

ОБ ИЗМЕНЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ КАПЛИ ВЯЗКОГО ВЕЩЕСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

С. Н. КАРОЛИНСКАЯ (Москва)

В ряде технических задач, связанных с производством полимерных материалов, возникает необходимость теоретического изучения процессов, происходящих под действием внешних сил внутри сферических поверхностей, заполненных вязким веществом и обладающих значительным поверхностным натяжением.

В данной работе исследуется зависимость различных характеристик движения от поверхностного натяжения и радиальной переменной нагрузки при условии малости деформаций. В качестве примера рассматривается задача, моделирующая в приближенном виде процесс получения микропровода из жидкого металла.

Пусть вязкое несжимаемое вещество заполняет сферу радиуса a , которая первоначально находится в равновесии.

Введем сферическую систему координат с началом в центре сферы, причем угол θ отсчитывается от вертикали против часовой стрелки.

Предположим, что в момент $t = 0$ к свободной поверхности прикладывают переменную радиальную силу, под действием которой сферическая поверхность $r = a$ медленно деформируется в поверхность вращения $r = \rho(\theta, t)$, где t — время.

Тогда уравнения осесимметричного движения жидкости без учета инерционных членов и уравнение неразрывности запишутся в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) \\ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta}{r^2 \sin \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\ &\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_r, v_θ — компоненты скорости, p — давление, μ — абсолютный коэффициент вязкости.

Будем полагать смещения точек поверхности, вызванные внешней силой, малыми по сравнению с радиусом сферы a и заменим граничные условия на свободной поверхности $r = \rho$ условиями на сфере $r = a$.

Кинематическое условие на свободной границе имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = v_r \Big|_{r=a} \quad (2)$$

На свободной поверхности касательное напряжение $p_{r\theta}$ равно нулю, а нормальное p_{rr} равно сумме напряжений от внешней нагрузки и поверхностного натяжения

$$p_{r\theta} \Big|_{r=a} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (3)$$

$$p_{rr} \Big|_{r=a} = \left(-p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = F(\theta, t) - q(k_1 + k_2) \quad (4)$$

Здесь $F(\theta, t)$ — внешняя нагрузка, отнесенная к единице площади; q — коэффициент поверхностного натяжения; k_1 и k_2 — главные кривизны свободной поверхности вращения $r = \rho(\theta, t)$, причем

$$k_1 + k_2 = - \frac{\rho \sin \theta (\rho \rho_\theta'' - \rho^2 - 2\rho_\theta'^2) + (\rho_\theta' \cos \theta - \rho \sin \theta) (\rho^2 + \rho_\theta'^2)}{\rho \sin \theta (\rho^2 + \rho_\theta'^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Последнее равенство можно получить из выражения для суммы главных кривизн поверхности вращения в цилиндрических координатах [2].

Допустим, что $\rho_\theta'^2 \ll \rho^2$, так что выражение (5) с учетом малости смещений приближенно представится в виде

$$k_1 + k_2 = 2/a - a^{-2} (\rho_{\theta\theta}'' + \rho_\theta' \operatorname{ctg} \theta)$$

Тогда граничное условие (4) переписывается следующим образом

$$\left(-p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = F(\theta, t) - 2q/a + qa^{-2} (\rho_{\theta\theta}'' + \rho_\theta' \operatorname{ctg} \theta) \quad (6)$$

Предположим, кроме того, что скорости внутри сферы ограничены. Так как первоначально вещество внутри сферы покоилось, то

$$v_r = v_\theta = 0, \quad t = 0 \quad (7)$$

Решение системы (1) будем искать в виде

$$v_r = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n(r, t) P_n(\cos \theta), \quad v_\theta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} B_n(r, t) P_n^1(\cos \theta)$$

$$p = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) C_n(r, t) P_n(\cos \theta) \quad (8)$$

где $P_n(\cos \theta)$ и $P_n^1(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода целочисленной степени нулевого и первого порядка [3], соответственно; $A_n(r, t)$, $B_n(r, t)$ и $C_n(r, t)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя соотношения (8) в систему (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях функций Лежандра, находим системы обыкновенных дифференциальных уравнений, где штрихами обозначены производные по r

$$\mu^{-1} C_0' = A_0'' + 2r^{-1} A_0' - 2r^{-2} A_0, \quad \frac{1}{2} A_0' + r^{-1} A_0 = 0 \quad (9)$$

$$\mu^{-1} C_n' = A_n'' + 2r^{-1} A_n' - (n^2 + n + 2)r^{-2} A_n + 2r^{-2} B_n$$

$$\mu^{-1} C_n = \frac{r}{n(n+1)} B_n'' + \frac{2}{n(n+1)} B_n' - r^{-1} B_n + 2r^{-1} A_n$$

$$A_n' r + 2A_n - B_n = 0 \quad (n \geq 1) \quad (10)$$

При условии ограниченности скоростей внутри сферы решениями систем (9) и (10) будут функции

$$A_0(r, t) = 0, \quad C_0(r, t) = c_0(t)$$

$$A_n(r, t) = A_{1n}(t) r^{n-1} + A_{2n}(t) r^{n+1}$$

$$B_n(r, t) = A_{1n}(t) (n+1) r^{n-1} + A_{2n}(t) (n+3) r^{n+1}$$

$$C_n(r, t) = 2\mu[(2n+3)/n] A_{2n}(t) r^n \quad (n \geq 1)$$

Граничное условие (3) дает следующую зависимость

$$A_{1n} = -\frac{n(n+2)}{n^2-1} A_{2n} \quad (n \geq 2), \quad A_{21} = 0 \quad (11)$$

Допустим, что функция $F(\theta, t)$ разлагается в ряд

$$F(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) F_n(t) P_n(\cos \theta), \quad F_n(t) = \int_0^\pi F(\theta, t) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (12)$$

Из граничного условия (6), используя соотношения (2) и (12), получаем

$$\frac{1}{2} c_0(t) = \frac{2q}{a} - \frac{1}{2} F_0(t)$$

$$2\mu(n-1) a^{n-2} A_{1n}' + 2\mu \frac{(n^2 - n - 3)}{n} a^n A_{2n}' +$$

$$+ q(n+1) n a^{-2} (A_{1n} a^{n-1} + A_{2n} a^{n+1}) = F_n'(t) \quad (n \geq 1) \quad (13)$$

Из уравнения (13) при $n=1$, учитывая (11), найдем

$$A_{11} = -\frac{1}{2} a^2 q^{-1} F_1'(t)$$

Решение дифференциального уравнения (13) после замены A_{1n} через A_{2n} по формуле (11) с учетом начального условия (7) имеет вид

$$A_{2n}(t) = \frac{(n-1) \alpha_n}{q a^{n-1} n (2n+1)} e^{-\alpha_n t} \int_0^t F_n'(\tau) e^{\alpha_n \tau} d\tau, \quad \alpha_n = \frac{q n^2 (n+1) (2n+1)}{2\mu a (n-1) (2n^2 + 4n + 3)} \quad (n \geq 2)$$

По формуле (11) определяем

$$A_{1n}(t) = \frac{(n+2)a_n}{qa^{n-3}(n+1)(2n+1)} e^{-\alpha n t} \int_0^t F_n'(\tau) e^{\alpha n \tau} d\tau$$

Подставляя все найденные функции в систему (8), окончательно находим давление и компоненты скорости

$$v_r = \frac{3}{4} a^2 q^{-1} F_1'(t) \cos \theta -$$

$$- \frac{1}{2q} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n P_n(\cos \theta)}{a^{n-1} n(n+1)} [(n^2-1)r^{n+1} - a^2 n(n+2)r^{n-1}] e^{-\alpha n t} \int_0^t F_n'(\tau) e^{\alpha n \tau} d\tau$$

$$v_\theta = - \frac{3}{4} a^2 q^{-1} F_1'(t) \sin \theta -$$

$$- \frac{1}{2q} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n P_n^1(\cos \theta)}{a^{n-1} n^2(n+1)} [(n^2+2n-3)r^{n+1} - a^2 n(n+2)r^{n-1}] e^{-\alpha n t} \int_0^t F_n'(\tau) e^{\alpha n \tau} d\tau$$

$$p = 2qa^{-1} - \frac{1}{2} F_0(t) -$$

$$- \frac{\mu}{q} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n(2n+3)(n-1)P_n(\cos \theta)}{a^{n-1}n^2} r^n e^{-\alpha n t} \int_0^t F_n'(\tau) e^{\alpha n \tau} d\tau$$

Из условия (2) получаем уравнение свободной поверхности

$$\begin{aligned} \rho(\theta, t)/a &= 1 + \frac{3}{4} a q^{-1} F_1(t) \cos \theta + \\ &+ \frac{a}{2q} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n(2n+1)P_n(\cos \theta)}{n(n+1)} \int_0^t \int_0^\tau F_n'(x) \exp \alpha_n(x-\tau) dx d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим наиболее важный для практики частный случай внешней нагрузки, соответствующий сосредоточенной силе, стремящейся с ростом t к постоянному значению

$$F(\theta, t) = F_0(1 - e^{-\beta t})\delta(\theta) / \sin \theta$$

где $\delta(\theta)$ — дельта-функция; F_0 ; β — постоянные.

Уравнение свободной поверхности (14) примет вид

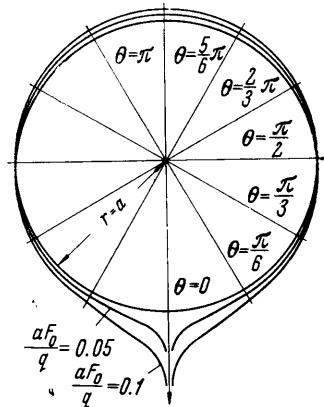
$$\rho(\theta, t)/a = 1 + \frac{aF_0}{2q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)P_n(\cos \theta)}{n(n+1)(\alpha_n - \beta)} [\alpha_n(1 - e^{-\beta t}) - \beta(1 - e^{-\alpha n t})]$$

При $t \rightarrow \infty$, используя известные соотношения [4], найдем

$$\rho(\theta) / a = 1 - a q^{-1} F_0 (1/2 + \ln \sin^2 \theta/2) \quad (15)$$

Следовательно, с ростом t свободная поверхность принимает устойчивую форму, вид которой определяется безразмерным параметром $a q^{-1} F_0$, не зависящим от вязкости. Решение справедливо вне некоторой окрестности точки приложения силы при условии $|(\rho - a)/a| < 1$, $\rho_0^{1/2} < \rho^2$. На фигуре представлен вид свободной поверхности для значений параметра $a q^{-1} F_0 = 0.05, 0.1$.

Отметим, что И. С. Громека в работе [5], исследуя движение тяжелой капли в жидкой среде, показал, что при известных условиях поверхностью капли, мало отличающейся от сферы, будет поверхность вращения с округленной передней частью, но имеющая длинный острый конец на оси в задней части, причем эта особенность того же вида, что и в рассмотренном выше примере.



И. С. Громека подчеркивает, что он пришел к такому заключению о виде поверхности вопреки принятому предположению о малости смещений на том основании, что объем части капли, соответствующий бесконечно большим смещениям, мал и что поверхность вблизи особой точки близка к сферической. Эти замечания справедливы и для нашего примера при небольших скоростях вытягивания, когда диаметр нити равен нескольким микронам. Поверхности, найденные по формуле (15), близки к воронкообразным поверхностям, наблюдаемым при эксперименте.

Таким образом, получены скорости, давление и уравнение свободной поверхности в зависимости от поверхностного натяжения и переменной радиальной силы и найдено в конечном виде уравнение поверхности, образующейся при вытягивании вязкого вещества из сферической капли при условии малости деформаций.

Поступило 11 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

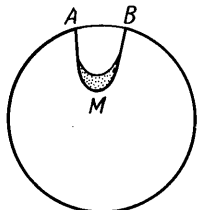
1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой жидкости. Гостехиздат, 1955.
2. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, 1952.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
5. Громека И. С. О движении жидких капель. Собр. соч., Изд-во АН СССР, 1952.

О ЗАСТОЙНЫХ ЗОНАХ В ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

А. Д. ЧЕРНЫШОВ (*Воронеж*)

Задача о течении вязко-пластической среды при линейной вязкости, вызываемом движением жесткого цилиндра произвольного поперечного сечения, рассмотрена Олдройдом [1]. В работе [2] автор находит несколько точных частных решений этой задачи. Задачи подобного рода рассматриваются также в [3-4]. Ниже рассматривается образование застойных зон в вязко-пластических средах.

1. Пусть контур поперечного сечения цилиндра имеет достаточно узкую щель, представляющую собой гладкий вогнутый участок ACB (фиг. 1). При движении этого цилиндра с постоянной скоростью параллельно своей образующей в идеально-пластической среде образуется линия скольжения [3], при этом к единице длины цилиндра необходимо приложить усилие $T = kl_s$, где l_s — периметр линии скольжения. Из физических соображений ясно, что этот периметр должен быть наименьшим из всех возможных, а поэтому в области щели линия скольжения должна совпадать с прямой, соединяющей точки A и B . Часть среды, расположенная в щели, будет двигаться вместе с цилиндром как жесткое целое, т. е. будет существовать застойная зона. Если среда обладает к тому же и вязкостью (является вязко-пластической), то застойная зона в этом случае несколько «размоется». Чем больше скорость u_0 цилиндра в вязко-пластической среде, тем меньше область, занимаемая застойной зоной. При некоторой скорости $u_0 = u_0^*$, характерной для данного цилиндра, застойная зона вырождается в некоторую точку M на контуре, т. е. при $u_0 = u_0^*$ вся вязко-



Фиг. 1

пластическая среда в окрестности контура цилиндра будет находиться в движении. Для нахождения критической скорости u_0^* необходимо знать решение задачи о движении цилиндра в вязко-пластической среде, имеющем вогнутый участок на поперечном сечении. Если контур поперечного сечения и участок вогнутости имеют общую ось симметрии, то критическая точка M (фиг. 2), в которую вырождается застойная зона при $u_0 = u_0^*$, будет находиться на этой оси симметрии. Из условия $\gamma = 0$ в точке M находится u_0^* .

Пусть в вязко-пластической среде движется цилиндр с постоянной скоростью u_0 , параллельно своей образующей.

Уравнение поперечного сечения цилиндра S с вогнутыми участками (фиг. 2) зададим в следующем виде:

$$\rho_s = \rho_0(1 - \delta \cos m\varphi) \quad (1.1)$$

который в точке M ($\rho_s = \rho_0(1 - \delta)$, $\varphi = 0$) имеет вогнутый участок при $\delta = 1/m^2$.