ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ВЯЗКОГО СЛОЯ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

А. Н. БОЖИНСКИЙ (*Москва*)

Исследуется устойчивость по отношению к малым возмущениям медленного течения слоя несжимаемой ньютоновской жидкости, стекающей под действием силы тяжести по неограниченной наклонной плоскости. В отличие от работ по гидродинамической неустойчивости жидких пленок [1–3], в качестве граничного условия на подстилающей поверхности используется условие проскальзывания слоя. Подобный подход применялся при анализе разрушения расплава полимеров в процессе экструзии через узкий канал [4]. Данная задача связывается с проблемой обрушения снежных лавин. Снежный покров идеализируется слоем линейно вязкой сплошной среды, находящейся в квазистатическом состоянии равновесия на наклонной плоскости. Показано, что неустойчивость основного решения обусловлена определенным критическим значением параметра, характеризующего проскальзывание; в предельном случае отсутствия проскальзывания (прилипание) основное решение всегда устойчиво.

1. Соотношения несжимаемой линейно вязкой среды имеют вид [5]

$$\varepsilon_{ii} = 0, \qquad s_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad \varepsilon_{ij} = {}^1/_2(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \tag{1.1}$$
$$i, j = 1, 2, 3$$

Здесь ε_{ij} — компоненты девиатора скоростей деформации, s_{ij} — компоненты девиатора напряжений, u_j — компоненты вектора скоростей смещений, μ — коэффициент вязкости, x_j — координаты ортогональной декартовой системы.

Рассмотрим медленное стекание при отсутствии сил инерции слоя среды, описываемой уравнениями (1.1), по наклонной плоскости (фиг. 1).

Уравнения равновесия Коши и уравнение неразрывности имеют вид

$$s_{ij,j} - p_{,j}\delta_{ij} + X_i = 0 \qquad (-p = {}^1/_3\sigma_{ii}) \tag{1.2}$$

$$u_{i,i} = 0 \qquad (i, j = x, y, z) \tag{1.3}$$

Здесь p — гидростатическое давление, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, X_i — компоненты вектора массовых сил, δ_{ij} — символ Кронеккера, запятая означает дифференцирование по последующему индексу.

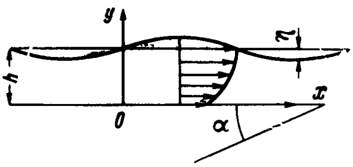
Введем безразмерные переменные (размерные переменные отмечены звездочкой)

$$x = \frac{x^*}{h}, \quad y = \frac{y^*}{h}, \quad s_{xx} = \frac{s_{xx}^*}{\rho g h \sin\alpha}, \quad s_{yy} = \frac{s_{yy}^*}{\rho g h \sin\alpha}$$

$$s_{xy} = \frac{s_{xy}^*}{\rho g h \sin\alpha}, \quad p = \frac{p^*}{\rho g h \sin\alpha}, \quad u_x = \frac{u_x^*}{U_x^*}, \quad U_x^* = \frac{\rho g h^2 \sin\alpha}{3\mu} \tag{1.4}$$

Здесь U_x^* — характерная скорость стекания, ρ — массовая плотность среды, g — ускорение силы тяжести, h — толщина слоя, α — угол наклона склона.

Тогда уравнение равновесия и уравнение неразрывности в случае плоской деформации запишутся в виде



Фиг. 1

$$-\partial p / \partial x + \partial s_{xx} / \partial x + \partial s_{xy} / \partial y + 1 = 0 \tag{1.5}$$
$$-\partial p / \partial y + \partial s_{xy} / \partial x + \partial s_{yy} / \partial y - \operatorname{ctg}\alpha = 0$$

$$\partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y = 0 \tag{1.6}$$

Соотношения напряжения — скорости деформации будут

$$\partial u_x / \partial x = {}^3/_2 s_{xx}, \qquad \partial u_y / \partial y = {}^3/_2 s_{yy}$$
$$\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x = 3 s_{xy} \tag{1.7}$$

Уравнениям (1.5) — (1.7) удовлетворяют соотношения (основное или невозмущенное решение, отмечаемое верхним индексом «градус»)

$$u_x^\circ = {}^3/_2[1 - (1 - y)^2 + 2\beta], \qquad p^\circ = (1 - y)\operatorname{ctg}\alpha \tag{1.8}$$
$$s_{xy}^\circ = 1 - y, \qquad s_{xx}^\circ = s_{yy}^\circ = u_y^\circ = 0$$

Решение (1.8) получено в предположении, что на плоской свободной поверхности напряжения отсутствуют, а на подстилающей поверхности выполняется условие

$$u_x(0) + u_{xs}(0) = 0 \tag{1.9}$$

где u_{xs} — безразмерная скорость, обусловленная проскальзыванием. Будем предполагать, что u_{xs}^* зависит только от касательного напряжения на подстилающей поверхности, т. е.

$$u_{xs}^* = f(\tau_w^*)\tau_w^* \qquad (\tau_w^* = -s_{xy}^*(0), \ \beta = f\mu / h, \ u_{xs}^\circ(0) = -3\beta) \tag{1.10}$$

Здесь τ_w^* — касательное напряжение на подстилающей поверхности, β — безразмерный параметр.

2. Наложим на основное решение (1.8) малые нестационарные возмущения

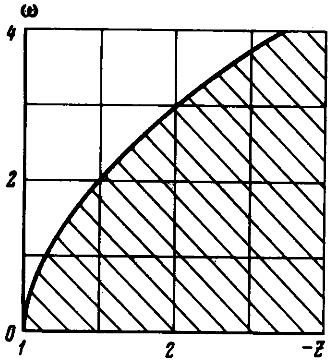
$$p = p^\circ + p', \qquad s_{xx} = s_{xx}^\circ + s_{xx}' \ldots, \qquad u_x = u_x^\circ + u_x' \ldots \tag{2.1}$$

где штрих относится к приращениям величин.

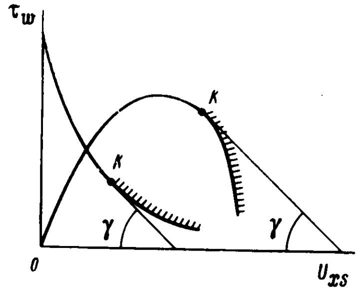
Тогда уравнения равновесия относительно приращений примут вид

$$-\partial p' / \partial x + \partial s_{xx}' / \partial x + \partial s_{xy}' / \partial y = 0, \qquad -\partial p' / \partial y + \partial s_{xy}' / \partial x + \partial s_{yy}' / \partial y = 0 \tag{2.2}$$

В силу линейности уравнение неразрывности и соотношения напряжения — скорости деформации для приращений имеют тот же вид, что и уравнения (1.6), (1.7) соответственно.



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть ψ — безразмерная функция тока; из уравнения неразрывности вытекает

$$u_x' = -\partial\psi / \partial y, \qquad u_y' = \partial\psi / \partial x \tag{2.3}$$

В итоге получаем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2\nabla^2\psi = 0 \tag{2.4}$$

при граничных условиях на подстилающей поверхности ($y = 0$)

$$\partial\psi / \partial x = 0, \qquad \partial\psi / \partial y - {}^1\!/_3 \xi \partial^2\psi / \partial y^2 = 0 \qquad (\xi = (du_{xs}^\circ / d\tau_w^\circ)_{y=0}) \tag{2.5}$$

и на свободной поверхности ($y = 1$)

$$\begin{gathered}\eta \operatorname{ctg} \alpha - p + \frac{2}{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 3\eta = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{3}{2}(1+2\beta)\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \qquad \left(\eta = \frac{\eta^*}{h},\ t = \frac{t^* U_x^*}{h}\right)\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь η — безразмерная амплитуда возмущения свободной поверхности, t — безразмерное время. Пусть

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i\omega(x-ct)} \tag{2.7}$$

где $\varphi(y)$ — комплексная амплитуда, ω — волновое число, c — комплексная безразмерная скорость волны.

Подставляя (2.7) в (2.4) — (2.6), получим следующую задачу о собственных значениях:

$$\varphi^{IV}(y) - 2\omega^2\varphi''(y) + \omega^4\varphi(y) = 0 \tag{2.8}$$

$$\varphi(y) = 0, \qquad \varphi'(y) - {}^1\!/_3\xi\varphi''(y) = 0 \qquad \text{при } y = 0 \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}\varphi''(y) + (\omega^2 + 3/d)\varphi(y) = 0 \\ \frac{1}{3i\omega}\varphi'''(y) + i\omega\varphi'(y) + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{d}\varphi(y) = 0 \qquad \text{при } y = 1 \\ d = {}^3\!/_2(1+2\beta) - c\end{gathered} \tag{2.10}$$

3. Общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\varphi(y) = A\,\mathrm{ch}\,\omega y + B\,\mathrm{sh}\,\omega y + Cy\,\mathrm{ch}\,\omega y + Dy\,\mathrm{sh}\,\omega y \tag{3.1}$$

В силу однородности граничных условий (2.9), (2.10), для существования нетривиального решения необходимо обращение в нуль детерминанта системы алгебраических уравнений. Вычисления дают

$$\Delta = {}^4/_3 i\omega^4 + 2i\omega^2 d^{-1} + {}^4/_3 i(1+\xi d^{-1})\omega^2\,\mathrm{ch}^2\,\omega + d^{-1}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,2\omega - 2d^{-1}\omega\,\mathrm{ctg}\,\alpha + {}^8/_9 i\xi\omega^4 + {}^4/_9 i\xi\omega^3\,\mathrm{sh}\,2\omega - {}^4/_3 id^{-1}\xi\omega^2\,\mathrm{sh}^2\,\omega + {}^4/_3 d^{-1}\xi\omega\,\mathrm{sh}^2\,\omega\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 0 \tag{3.2}$$

Кривая нейтральной устойчивости соответствует $\mathrm{Im}\, c = 0$; это дает

$$ {}^4/_3\xi\omega\,\mathrm{sh}^2\,\omega - 2\omega + \mathrm{sh}\,2\omega = 0 \tag{3.3}$$

Заметим, что при $\beta = \xi = 0$ всегда $\mathrm{Im}\, c < 0$, что означает устойчивость при любом волновом числе. Этот результат вытекает из решения И Цзя-шуня [1] задачи о гидродинамической неустойчивости слоя ньютоновской жидкости при нулевом числе Рейнольдса и отсутствии поверхностного натяжения.

График нейтральной кривой приведен на фиг. 2. Видно, что при нулевом волновом числе существует критическое значение $Z = 1/\xi = -1$, начиная с которого малые возмущения могут привести к неустойчивости. Область, соответствующая неустойчивости, заштрихована.

В уравнение нейтральной кривой не входит явно угол наклона α; вклад этого параметра проявляется через τ_w. Отрицательные значения Z показывают, что кривая $\tau_w(u_{xs})$ либо должна иметь локальный максимум, либо иметь только ниспадающую ветвь (фиг. 3).

В точке K имеем $\mathrm{tg}\,\gamma = -1$, где γ — угол наклона касательной. При исследовании неустойчивости расплава полимеров [4] аномалии, обусловленные падением τ_w при увеличении u_{xs}, связывались с разрушением макроструктуры расплава. По-видимому, аналогичное явление имеет место в снежном покрове; для окончательных выводов необходимы соответствующие эксперименты. Поскольку основное решени (1.8) можно рассматривать как половину решения задачи о течении в трубе [4], то проведенный анализ позволяет оценить влияние свободной поверхности на устойчивость. Хотя кривая (3.5) нейтральной устойчивости несколько отличается от полученной в работе [4], минимальные критические значения параметра проскальзывания оказываются одинаковыми и также соответствуют нулевому волновому числу.

Таким образом, показано, что условие прилипания обеспечивает устойчивость основного решения по отношению к возмущениям вида (2.7), в то же время проскальзывание слоя по подстилающей поверхности может в определенных случаях привести к неустойчивости.

Автор признателен С. С. Григоряну за обсуждение работы.

МГУ
Проблемная лаборатория снежных лавин

Поступило 21 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Yih Chia-shun. Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3. (русск. перев. И Цзя-шунь. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, № 5, стр. 81).
2. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. Устойчивость ламинарного течения жидкой пленки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
3. Листров А. Т. Об устойчивости течения вязко-упругой жидкости, стекающей по наклонной плоскости. ПМТФ, 1965, № 5.
4. Pearson J. R. A., Petrie C. J. S. On the melt-flow instability of extruded polymers. Proc. 4th Intern. Cong. Rheol., Providence, R. I. Part 3, 1963.
5. Frendental A. M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. Handb, Phys., 1958, B. 4. (русск. перев.: Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. Физматгиз, 1962).