

ная здесь приближенная линейная теория устойчивости довольно хорошо соответствует действительности, то влияние  $n$  по имеющимся (см. таблицу), правда, далеко не полным, данным введением простого разрыва профиля плотности учесть теоретически не удастся. По-видимому, дальнейшие исследования необходимо вести как по пути усовершенствования линейной теории устойчивости (введение плавного профиля плотности и т. д.), так и по пути накопления экспериментальных данных по струям различной плотности.

В заключение подчеркнем, что рассмотренные выше эффекты, связанные с перестройкой «каналового» течения в струйное, хотя и имеют место при любых числах  $R$ , но протяженность участка, на котором развивается эта перестройка потока, при небольших значениях толщины пограничного слоя ( $R > 10^4 - 10^5$ ) весьма мала и составляет ничтожную долю от калибра сопла. Учитывать же ее существование на практике надо лишь в особых случаях течения струи. В то же время понимание механизма, который сопровождает эту перестройку, чрезвычайно важно, поскольку он открывает возможности теоретического анализа, по крайней мере, некоторых характеристик турбулентного струйного течения. В этом направлении в последнее время уже достигнуты определенные успехи. Так, например, нелинейная теория, развитая Шаде [10] для плоской струи, позволила определить максимальную величину амплитуды пульсаций  $\varepsilon_m = 0.17$ , что находится в удовлетворительном соответствии с имеющимися экспериментальными данными по измерениям интенсивности турбулентности в зоне смещения струи.

Авторы благодарят В. И. Фурлетова, любезно предоставившего результаты своей работы.

Поступило 30 XII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
3. Tatsumi T., Kakutani T. The stability of a two-dimensional jet. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pt. 3.
4. Schade H., Michalke A. Sur Entstehung von Wirbeln in einer Grenzschicht. Z. Flugwiss., 1962, H. 4/5.
5. Michalke A., Schade H. Sur Stabilität von freien Grenzschichten. Ingr-Arch., 1963, B. 33, H. 1.
6. Wehrman O., Wille R. Beitrag zur Phänomenologie des laminarturbulenten Übergangs im Freistrahл bei kleinen Reynoldszahlen. Grenzschichtforschung (IUTAM Symposium über Grenzschichtforschung, Freiburg, 1957). Herausgegeben von H. Görtler, Springer-Verlag, 1958.
7. Fabian H. Experimentelle Untersuchungen der Geschwindigkeitsschwankungen in der Mischungszon eines Freistrahles nahe der Düsenmundung. DVL, 1960, Bericht No. 122.
8. Sato H. Experimental investigation on the transition of laminar separated layer. J. Phys. Soc. Japan, 1956, vol. 11, No. 6.
9. Sato H. The stability and transition of a two-dimensional jet. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt. 1.
10. Schade H. Contribution to the nonlinear stability theory of inviscid shear layers. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 5.

#### РАЗВИТИЕ ТЕЧЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ

Э. Г. СИНАЙСКИЙ

(Москва)

Рассмотрим задачу о развитии ламинарного трехслойного течения несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале  $x^0 > 0$ ,  $|y^0| < h$ . Пусть параметры жидкости во внутреннем слое ( $|y^0| < y_0^0$ ) равны  $u_1^0, v_1^0, \rho_1^0, p^0, \mu_1^0$ , а во внешних пристеночных слоях  $u_2^0, v_2^0, \rho_2^0, p^0, \mu_2^0$ . Здесь  $u^0, v^0$  — компоненты скорости,  $\mu^0$  — коэффициент вязкости,  $\rho^0$  — плотность,  $p^0$  — давление. Если канал достаточно узкий, то давление в слоях одинаково. Течение будем считать симметричным относительно оси  $x^0$ .

Предположим, что поперечная составляющая скорости мала по сравнению с продольной, и что линия раздела внутреннего и внешнего слоев, определяемая уравне-

нием  $y^\circ = y_0(x^\circ)$ , мало отклоняется от прямой  $y^\circ = y_0^{\circ*}$  на длине начального участка. Поэтому в первом приближении будем считать линию раздела прямой. Допустим также, что толщина внешнего слоя мала, по сравнению с толщиной внутреннего слоя ( $h - y_0^\circ \ll y_0^\circ$ ), и что течение во внешнем слое можно описывать уравнениями гидродинамической теории смазки.

С учетом сделанных предположений получим следующие безразмерные уравнения и граничные условия [1]

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = R_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{dp_1}{dx} \right) \quad (0 < y < y_0^*) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = R_2 \frac{dp_2}{dx} \quad (y_0^* < y < 1) \quad (2)$$

$$\int_0^{y_0^*} u_1 dy = y_0^* \quad (3)$$

$$u_1 = 1 \quad \text{при } x = 0, \quad 0 < y < y_0^*; \quad \partial u_1 / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 0$$

$$u_1 = \lambda u_2, \quad \partial u_1 / \partial y = \varepsilon \lambda \partial u_2 / \partial y \quad \text{при } y = y_0^*; \quad u_2 = 0 \quad \text{при } y = 1$$

$$x = \frac{x^\circ}{h}, \quad y = \frac{y^\circ}{h}, \quad u_1 = \frac{u_1^\circ}{U_1}, \quad u_2 = \frac{u_2^\circ}{U_2} \quad \left( U_2 = \frac{Q}{h - y_0^{\circ*}} \right) \quad (4)$$

$$p_1 = \frac{p^\circ}{\rho_1^\circ U_1^2}, \quad p_2 = \frac{p^\circ}{\rho_2^\circ U_2^2} \quad \left( p_1 = \frac{\varepsilon \lambda R_2}{R_1} p_2 \right), \quad \lambda = \frac{U_2}{U_1},$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_2^\circ}{\mu_1^\circ}, \quad R_1 = \frac{U_1 \rho_1^\circ h}{\mu_1^\circ}, \quad R_2 = \frac{U_2 \rho_2^\circ h}{\mu_2^\circ}$$

Здесь  $Q$  — расход жидкости во внешнем слое. Условие сохранения расхода во внешнем слое будем использовать для нахождения формы линии раздела

$$\int_{y_0(x)}^1 u_2 dy = 1 - y_0^* \quad (5)$$

Из (2) сразу получим

$$u_2 = a_1(x) \frac{1-y}{1-y_0^*} + a_2(x) \left( \frac{1-y}{1-y_0^*} \right)^2, \quad \frac{2a_2(x)}{R_2(1-y_0^*)^2} = \frac{dp_2}{dx} \quad (6)$$

Исключая, далее, из (1) давление дифференцированием по  $y$ , получим

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} = R_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

$$\int_0^{y_0^*} u_1 dy = y_0^*, \quad u_1 = 1 \quad \text{при } x = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (8)$$

$$u_1 = \lambda u^*, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = - \frac{\varepsilon \lambda}{1-y_0^*} (u^* + a_2) \quad \text{при } y = y_0^* \quad (u^* = a_1 + a_2)$$

Применяя к (7), (8) преобразование Лапласа — Карсона, получим для изображения скорости  $u_1$  обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, решение которого с учетом граничных условий имеет вид

$$w_1 = \left[ \frac{\operatorname{ch}(zy/y_0^*)}{\operatorname{ch} z} - 1 \right] \frac{(\lambda b_2 + 1)z}{\operatorname{th} z - z - \alpha z^2 \operatorname{th} z} + \lambda w^*, \quad z = y_0^* \sqrt{R_1 s} \quad (9)$$

$$w^* = b_2 \frac{z - \operatorname{th} z}{\operatorname{th} z - z - \alpha z^2 \operatorname{th} z} - \frac{\alpha z^2 \operatorname{th} z}{\lambda(\operatorname{th} z - z - \alpha z^2 \operatorname{th} z)}, \quad \alpha = \frac{1 - y_0^*}{\varepsilon y_0^*} \quad (10)$$

$$w_1 = s \int_0^\infty u_1 e^{-sx} dx \quad w^* = s \int_0^\infty u^* e^{-sx} dx \quad b_2 = s \int_0^\infty a_2 e^{-sx} dx$$

Для перехода в (9), (10) к оригиналам нужно найти нули функции

$$\Phi(z) = \operatorname{th} z - z - \alpha z^2 \operatorname{th} z \quad (z = \xi + i\eta) \quad (11)$$

Разделяя действительные и мнимые части, приравнявая их нулю и исследуя два полученных трансцендентных уравнения относительно  $\xi$  и  $\eta$  можно показать, что для  $\alpha \ll 1$  корни (11) будут чисто мнимыми, т. е.  $s_k = -\gamma_k^2 / R_1 y_0^{*2}$ , где числа  $\gamma_k$  — вещественны и удовлетворяют уравнению

$$(\alpha\gamma^2 + 1) \operatorname{tg} \gamma = \gamma \quad (12)$$

Так как точка  $z = 0$  не является полюсом для изображений (9), (10), оригиналы легко написать, воспользовавшись теоремой о свертке

$$u_1(x, y) = F_1(x, y) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x a_2(\tau) F_1(x - \tau, y) d\tau + \lambda u^* \quad (13)$$

$$F_1(x, y) = \frac{3}{2(1+3\alpha)} \left[ 1 - \left( \frac{y}{y_0^*} \right)^2 \right] - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\gamma_k y / y_0^*) / \cos \gamma_k}{\gamma_k^2 D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right)$$

$$D_k = \frac{1}{(1 + \alpha\gamma_k^2)^2} + \frac{2\alpha}{1 + \alpha\gamma_k^2} + \frac{\alpha}{\cos^2 \gamma_k}$$

$$u^*(x) = F_1^*(x) - \frac{d}{dx} \int_0^x a_2(\tau) F_2^*(x - \tau) d\tau \quad (14)$$

$$F_1^*(x) = \frac{3\alpha}{\lambda(1+3\alpha)} + \frac{2\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right)$$

$$F_2^*(x) = \frac{1}{1+3\alpha} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k - \operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k^3 D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right)$$

Положив  $x = 0$  и воспользовавшись условием на входе в канал, найдем

$$\frac{3}{2(1+3\alpha)} \left[ 1 - \left( \frac{y}{y_0^*} \right)^2 \right] - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\gamma_k y / y_0^*) / \cos \gamma_k}{\gamma_k^2 D_k} = \frac{1}{1+3\alpha} - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k D_k} \quad (15)$$

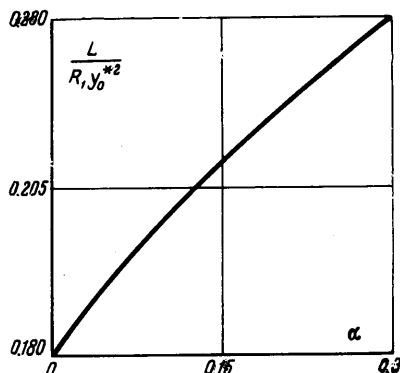
Находя из (13), (14) градиенты давления во внешнем и внутреннем слоях и пользуясь формулами (6), (15), из соотношения  $dp_1 / dx = \varepsilon \lambda (R_2 / R_1) dp_2 / dx$  получим интегральное уравнение для определения  $a_2(x)$

$$a_2(x) = -\frac{A}{B} + \frac{1}{B} \int_0^x K(x - \tau) a_2(\tau) d\tau \quad (16)$$

$$A = \frac{3}{1+3\alpha} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right)$$

$$B = \frac{2\varepsilon\lambda}{\alpha^2} \left( 1 + \frac{3\alpha^2}{2\varepsilon(1+3\alpha)} + 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k D_k} \right)$$

$$K(x) = \frac{2\lambda}{R_1 y_0^{*2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k \operatorname{tg} \gamma_k}{D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right)$$



Его решение можно найти, например, методом последовательных приближений. Ограничившись вторым приближением, получим

$$a_2(x) = -\frac{3}{B(1+3\alpha)} - \frac{2}{B} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right) - \frac{2\lambda}{B^2 R_1 y_0^{*2}} \int_0^x \left[ \frac{3}{1+3\alpha} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 \tau}{R_1 y_0^{*2}}\right) \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k \operatorname{tg} \gamma_k}{D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 (x-\tau)}{R_1 y_0^{*2}}\right) d\tau \quad (17)$$

Чтобы избежать в дальнейшем громоздких выкладок, сделаем в (17) некоторые упрощения. Для этого заметим, что если  $\varepsilon \geq 1$  и  $\lambda \sim \alpha \ll 1$ , то  $B \sim \lambda/\alpha^2$  и интегральный член в (17) имеет порядок  $\alpha^4/\lambda$ , в то время как первые два члена имеют порядок  $\alpha^2/\lambda$ . Поэтому интегральным членом в (17) можно пренебречь. Кроме того, легко показать, что  $a_2/a_1 \sim \alpha$ , т. е. с точностью до членов порядка  $\alpha^2$

$$u_2 = u^*(x) \frac{1-y}{1-y_0^*} \quad (18)$$

$$u_1 = \frac{3(1+2\alpha)}{2(1+3\alpha)} - \frac{3}{2(1+3\alpha)} \left(\frac{y}{y_0^*}\right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - \cos(\gamma_k y / y_0^*) / \cos \gamma_k - \alpha \gamma_k \operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k^2 D_k} \right\} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right) \quad (19)$$

$$u^* = \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{3}{1+3\alpha} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_k}{\gamma_k D_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right) \right) \quad (20)$$

Линия раздела, как следует из формул (5), (18) и (20), при  $x \rightarrow \infty$  асимптотически приближается к прямой  $y = y_{0\infty}$

$$\frac{1-y_0^*}{1-y_{0\infty}} = \frac{3\alpha}{2\lambda(1+3\alpha)} \quad (21)$$

Отсюда видно, что линия раздела мало отклоняется от прямой, если выполняются условия  $\lambda \sim \alpha \ll 1$ .

В заключение найдем длину начального участка, т. е. участка, на котором скорость в центре при  $y = 0$  изменяется от ее значения в начальном сечении до значения, соответствующего с точностью до 1% развитому режиму течения при  $x \rightarrow \infty$  [1].

При  $y = 0$  из (19), сохраняя только первые члены ряда, получим

$$(u_1)_{y=0} = 1.5(1-\alpha) - \frac{2}{\gamma_1 D_1} \left( \frac{\cos \gamma_1 - 1}{\gamma_1 \cos \gamma_1} - \alpha \operatorname{tg} \gamma_1 \right) \exp\left(-\frac{\gamma_1^2 x}{R_1 y_0^{*2}}\right) \quad (22)$$

Длина начального участка  $L$  определяется по формуле

$$\frac{L}{R_1 y_0^{*2}} = \frac{1}{\gamma_1^2} \ln \left[ \frac{133.34}{(1-\alpha)\gamma_1 D_1} \left( \frac{\cos \gamma_1 - 1}{\gamma_1 \cos \gamma_1} - \frac{\alpha \gamma_1}{1 + \alpha \gamma_1^2} \right) \right] \quad (23)$$

Зависимость  $L/R_1 y_0^{*2}$  от  $\alpha$  представлена на фигуре. Случай  $\alpha = 0$  соответствует однослойному течению [1]. При увеличении  $\alpha$  длина начального участка растет, а скорость на оси трубы уменьшается.

Поступила 10 I 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Т а р г С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.