Из интеграла Бернулли следует, что максимальное давление — в точках BB'. С увеличением x давление на внутренней поверхности падает до внешнего давления $p = 0$. При малых возмущениях в бесконечности давление по-прежнему совпадает с внешним. Поэтому для больших x интеграл Бернулли запишем в виде

$$\partial\varphi / \partial t + {}^1/_2 v_\tau^2 + {}^1/_2 v_x^2 + {}^1/_2 v_r^2 = T(t) \tag{7}$$

Здесь $T(t)$ — некоторая ограниченная функция.

Используя (2), (6), равенство $v_r(f, x, t) = f^{\cdot}$ и учитывая лишь линейные члены, на внутренней поверхности имеем

$$(f^2 - \ln f^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{ff^{\cdot}}{1-f^2}\right) + \frac{v_0^2(1-r_0^2)^2}{(1-f^2)^2} + \frac{c^2}{f^2} = T(t) \tag{8}$$

Введем новую функцию η посредством соотношения

$$f = r_0 + \eta \tag{9}$$

Подставив (9) в (8) и линеаризуя по малой величине η, получим

$$\eta^{\cdot\cdot} + \omega\eta = T(t), \qquad \omega = k^2\left(\frac{2v_0^2 r_0}{1-r_0^2} - \frac{c^2}{r_0^3}\right), \qquad k^2 > 0$$

Течение оказывается устойчивым, когда $\omega > 0$, а равенство

$$\frac{2Q^2}{\pi^2(1-r_0^2)^3} = \frac{c^2}{r_0^4}$$

определяет границу устойчивости.

Неустойчивое течение при возмущении переходит в другое, устойчивое, в котором имеется точка отрыва поверхности жидкости от внутреннего цилиндра.

Этот результат подтверждается более точным, но громоздким исследованием с использованием квазиконформных отображений, проведенным одним из авторов.

Поступило 23 IV 1966

ВИДОИЗМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ НИКУРАДЗЕ ДЛЯ ГЛАДКИХ ТРУБ

М. И. ГУРЕВИЧ

(*Москва*)

Профиль скоростей по сечению гладкой трубы при турбулентном течении может быть описан при помощи известной экспериментальной формулы Никурадзе [1]

$$u / v_* = 5.75 \log \eta + 5.5 \qquad (\eta = yv_* / \nu,\ v_* = \sqrt{\tau / \rho}) \tag{1}$$

Здесь u — скорость жидкости, y — расстояние от стенки трубы, ν — коэффициент кинематической вязкости, τ — напряжение трения, ρ — плотность жидкости.

Формула (1) выведена для интервала $1 < \log \eta < 5$. При $\eta \to 0$, т. е. в пристеночном вязком слое, формула (1) теряет свою силу, так как $\log \eta \to -\infty$ при $\eta \to 0$. Формулу Никурадзе нетрудно изменить так, чтобы она была пригодна при $\eta \ll 1$ и мало отличалась от (1) на участке $1 < \log \eta < 5$.

Переходя к натуральному логарифму, можно элементарным путем преобразовать формулу (1) к виду

$$u / v_* = 1.245 \ln (81.3\, \eta^2) \tag{2}$$

При $1 < \log \eta < 5$ или $10 < \eta < 10^5$ отношение $(1 + \eta / 1.245) : (81.3\, \eta^2)$ меньше $0.11 \cdot 10^{-2}$, и поэтому на нашем участке можно с достаточной точностью заменить (1) или (2) через

$$\frac{u}{v_*} = 1.245 \ln\left[1 + \frac{\eta}{1.245} + 81.3\eta^2\right] \tag{3}$$

или

$$\frac{u}{v_*} = 2.875 \log\left[1 + \frac{\eta}{1.245} + 81.3\eta^2\right]$$

С другой стороны, при $\eta \to 0$ формула (3) может быть заменена асимптотической формулой, дающей распределение скоростей в пристеночном вязком слое

$$u / v_* = \eta \qquad \text{или} \qquad u = y v_*^2 / \nu = y\tau / \rho\nu$$

Таким образом, уравнение (3) пригодно вблизи стенки трубы, а на участке $1 < \log \eta < 5$ мало отличается от уравнения Никурадзе.

Поступило 9 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikuradse J. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI Forschungsheft, 1932, p. 356.

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ КАРМАНА — ХАУВАРТА

М. С. АФАШАГОВ

(*Нальчик*)

В книге [1] (стр. 248—249) утверждается, что функция

$$f(\eta) = \exp(-{}^1/_2\eta^2) \tag{1}$$

является решением уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{4}{\eta}\frac{df}{d\eta} + \frac{5}{2}\eta\frac{df}{d\eta} + 5f = 0 \tag{2}$$

удовлетворяющим условию

$$f(0) = 1 \tag{3}$$

В ошибочности утверждения автора можно убедиться непосредственной проверкой. В настоящей заметке исправляется эта неточность.

Сделав замену независимой переменной $\eta = \sqrt{x}$, уравнение (2) можно привести к следующему виду

$$\frac{d}{dx}\left[4x\frac{df}{dx}\right] + \frac{d}{dx}[(5x+6)f] = 0 \tag{4}$$

Интегрируя это уравнение, получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$4x\frac{df}{dx} + (5x+6)f = 2c_2 \qquad (c_2 = \mathrm{const})$$

решение которого имеет вид

$$f(x) = x^{-3/2}e^{-5/4x}\left(c_1 + \frac{c_2}{2}\int_0^x \sqrt{x}\, e^{5/4x}dx\right) \qquad (c_1 = \mathrm{const})$$

Возвращаясь к переменной η, получим

$$f(\eta) = \eta^{-3}e^{-5/4\eta^2}\left(c_1 + c_2\int_0^\eta \eta^2 e^{5/4\eta^2}\,d\eta\right) \tag{5}$$

При $\eta = 0$ функция $f(\eta)$ не определена, как это видно из равенства (5). Однако, положив $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, найдем $\lim f(\eta) = 1$ при $\eta \to 0$.

Таким образом, решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (3), имеет вид

$$f(\eta) = 3\eta^{-3}e^{-5/4\eta^2}\int_0^\eta \eta^2 e^{5/4\eta^2}\,d\eta \tag{6}$$

Поступило 9 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Бай Ши И. Турбулентное течение жидкостей и газов. Изд. иностр. лит., 1962.