ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г. В. ГОЛУБЕВ

(*Казань*)

В статье применяется метод, разработанный И. Н. Векуа для решения эллиптических уравнений [1, 2], к одной задаче подземной гидродинамики.

В отличие от работы [3], где рассматривалась одна центральная скважина, решение проводится для эксцентричной, что дает возможность найти суперпозицией функцию давления для неоднородного пласта с m произвольно расположенными скважинами. Для линейного закона изменения проницаемости получено почти точное решение. Линейное изменение проницаемости при численных расчетах бралось с карты проницаемости одного нефтяного месторождения. Вычисления выполнялись на ЭВМ «Минск-1».

Рассмотрим горизонтальный круговой пласт единичного радиуса постоянной мощности h и переменной проницаемости $k(x, y)$, разрабатываемый при водонапорном режиме одной эксцентричной скважиной с дебитом Q_i и полярными координатами r_i, θ_i. Жидкость считаем однородной, несжимаемой, пласт — недеформируемым, изотропным, а фильтрацию — подчиняющейся линейному закону Дарси. Коэффициент проницаемости $k(x, y)$ предполагаем аналитической функцией переменных x, y, не обращающейся в нуль ни в одной точке пласта. Требуется определить функцию давления в пласте при постоянном давлении p_0 на круговом контуре питания.

Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0, \qquad p=p_0 \quad \text{при } r=1 \tag{1}$$

В точке $A_i(r_i, \theta_i)$ функция p имеет логарифмическую особенность, причем

$$\lim_{l_i\to 0}\left\{-\oint_{l_i}\frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial n}ds\right\}=Q_i$$

Здесь l_i — произвольный контур, охватывающий скважину; μ — вязкость жидкости; n — внутренняя нормаль к контуру l_i.

Уравнение (1) приводится к интегральному уравнению Вольтерра [3]

$$u(z, \bar z)+\int_{z_i}^{z}\int_{\bar z_i}^{\bar z}c(\zeta, \bar\zeta)u(\zeta, \bar\zeta)\,d\zeta\,d\bar\zeta=\varphi(z)+\psi(\bar z) \tag{2}$$

$$u=\sqrt{k}(p-p_0), \qquad c=-{}^1/_4\Delta\sqrt{k}\,/\sqrt{k}, \qquad z=x+iy, \qquad \bar z=x-iy$$

Здесь φ и ψ — произвольные аналитические функции своих аргументов, Δ — оператор Лапласа.

Уравнение (2) решается обычным методом итераций. Сходимость процесса обеспечивается выполнением условий соответствующей теоремы для уравнения Вольтерра. Записывая его решение через резольвенту и пользуясь тем, что исходное уравнение (1) действительное, для функции u получим

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\left[\varphi(z)+\int_{z_i}^{z}\beta(z, \bar z, \zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta\right] \tag{3}$$

Функция u должна удовлетворять краевому условию: $u=0$ при $r=1$. Следовательно, получаем

$$u|_{r=1}=\operatorname{Re}\left[\varphi(z)+\int_{z_i}^{z}\beta(z, \bar z, \zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta\right]\Bigg|_{r=1}=0 \tag{4}$$

Произвольную аналитическую функцию $\varphi(z)$ ищем в виде

$$\varphi(z)=A\ln(z-z_i)+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \qquad \left(A=\frac{Q_i\mu}{2\pi h\sqrt{k_i}}\right) \tag{5}$$

Здесь k_i — значение проницаемости в точке A_i. Для определения неизвестных коэффициентов c_n подставляем $\varphi(z)$ в краевое условие (4), интегрируем, полагаем $r=1$ и приравниваем нулю коэффициенты при $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$. Тогда получается система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов c_n. Определяя c_n, подставляем их в u, затем находим $p = p_0 + u / \sqrt{k}$.

Величина u, определяемая формулами (3), (5), соответствует работе i-й скважины (можно ее обозначить $u^{(i)}$). Если в пласте имеется m произвольно расположенных скважин, то функция u находится суперпозицией величин $u^{(i)}$, т. е.

$$u = \Sigma u^{(i)}, \qquad p = \frac{1}{\sqrt{k}} \Sigma u^{(i)} + p_0$$

При этом неизвестные коэффициенты для одной из скважин c_{jn} находятся из системы уравнений, получаемой из краевого условия (4), а все остальные можно положить равными нулю. Изложенный прием решения проиллюстрируем примерами.

1. Пусть коэффициент проницаемости пласта определен формулой $k = k_0 e^{ax+by}$ или, после поворота на угол $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(b/a)$ системы координат,

$$k = k_0 \exp(\sqrt{a^2+b^2}\,x^1)$$

При вычислениях принимались следующие значения

$$\mu = 2.5 cn,\ h = 8\ м,\ k_0 = 0.4\ д,\ p_0 = 150\ am,$$

$$Q_i = 5200\ см^3/сек,\ r^\circ = 0.0001,\ \lambda^2 = {}^1\!/_4(a^2+b^2) = 1, \qquad r_i = 0.25,\ \theta_i = {}^1\!/_4\pi$$

Здесь r° — радиус скважины, промеренный радиусом контура питания.

Точное выражение для давления будет иметь вид [4]

$$p = -5.4055 e^{-r\cos\theta} \Bigg[K_0\left(\sqrt{r^2 - 0.5r\cos(\theta - {}^1\!/_4\pi) + 0.0625}\right) -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{K_n(1) I_n(0.25)}{I_n(1)} I_n(r) \cos n(\theta - {}^1\!/_4\pi) \Bigg] + 150 \qquad (6)$$

Здесь $\varepsilon_n = 2$ при $n \neq 0$ и $\varepsilon_n = 1$ при $n = 0$, I_n и K_n — функции Бесселя первого и второго рода мнимого аргумента n-го порядка.

Интегральное уравнение Вольтерра (2) в рассматриваемом случае имеет вид

$$u - \frac{\lambda^2}{4} \int_{z_i}^{z} \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}} u\, d\zeta\, d\bar{\zeta} = \varphi(z) + \psi(\bar{z})$$

Запишем первое приближение

$$u_1(x,y) = 3.4184\left(1 + \frac{R^2}{4}\right)\ln R - 0.8546 R^2 + \sum_{n=0}^{\infty} r^n (c_n' \cos n\theta - c_n'' \sin n\theta) +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \{ r^{n+2}(c_n' \cos n\theta - c_n'' \sin n\theta) - r^{n+1} r_i [c_n' \cos[(n+1)\theta - {}^1\!/_4\pi] -$$

$$- c_n'' \sin[(n+1)\theta - {}^1\!/_4\pi]] - r r_i^{n+1} [c_n' \cos[{}^1\!/_4(n+1)\pi - \theta] -$$

$$- c_n'' \sin[{}^1\!/_4(n+1)\pi - \theta]] + r_i^{n+2}(c_n' \cos {}^1\!/_4 n\pi - c_n'' \sin {}^1\!/_4 n\pi)\}$$

$$\left(R = \sqrt{r^2 - 0.5r\cos(\theta - {}^1\!/_4\pi) + 0.0625}, \qquad c_n = c_n' + i c_n''\right) \qquad (7)$$

Для определения коэффициентов c_n $(n = 0, 1, \ldots, 5)$ составляем систему 12 линейных алгебраических уравнений. Решение ее на машине «Минск-1» привело к следующим значениям: $c_0' = 0.676$, $c_0'' = -0.102, \ldots,$ $c_5' = -c_5'' = -0.00045$.

Значения p_1 подсчитываются по формуле

$$p_1 = 150 + 1.581 e^{-r\cos\theta} u_1 \qquad (8)$$

Аналогично записывается второе приближение. По найденным формулам проводились расчеты. Для каждой точки подсчитывались семь величин: точное значение давления p, первое и второе приближения p_1 и p_2, абсолютные и относительные ошибки первого и второго приближений. Вычисления проводились в 49 точках области (программа была составлена А. Г. Карибаевой). Результаты расчетов показали, что максимальная абсолютная ошибка первого приближения составляет 1.76 *ат*, в большинстве точек — меньше 1 *ат*; максимальная относительная ошибка составляет 1.24%, в большинстве точек — меньше 1%. Погрешность второго приближения еще меньше.

2. Коэффициент проницаемости изменяется линейно $k = k_0(1 + \alpha x + \beta y)$. Повернув систему координат, его можно представить в виде $k = k_0(1 + ax)$.

Запишем интегральное уравнение (2)

$$u + \lambda^2 \int_{z_i}^{z} \int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}} \frac{u d\zeta\, d\bar{\zeta}}{(1 + {}^1/_2 a\zeta + {}^1/_2 a\bar{\zeta})^2} = \varphi(z) + \psi(\bar{z}) \qquad \left(\lambda^2 = \frac{a^2}{16}\right)$$

Первое приближение имеет вид

$$u_1 = A \left[1 - \frac{1}{4} \ln \frac{1 + a(x + x_i) + {}^1/_4 a^2 [r^2 + r_i^2 + 2rr_i \cos(\theta + \theta_i)]}{(1 + ax)(1 + ax_i)}\right] \ln R -$$

$$- \lambda^2 A \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{a}{2}\right)^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_k^{\,j} (z - z_i)^{j+1}}{(j + 1)^2} [(z + \bar{z}_i)^{k-j} - (\bar{z} + z_i)^{k-j}] +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \lambda^2 \operatorname{Re} \sum_{k,n=0}^{\infty} c_n \left(-\frac{a}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{c_{k+1}^{\,j}}{n + j + 1} (z^{n+j+1} \bar{z}^{k+1-j} -$$

$$- z_i^{\,n+j+1} \bar{z}^{k+1-j} - \bar{z}_i^{\,n+j-1} z^{n+j+1} + z_i^{\,n+1+j} \bar{z}_i^{\,k+1-j}) \qquad (9)$$

Физические параметры пласта и жидкости примем такими же, как в случае 1; кроме того, $r_i = 0.81$, $\theta_i = 44°$, $k = 0.6(1 + 0.5x)$ (такое распределение снято с карты проницаемостей одного из участков Бавлинского нефтяного месторождения). Тогда, согласно (5), имеем $A = 2.9398$, а для определения коэффициентов c_n $(n = 0, 1, \ldots, 5)$ получаем систему одиннадцати линейных алгебраических уравнений. Приводим значения давления

$$p_1 = u_1[k_0(1 + ax)]^{-1/2} + p_0 \qquad (10)$$

вычисленные в различных точках области.

$\theta = 0$	$1/4\pi$	$1/2\pi$	$3/4\pi$	π	$5/4\pi$	$3/2\pi$	$7/4\pi$	
$p_1 = 149.01$	148.76	148.98	149.27	149.36	149.38	149.40	149.31	$(r = 0.2)$
$p_1 = 148.97$	147.97	148.91	149.59	149.50	149.45	149.56	149.62	$(r = 0.4)$
$p_1 = 149.21$	146.33	149.15	150.10	149.55	149.44	149.66	150.04	$(r = 0.6)$
$p_1 = 149.73$	138.74	149.71	150.81	149.46	149.38	149.66	150.55	$(r = 0.8)$

Кроме того, при $r = 0$ $p = 149.18$ *ат*; $r = 0.8101$, $\theta = 44°$, $p = 121.49$ *ат*. Расчеты показывают, что поправка второго приближения мала, т. е. $u_2 \approx u_1$. Для линейного закона изменения проницаемости выражение для давления p_1 (9)—(10) можно рассматривать как почти точное решение.

Из работ, близких к рассматриваемой задаче, следует отметить статьи [5, 6].

Поступило 12 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, 1948.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, изд. 2-е (перераб). Физматгиз, 1963.
3. Голубев Г. В. К задаче об определении поля давлений в неоднородной пористой среде. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 4, стр. 152—154.
4. Молокович Ю. М. К определению поля давлений в неоднородном нефтяном пласте. Изв. высш. учебн. завед. Нефть и газ, 1960, № 6, стр. 63—70.
5. Насыров Р. М. Об одном методе восстановления функции давления в неоднородной пористой среде. Изв. высш. учебн. завед. Математика, 1958, № 1, стр. 114—123.
6. Данилов В. Л. К определению давления в пластах с переменными проницаемостью и мощностью Изв. КФАН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1955, № 8, стр. 129—136.