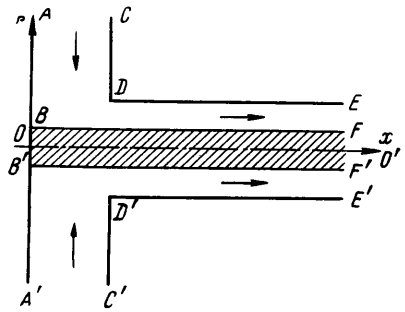
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

М. А. ГОЛЬДШТИК, Ю. И. ПЕТУХОВ

(*Новосибирск*)

Рассмотрим вопрос о критерии устойчивости потенциального течения несжимаемой невесомой жидкости с $\rho = 1$ *г/см*^{3} в геометрии, представленной на фигуре.

Здесь OO' — ось симметрии, $BFF'B'$, $DEE'D'$ — внутренняя и внешняя полубесконечные цилиндрические стенки, AA' — плоская бесконечная стенка, $CDD'C'$ — плоская бесконечная стенка с круглым отверстием DD'. Из бесконечности через $ACA'C'$ поступает закрученная, т. е. имеющая отличную от нуля циркуляцию скорости Г, жидкость, расход которой равен Q. За единицу длины выберем радиус внешнего цилиндрика, а безразмерный радиус внутреннего цилиндра обозначим через r_0.



Известно, что в отсутствие внутренней стенки вблизи оси существует осесимметричная свободная поверхность жидкости (зона приосевого разрыва), радиус которой зависит от Г и Q и может быть сколь угодно близким к единице при больших Г и малых Q (критерий известен). Возникает вопрос, существует ли при произвольном сочетании параметров Г, Q и r_0 течение, изображенное на фигуре.

Анализ плоского аналога течения, где центробежная сила заменялась силой тяжести, показал, что течение всегда существует, однако оно не всегда устойчиво.

Здесь, по аналогии с плоским случаем, полагается, что рассматриваемое течение не всегда устойчиво, и приближенно ищется критерий устойчивости.

Пусть поверхность жидкости, прилегающая к внутренней стенке, получила малую радиальную скорость и изменяет свой радиус (одинаково для всех x). Тогда на длине x цилиндра вытеснится объем жидкости

$$x\pi\,[(f + df)^2 - f^2] \simeq 2\pi f x\, df$$

($f(t)$ — текущий радиус внутренней поверхности), и осевую скорость для достаточно больших x можно записать в виде

$$v_x = \frac{v_0(1 - r_0^2)}{1 - f^2} + \frac{2f\dot{f}}{1 - f^2}x, \qquad v_0 = \frac{Q}{\pi(1 - r_0^2)} \tag{1}$$

Здесь v_0 — осевая скорость для $x \to \infty$ до возмущения поверхности. Точка означает дифференцирование по времени.

Поскольку течение предполагается потенциальным, тангенциальная скорость как функция радиуса и циркуляции известна (от x она не зависит)

$$v_\tau = {}^1\!/_2\Gamma / \pi r = c / r \tag{2}$$

Определим «плоский» (без учета v_τ) потенциал $\varphi(r, x, t)$ так:

$$v_x = -\partial\varphi / \partial x, \quad v_r = -\partial\varphi / \partial r \tag{3}$$

В цилиндрических координатах имеем

$$\partial^2\varphi / \partial x^2 + \partial^2\varphi / \partial r^2 r^{-1}\partial\varphi / \partial r = 0 \tag{4}$$

Из (1) имеем $\partial^2\varphi / \partial x^2 = -2f\dot{f} / (1 - f^2)$, поэтому

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2f\dot{f}}{1 - f^2} \tag{5}$$

Решив (5) с граничными условиями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}(1, x, t) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r}(f, x, t) = -\dot{f}$$

получим

$$\varphi = -\left[\frac{1}{2}\frac{f\dot{f}}{1 - f^2}(\ln r^2 - r^2) + \frac{v_0(1 - r_0^2)}{1 - f^2}x + \frac{f\dot{f}}{1 - f^2}x^2\right] \tag{6}$$

Из интеграла Бернулли следует, что максимальное давление — в точках BB'. С увеличением x давление на внутренней поверхности падает до внешнего давления $p = 0$. При малых возмущениях в бесконечности давление по-прежнему совпадает с внешним. Поэтому для больших x интеграл Бернулли запишем в виде

$$\partial\varphi / \partial t + {}^1/_2 v_\tau^2 + {}^1/_2 v_x^2 + {}^1/_2 v_r^2 = T(t) \tag{7}$$

Здесь $T(t)$ — некоторая ограниченная функция.

Используя (2), (6), равенство $v_r(f, x, t) = f^\cdot$ и учитывая лишь линейные члены, на внутренней поверхности имеем

$$(f^2 - \ln f^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{ff^\cdot}{1-f^2}\right) + \frac{v_0^2(1-r_0^2)^2}{(1-f^2)^2} + \frac{c^2}{f^2} = T(t) \tag{8}$$

Введем новую функцию η посредством соотношения

$$f = r_0 + \eta \tag{9}$$

Подставив (9) в (8) и линеаризуя по малой величине η, получим

$$\eta^{\cdot\cdot} + \omega\eta = T(t), \qquad \omega = k^2\left(\frac{2v_0^2 r_0}{1-r_0^2} - \frac{c^2}{r_0^3}\right), \qquad k^2 > 0$$

Течение оказывается устойчивым, когда $\omega > 0$, а равенство

$$\frac{2Q^2}{\pi^2(1-r_0^2)^3} = \frac{c^2}{r_0^4}$$

определяет границу устойчивости.

Неустойчивое течение при возмущении переходит в другое, устойчивое, в котором имеется точка отрыва поверхности жидкости от внутреннего цилиндра.

Этот результат подтверждается более точным, но громоздким исследованием с использованием квазиконформных отображений, проведенным одним из авторов.

Поступило 23 IV 1966

ВИДОИЗМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ НИКУРАДЗЕ ДЛЯ ГЛАДКИХ ТРУБ

М. И. ГУРЕВИЧ

(*Москва*)

Профиль скоростей по сечению гладкой трубы при турбулентном течении может быть описан при помощи известной экспериментальной формулы Никурадзе [1]

$$u / v_* = 5.75 \log \eta + 5.5 \qquad (\eta = yv_* / \nu,\ v_* = \sqrt{\tau / \rho}) \tag{1}$$

Здесь u — скорость жидкости, y — расстояние от стенки трубы, ν — коэффициент кинематической вязкости, τ — напряжение трения, ρ — плотность жидкости.

Формула (1) выведена для интервала $1 < \log\eta < 5$. При $\eta \to 0$, т. е. в пристеночном вязком слое, формула (1) теряет свою силу, так как $\log\eta \to -\infty$ при $\eta \to 0$. Формулу Никурадзе нетрудно изменить так, чтобы она была пригодна при $\eta \ll 1$ и мало отличалась от (1) на участке $1 < \log\eta < 5$.

Переходя к натуральному логарифму, можно элементарным путем преобразовать формулу (1) к виду

$$u / v_* = 1.245 \ln (81.3\,\eta^2) \tag{2}$$

При $1 < \log\eta < 5$ или $10 < \eta < 10^5$ отношение $(1 + \eta / 1.245) : (81.3\,\eta^2)$ меньше $0.11 \cdot 10^{-2}$, и поэтому на нашем участке можно с достаточной точностью заменить (1) или (2) через

$$\frac{u}{v_*} = 1.245 \ln\left[1 + \frac{\eta}{1.245} + 81.3\eta^2\right] \tag{3}$$

или

$$\frac{u}{v_*} = 2.875 \log\left[1 + \frac{\eta}{1.245} + 81.3\eta^2\right]$$