И. С. Громека подчеркивает, что он пришел к такому заключению о виде поверхности вопреки принятому предположению о малости смещений на том основании, что объем части капли, соответствующий бесконечно большим смещениям, мал и что поверхность вблизи особой точки близка к сферической. Эти замечания справедливы и для нашего примера при небольших скоростях вытягивания, когда диаметр нити равен нескольким микронам. Поверхности, найденные по формуле (15). близки к воронкообразным поверхностям, наблюдаемым при эксперименте.

Таким образом, получены скорости, давление и уравнение свободной поверхности в зависимости от поверхностного натяжения и переменной радиальной силы и найдено в конечном виде уравнение поверхности, образующейся при вытягивании вязкого вещества из сферической капли при условии малости деформаций.

Поступило 11 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

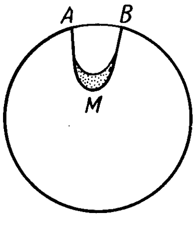
1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой жидкости. Гостехиздат, 1955.
2. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, 1952.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
5. Громека И. С. О движении жидких капель. Собр. соч., Изд-во АН СССР, 1952.

О ЗАСТОЙНЫХ ЗОНАХ В ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

А. Д. ЧЕРНЫШОВ (*Воронеж*)

Задача о течении вязко-пластической среды при линейной вязкости, вызываемом движением жесткого цилиндра произвольного поперечного сечения, рассмотрена Олдройдом [1]. В работе [2] автор находит несколько точных частных решений этой задачи. Задачи подобного рода рассматриваются также в [3–4]. Ниже рассматривается образование застойных зон в вязко-пластических средах.

1. Пусть контур поперечного сечения цилиндра имеет достаточно узкую щель, представляющую собой гладкий вогнутый участок ACB (фиг. 1). При движении этого цилиндра с постоянной скоростью параллельно своей образующей в идеально-пластической среде образуется линия скольжения [5], при этом к единице длины цилиндра необходимо приложить усилие $T = kl_s$, где l_s — периметр линии скольжения. Из физических соображений ясно, что этот периметр должен быть наименьшим из всех возможных, а поэтому в области щели линия скольжения должна совпадать с прямой, соединяющей точки A и B. Часть среды, расположенная в щели, будет двигаться вместе с цилиндром как жесткое целое, т. е. будет существовать застойная зона. Если среда обладает к тому же и вязкостью (является вязко-пластической), то застойная зона в этом случае несколько «размоется». Чем больше скорость u_0 цилиндра в вязко-пластической среде, тем меньше область, занимаемая застойной зоной. При некоторой скорости $u_0 = u_0^*$, характерной для данного цилиндра, застойная зона вырождается в некоторую точку M на контуре, т. е. при $u_0 = u_0^*$ вся вязко-пластическая среда в окрестности контура цилиндра будет находиться в движении. Для нахождения критической скорости u_0^* необходимо знать решение задачи о движении цилиндра в вязко-пластической среде, имеющем вогнутый участок на поперечном сечении. Если контур поперечного сечения и участок вогнутости имеют общую ось симметрии, то критическая точка M (фиг. 2), в которую вырождается застойная зона при $u_0 = u_0^*$, будет находиться на этой оси симметрии. Из условия $\gamma = 0$ в точке M находится u_0^*.



Фиг. 1

Пусть в вязко-пластической среде движется цилиндр с постоянной скоростью u_0, параллельно своей образующей.

Уравнение поперечного сечения цилиндра S с вогнутыми участками (фиг. 2) зададим в следующем виде:

$$\rho_s = \rho_0(1 - \delta \cos m\varphi) \tag{1.1}$$

который в точке $M(\rho_s = \rho_0(1 - \delta),\ \varphi = 0)$ имеет вогнутый участок при $\delta = 1 / m^2$.

Решение данной задачи ищется методом малого параметра. За нулевое приближение берется решение для круглого цилиндра.

Малым параметром является величина δ, характеризующая степень отклонения контура S от кругового.

Перейдем к безразмерным величинам. Отнесем напряжение к пределу текучести k, линейные размеры — к радиусу ядра в нулевом приближении h, скорости деформации — к величине kh / η, где η — коэффициент вязкости.

Запишем уравнение равновесия

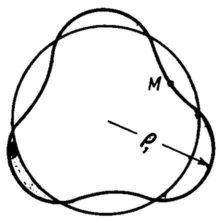
$$\frac{\partial \tau_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tau \rho}{\rho} = 0 \tag{1.2}$$

Условие изотропии

$$\tau_\rho \gamma_\varphi = \tau_\varphi \gamma_\rho \qquad (\gamma_\rho = \partial u / \partial \rho,\ \gamma_\varphi = \rho^{-1} \partial u / \partial \varphi) \tag{1.3}$$

Связь напряжение — скорость сдвига

$$\sqrt{\tau_\rho^2 + \tau_\varphi^2} = 1 + \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\varphi^2} \tag{1.4}$$



Фиг. 2

Граничные условия

$$u = 1 - \rho_0 + \ln \rho_0 \quad \text{при } \rho = \rho_s$$

$$u = 0 \quad \text{при } \rho = \rho_1(\varphi) \tag{1.5}$$

Здесь $\rho = \rho_1(\varphi)$ — уравнение контура ядра. Решение задачи ищем в виде

$$u = u^\circ = \delta u' + \ldots,\ \tau_\rho = \tau_\rho^\circ + \delta \tau_\rho' + \ldots,\ \tau_\varphi = \tau_\varphi^\circ + \delta \tau_\varphi' + \ldots \tag{1.6}$$

В выражениях (1.6) ограничимся первым приближением. Нулевое приближение задачи имеет вид

$$u^\circ = 1 - \rho + \ln \rho, \quad \tau_\rho^\circ = 1 / \rho, \quad \gamma_\rho^\circ = (1 - \rho) / \rho, \quad \tau_\varphi^\circ = \gamma_\varphi^\circ = 0 \tag{1.7}$$

Используя (1.3), (1.4), находим

$$\gamma_\rho^\circ \tau_\varphi' = \tau_\rho^\circ \gamma_\varphi', \qquad \tau_\rho' = \gamma_\rho' \tag{1.8}$$

Из уравнения равновесия (1.2) для нахождения первого приближения получим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2(1-\rho)}\frac{\partial^2 u'}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \varphi} = 0, \quad u' = (1 - \rho_0)\cos m_\varphi \quad \text{при } \rho = \rho_0, \quad u' = 0 \quad \text{при } \rho = 1 \tag{1.10}$$

Разделяя переменные в уравнении (1.9) и используя граничные условия (1.10), найдем

$$u' = (1 - \rho)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^m \frac{F(1+m,\, 1+m,\, 2,\, 1-\rho)}{F_0(1+m,\, 1+m,\, 2,\, 1-\rho_0)} \cos m\varphi \tag{1.11}$$

$$\gamma_\varphi = -\delta m(1 - \rho)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^m \frac{F}{F_0} \sin m\varphi + \ldots \tag{1.12}$$

$$\gamma_\rho = \frac{1-\rho}{\rho} + \delta\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{m-1}\left[\frac{m(1-\rho)F}{\rho_0 F_0} - (1-\rho)\frac{\rho(1+m)^2 F}{2\rho_0 F_0} - \frac{\rho F}{\rho_0 F_0}\right]\cos m\varphi + \ldots$$

Здесь $F = F(1 + m,\ 1 + m,\ 2,\ 1 - \rho)$ — гипергеометрическая функция.

Критическое значение скорости $u_0 = u_0^*$ найдем из условия обращения в нуль скорости сдвига γ в точке M $(\rho_s = \rho_0(1 - \delta),\ \varphi = 0)$. Обозначая $1 - \rho_0 = w_0$, где w_0 мало, и используя равенство

$$u_0 = kh\eta^{-1}(1 - \rho_0 + \ln \rho_0)$$

получим

$$u_0^* = 18 R_0 \delta^2 k / \eta \tag{1.13}$$

Зависимость (1.13) получена в предположении, что u_0 мало.

Если положить $k = 0$, то из (1.13) получим $u_0{}^* = 0$, т. е. в вязкой жидкости, как и следовало ожидать, застойная зона никогда не образуется при чистом сдвиге.

Если коэффициент вязкости $\eta \to 0$, то $u_0{}^* \to \infty$, т. е. для идеально-пластического материала при чистом сдвиге на вогнутых участках всегда образуется застойная зона.

2. Для исследования напряженного состояния в угловой точке (фиг. 3) при чистом сдвиге в упругом теле применим метод, развитый Нейбером в работе [6].

Используя обозначения этой работы, представим функции u и v в виде

$$u = -g(\tau)\cos\frac{\pi\varphi}{\pi-\omega}, \qquad v = f(\tau)\sin\frac{\pi\varphi}{\pi-\omega} \tag{2.1}$$

Для нахождения $f(\tau)$ и $g(\tau)$ имеем систему дифференциальных уравнений

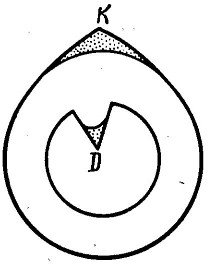
$$\frac{\pi}{\pi-\omega}\,\frac{f}{\tau} = g', \qquad \frac{\pi}{\pi-\omega}\,\frac{g}{\tau} = f' \tag{2.2}$$

Отсюда находим $g = f = A\tau^{\pi/(\omega-\pi)}$ и, следовательно,

$$\tau = \left(\frac{\rho\omega}{A\pi}\right)^{(\pi-\omega)/\omega} \qquad (\rho = \sqrt{x^2+y^2}) \tag{2.3}$$

При $\rho = 0$ и $\omega < \pi$ получаем $\tau = 0$, если $\omega > \pi$, то $\tau \to \infty$, а при $\omega = \pi$ касательное напряжение τ равно конечной величине.

Сделаем два вывода из предыдущих задач о возможной картине вязко-пластического течения между двумя цилиндрами (фиг. 3).



Фиг. 3

а) При небольших скоростях u_0 на вогнутых участках контура внутреннего цилиндра образуется застойная зона $ACBA$ вязко-пластической среды. При увеличении скорости u_0 эта зона уменьшается и может совсем исчезнуть.

б) Если контуры одного или обоих цилиндров имеют угловые точки с углом раствора ω по среде, то при $\omega < \pi$ в окрестности этой точки (D и K) всегда существует застойная зона среды, прилипшей к контуру одного из цилиндров. С увеличением скорости u_0 эта зона уменьшается, но никогда не исчезает полностью. Если $\omega > \pi$ на внутреннем контуре, то в окрестности этой точки при любой скорости u_0 вязко-пластическая среда течет. Для внешнего контура это явление не обязательно.

Таким образом, контур ядра и контур одного из цилиндров могут сопрягаться только так, что в точке сопряжения имеют общую опорную касательную, т. е. если контур ядра и контур цилиндра сопрягаются под углом φ, то обязательно $\varphi \geqslant \pi$, так как в противном случае среда в окрестности точки сопряжения будет находиться в жестком состоянии.

Поступило 3 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Oldroud I. G. Rectelinear plastic flow of a Bingham Solid., Proc. Cambridge. Philos. Soc., 1948, vol. 44 p. 2.
2. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды. ПМТФ, 1961, № 2.
3. Воларович М. П., Гуткин А. М. Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом пространстве между двумя коаксиальными трубками ЖТФ., 1946, т. 16, № 3.
4. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластических и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, Азнефтеиздат, 1959.
5. Ивлев Д. Д. О границе пластического состояния материала. Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 1.
6. Нейбер Г. Теория концентраций напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации. Механика, сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1961, № 4.