются формулами [8]

$$\sin^{1/2}\theta = \pm k \operatorname{sn}(\sqrt{v}(\xi - m); k), \quad \sqrt{v} = (2j-1)K/(l-m) \quad (2.5)$$

Выражения для соответствующих форм струй имеют вид ($c \leq \xi \leq l$)

$$x = \frac{l}{\sqrt{v}} E \{ \text{am}(\sqrt{v}(\xi - m)); k \} - (\xi - m), \quad x(l) = (l - m) \left[\frac{2E}{K} - 1 \right]$$

$$y = \pm \frac{2k}{\sqrt{v}} \{ 1 - \text{cn}(\sqrt{v}(\xi - m); k) \}, \quad y(l) = \pm \frac{2k}{\sqrt{v}} \tag{2.6}$$

$$\theta(l) = \pm (-1)^{j-1} 2\theta^\circ \quad \theta(c) = \pm 2 \arcsin \{ k \text{sn}(\sqrt{v}(c - m); k) \}$$

$$\theta(0) = \theta(c) \mp 2kc \sqrt{v} \text{cn}(\sqrt{v}(c - m); k), \quad R = |2k \sqrt{v} \text{cn}(\sqrt{v}(c - m); k)|^{-1}$$

В формулах (2.5) и (2.6) sn , cn — эллиптические функции Якоби, am — амплитуда, K и E — полные эллиптические интегралы (первого и второго рода), $k = \sin \theta^\circ$ — модуль, θ° — модулярный угол, $j = 1, 2, 3, \dots$ — номер точки бифуркации, R — радиус окружности BC . Знаки \pm соответствуют решениям на двух различных ветвях, отходящих от одной и той же точки бифуркации ($v > v_j$).

Рассмотрим подробнее случай $c = m > 0$. Каждой точке бифуркации ($v = v_j$, $k = 0$, $\theta^\circ = 0$) соответствует тонкая струя в виде бесконечной прямой, текущая по ровной поверхности тяжелой жидкости (фиг. 3, а). На фиг. 3, б—е, показаны течения, получающиеся при удалении от точки бифуркации v_1 ($c = 1$, $l = 2$), на той ветви решений, которой в формуле (2.5) соответствует знак плюс.

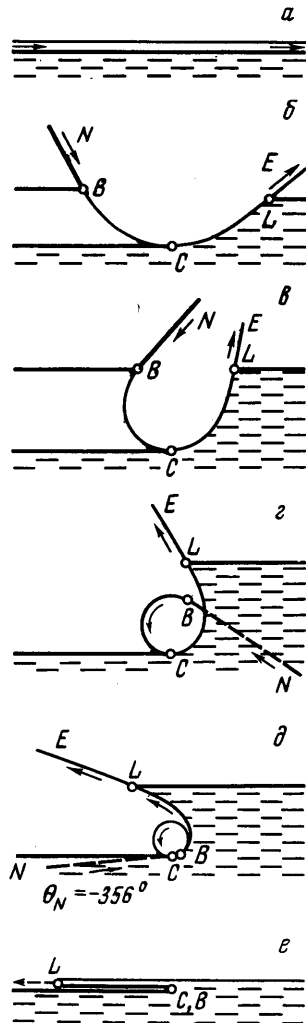
При $\theta^\circ \rightarrow 1/2\pi$ радиус $R \rightarrow 0$, угол $\theta(0) \rightarrow -\infty$.

Выбирая модулярный угол θ° близким к $1/2\pi$, можно получить такие течения, когда элемент струи, вылетая из сопла, совершает сначала некоторое число витков по окружности радиуса $R(\theta^\circ)$ и только потом входит в контакт с тяжелой жидкостью в точке C . При этом траекторию каждого нового витка следует считать лежащей на другом листе римановой поверхности. В предельном случае $\theta^\circ = 1/2\pi$ величина $1/v = 0$, струя исчезает и остается лишь специальным образом деформированная поверхность тяжелой жидкости (фиг. 3, е)

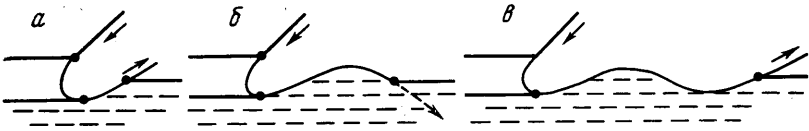
$$x(l) = -(l - c), \quad y(l) = y(c) = 0$$

Заметим, что, не меняя всей остальной картины течения, можно изменить лишь число витков (точнее — угол $\theta(0)$), если сдвигать промежуток интегрирования $[c, l]$, оставляя неизменной его длину $(l - c)$, а также величины v и j .

Предельным переходом в (1.6) можно получить неоднородное интегральное уравнение тонкой струи. Дополнительно к найденным выше решениям неоднородное уравнение может дать решения $\theta(\xi)$, не обращающиеся в нуль на $[c, l]$ (например, $\theta \rightarrow \theta(0)$ при $v \rightarrow 0$), однако, эти «дополнительные» решения из физических соображений неприемлемы.



Фиг. 3



Фиг. 4

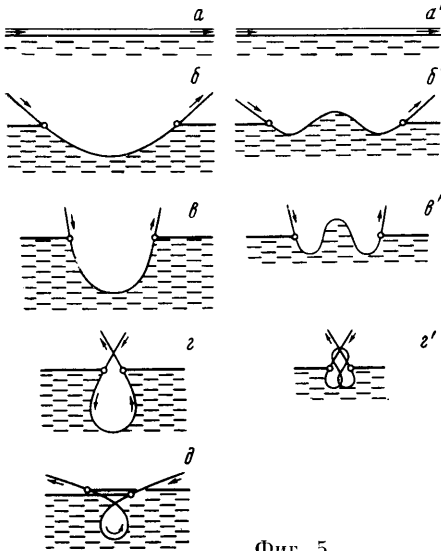
Пусть зафиксирована высота расположения сопла $h_0 > 0$ над невозмущенным уровнем тяжелой жидкости и угол $\theta(N)$ (при $\theta(C) = 0$)

$$h_0 = y(B) - y(L) = 2R \sin^2(1/2 \theta(N)) - y(L), \quad -\pi < \theta(N) < 0 \quad (2.7)$$

Обозначим через s дуговую абсциссу на CL , и пусть при этом

$$s(C) = -l_1, \quad s(M) = 0, \quad s(L) = l_2$$

Используя решение (2.5) уравнения (2.4) — с заменой $(\xi - m)$ на s и $(l - m)$ на l_2 и подставляя вытекающие из этого решения значения $y(L)$ и R (при $l_1 = 0$) в выражение (2.7), приходим к квадратному уравнению



Фиг. 5

$$k^2 + 1/2 h_0 \sqrt{v} k - 1/2 \sin^2(1/2 \theta(N)) = 0$$

Каждому значению v соответствует счетное множество форм контакта ($j = 1, 2, 3, \dots$), как это схематично изображено на фиг. 4.

Можно получать также решения при $\theta(C) \neq 0$; случай $\theta(C) = \theta(N)$ соответствует натеканию свободной струи ($p_0 = p_1$).

Неопределенности угла входа струи $\theta(C)$ следовало ожидать заранее — из рассмотрения уравнения плоской задачи¹ (1.5).

Зададим теперь параметры струи завесы, угол установки сопла $\theta(N)$, и пусть при этом для висения аппарата на воздушной подушке над поверхностью воды необходима раз-

ность давлений $p_0 - p_1$. Так как $y(L) - y(C) = (p_0 - p_1) / \rho_2 g$ и одновременно (при $\theta(M) = 0, \sqrt{v} l_1 < K, j = 1$)

$$y(L) - y(C) = \frac{2k}{\sqrt{v}} \operatorname{cn}(\sqrt{v} l_1; k)$$

то необходимо выполнение равенства

$$\operatorname{cn}(\sqrt{v} l_1; k) = \frac{(p_0 - p_1) \sqrt{v} / 2 \rho_2 g}{k} \quad (2.8)$$

Отсюда находим, что при

$$\frac{1}{v} < \left(\frac{1}{v}\right)_* = \left(\frac{p_0 - p_1}{2 \rho_2 g}\right)^2$$

возможных форм течений не существует.

¹ Реально осуществляются течения, близкие к $\theta(C) = 0, j = 1$.

Пусть теперь $1/v$ несколько больше $(1/v)_*$, так что числитель в правой части формулы (2.8) немного меньше единицы. Тогда возможен диапазон значений модуля k от $(p_0 - p_1)\sqrt{v}/2\rho_2g$ до 1. Так как

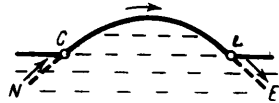
$$\sin^{1/2}\theta(C) = -k \operatorname{sn}(\sqrt{v}l_1, k) = -k \left[1 - \left(\frac{(p_0 - p_1)\sqrt{v}/2\rho_2g}{k} \right)^2 \right]^{1/2}$$

то углы входа струи в воду $\theta(C)$, соответствующие возможным картинам течений, малы, однако углы выхода струи $\theta(L)$ близки к 180° , формы участка контакта CL имеют при этом вид фиг. 3, *d*. Очевидно, что течения, хотя и возможны математически, но физически нереальны.

При достаточно интенсивной струе и минимально возможном значении модуля k_{\min} , равном числителю в (2.8), получается картина течения с ограниченной величиной угла выхода $\theta(L)$ (и $\theta(C) = 0$). Очевидно, что при той же интенсивности струи возможен диапазон значений модуля k от k_{\min} до k_{\max} , определяемого условиями

$$k \leq 1, \quad y(B) - y(C) \geq 0 \quad (\theta(N) \leq \theta(C) \leq 0)$$

причем с ростом k значения $|\theta(C)|$ и $\theta(L)$ растут. Вопрос о том, осуществляется ли реально какая-либо из возможных картин течений и, если осуществляется, то какая, требует дополнительного рассмотрения.



Фиг. 6

§ 3. Задача о симметричных формах контакта при косом натекании струи [4] — частный случай схемы фиг. 1. Решение для тонкой струи может быть получено при помощи формул (2.6), если положить $c = m = 0$ и считать, что $-l \leq \xi \leq l$. На фиг. 5 показаны картины течений, получающиеся соответственно при удалении от точек бифуркации $v = v_1$ и $v = v_2$ ($c = 0, l = 1$) на одной из ветвей решений; другой ветви соответствуют течения, получаемые зеркальным отображением струи от уровня невозмущенной тяжелой жидкости. Например, фиг. 5, *b*, соответствует фиг. 6. При этом струю можно считать текущей по второму листу римановой поверхности, склеенному с плоскостью тяжелой жидкости на участке контакта. Струя вытекает из сопла NC , на участке CL «подсасывает» жидкость вверх, а в точке L — вновь входит в сопло LE .

Пусть λ_1 — первая (наименьшая по модулю) точка бифуркации уравнения $\varphi = \lambda\Delta\varphi$ задачи о симметричных формах контакта [1]. При помощи выражений для решений в окрестности точек бифуркации ([7], гл. 6, § 4, п. 2) можно убедиться, что значениям $\lambda < \lambda_1$ (из некоторой окрестности λ_1) соответствуют картины течений по типу фиг. 5, *b*, а $\lambda > \lambda_1$ — по типу фиг. 6.

Автор благодарит М. И. Гуревича и Г. Ю. Степанова, которым он обязан интересом к задачам о натекании струй на жидкость и советами которых способствовали улучшению настоящей заметки.

Поступило 12 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Цельник Д. С. Симметричные формы контакта струи с поверхностью тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
2. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Собр. соч., т. I, Изд-во АН СССР, 1961.
3. Mack L. R., Ben Chie Yen. Theoretical and experimental research on annular jets over land and over water. Symposium on ground effect phenomena, Princeton Univ., 1959.
4. Степанов Г. Ю. Особенности гидродинамического расчета струйной завесы над поверхностью воды. Судостроение, 1965, № 9.
5. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.
6. Виленьки Н. Я. и др. Функциональный анализ. Спр. матем. библ., Изд-во «Наука», 1964.
7. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1962.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.