

Учитывая это обстоятельство, легко заключить, что бесконечная неоднородная система алгебраических уравнений (2.19) такова, что сумма квадратов абсолютных величин коэффициентов при неизвестных c_n и d_n ограничена, а также ограничена сумма квадратов абсолютных величин свободных членов системы.

Эти свойства бесконечной системы уравнений позволяют утверждать [5], что для ее решения применим метод редукции, и при достаточно большом количестве членов усеченной системы она разрешима, причем последовательность приближенных решений сходится к точному. Быстрота сходимости зависит от исходных данных задачи.

Учитывая, что в областях G_m решения будут отличаться от полученных в области G_0 лишь множителем $\exp(jm\mu)$, можно утверждать, что определением констант c_n и d_n полностью решаем поставленную задачу.

Таким образом, определение комплексного потенциала искомого течения сводится к двум задачам: решению смешанной задачи для гармонической функции в ограниченной односвязной области G_0 с заданными граничными условиями и решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Зная потенциал скорости искомого течения $\varphi(x, y)$, при помощи уравнения Лагранжа можно вычислить нестационарные аэродинамические характеристики профилей решетки.

Следует отметить, что изложенный здесь метод может быть применен к решению более простой задачи о стационарном обтекании решетки.

Поступило 17 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлович Г. С. К расчету нестационарного потока вокруг решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
2. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. Физматгиз, 1962.
3. Мусатов В. В. К расчету нестационарного обтекания решетки профилей в нежимаемой жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд-во «Наука», 1965.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПЕРЕХОДА КАНАЛОВОГО ТЕЧЕНИЯ В СТРУЙНОЕ

А. Н. СЕКУНДОВ, О. В. ЯКОВЛЕВСКИЙ

(Москва)

Принято считать, что распространение турбулентной струи, движущейся в окружающей среде, определяется, в основном, двумя параметрами: отношениями скоростей ($m = u_2/u_1$) и плотностей ($n = \rho_2/\rho_1$) окружающей среды и струи [1]. Однако, в некоторых случаях, например при $m \approx 1$, интенсивность перемешивания, по-видимому, зависит не только от этих факторов и определяется начальными параметрами потоков (наличие и состояние пристеночных пограничных слоев в сопле, интенсивность турбулентности в ядре потока и т. д.). В этом случае, для того чтобы связать основные характеристики струи с этими начальными параметрами, необходимо знать, как происходит перестройка «каналового» течения в струйное.

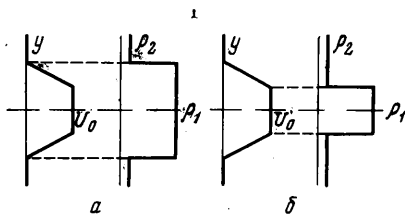
1. Общая качественная картина такого перехода [2], характеризуется чередованием различных форм течения, которые, будучи неустойчивыми, переходят одна в другую. Полного аналитического описания этого перехода пока еще не создано. Наибольших успехов достигла линейная теория устойчивости. Из ее результатов прежде всего следует отметить, что критические значения числа Рейнольдса R_* , полученные

для струйных течений вязкой жидкости [3], оказались весьма незначительными ($R_* \approx 4-5$). Отсюда следует, что в большинстве реальных течений, в которых $R \gg R_*$, процесс развития неустойчивых возмущений в струе может быть удовлетворительно описан теорией устойчивости идеальной (невязкой) жидкости.

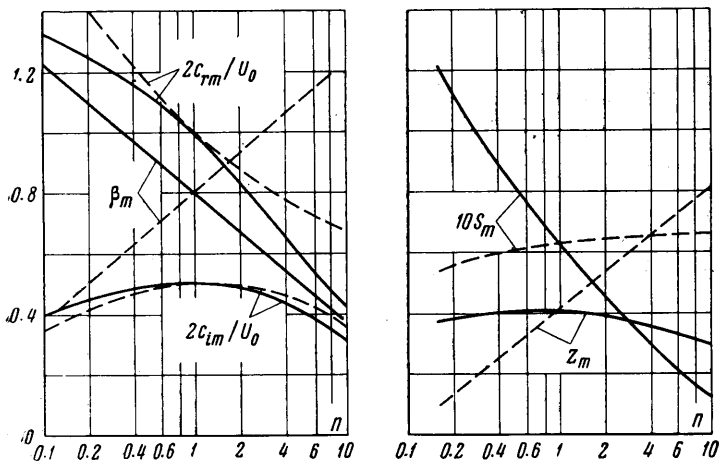
Неустойчивость пограничного слоя толщиной δ в идеальной жидкости впервые методом малых возмущений исследовал Рейлей. Возмущенное движение задавалось в виде $A(y) \exp[i\alpha(x - ct)]$, где $A(y)$ — амплитуда возмущения, $\alpha \equiv 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, $c = c_r + ic_i$, c_r — фазовая скорость, c_i — коэффициент временного усиления. Было показано, что максимальное значение коэффициента пространственного усиления возмущений ($z \equiv \alpha \delta c_i / c_r$), равное 0.4, имеет место при $\alpha \delta = 0.8$. При этом фазовая скорость оказалась равной $c_r / U_0 = 0.5$, где U_0 — разность скоростей на границах слоя.

Дальнейшее развитие линейной теории гидродинамической неустойчивости струйных течений получила в работах Шаде и Михалке [4, 5]. В этих работах задача об неустойчивости свободного пограничного слоя рассматривалась в приближенной постановке: действительное распределение скорости заменялось профилями, состоящими из прямолинейных отрезков. Это допущение приводит, как известно, к сильному упрощению соответствующих дифференциальных уравнений и позволяет получить решение в конечном виде.

Обобщение некоторых из результатов работы [5] на случай переменной плотности было сделано В. И. Фурлетовым. Им была рассмотрена плоская струя невязкой



Фиг. 1. Распределение скорости и плотности в плоской струе: а — течение 1, б — течение 2



Фиг. 2. Характеристики устойчивости течения в плоской струе ($\delta \ll L$) для течения 1 (сплошные линии) и течения 2 (пунктир) в зависимости от отношения плотностей n

жидкости, профиль скорости в которой аппроксимировался прямолинейными отрезками, а распределение плотности задавалось ступенчатой функцией, причем рассматривались два предельных случая расположения скачка плотности: на внешней (течение 1) и на внутренней (течение 2) границах пограничного слоя (см. фиг. 1).

Наибольший интерес представляют зависимости для коэффициентов пространственного и временного усиления, соответствующих максимально нарастающим возмущениям, поэтому по формулам В. И. Фурлетова были найдены корни уравнений типа $\partial z / \partial (\alpha \delta) = 0$. По этим уравнениям определялись для обоих типов течений волновые числа $\beta_m \equiv \alpha_m \delta$ для максимально нарастающих возмущений, а затем считывались соответствующие коэффициенты пространственного $z_m \equiv \alpha_m \delta c_{im} / c_{rm}$ и временного c_{im} / U_0 усиления, фазовая скорость c_{rm} / U_0 и число Струхала $S_m \equiv f \delta / U_0 \equiv \beta_m c_{rm} / 2\pi U_0$. Результаты этих расчетов в зависимости от параметра n представлены на фиг. 2. Видно, что характер влияния n на эти параметры существенно различен для двух типов течений.

Линейная теория неустойчивости принципиально не позволяет найти протяженность участка, на котором происходит нарастание возмущений до своего максимального значения. Это объясняется тем, что указанная теория не дает никаких сведений ни о начальном (A_0), ни о конечном уровнях амплитуды (A_m) возмущений, хотя и позволяет найти темп роста этой амплитуды. Однако, если представить себе, что из эксперимента или из какого-либо другого расчета нам известны значения A_0 и A_m , то сразу можно найти протяженность участка перехода

$$x^* = (\delta / z_m) \ln (A_m / A_0) \quad (1.1)$$

2. Экспериментально характер перехода в струйных течениях исследовался в работах [6-9]. Были получены интересные сведения о свойствах регулярных вихрей в зоне перехода в круглой струе [6, 7], а также найдены характеристики нарастания возмущений в плоском пограничном слое и в струе [8, 9]. Однако аналогичных исследований для осесимметричных струй неизвестно. Поэтому было проведено исследование воздушных струй, вытекающих из сопел с диаметром выходного сечения 50 и 20 мм, при помощи термоанемометра с постоянной температурой нити.

Течение вблизи сопла определяется большим числом параметров и существенно зависит от состояния пограничного слоя на срезе сопла. Исходя из теории размерностей, можно показать, что протяженность участка перехода x^* — функция безразмерных параметров

$$x^* / \delta^{**} = \varphi(ud / \nu, n, \delta^{**} / d, \epsilon_{m0}) \quad (2.1)$$

где толщина пограничного слоя, в свою очередь, определяется как

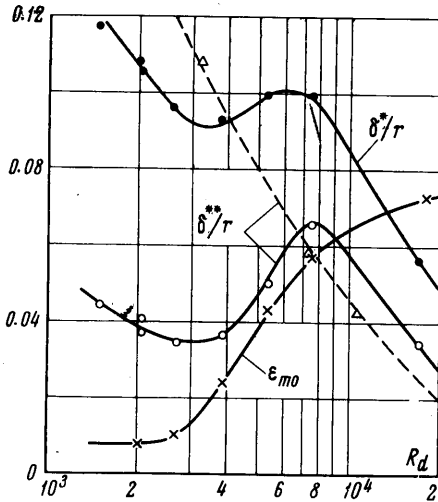
$$\delta^{**} / d = \psi(ud / \nu, l / d, k) \quad (2.2)$$

Таким образом, окончательно с учетом соотношений (2.1) и (2.2) получим

$$x^* / \delta^{**} = f(ud / \nu, n, l / d, k, \epsilon_{m0}) \quad (2.3)$$

В этих формулах введены следующие обозначения: δ^{**} — толщина потери импульса в пограничном слое; l — длина образующей сопла, на которой нарастает пограничный слой; $d \equiv 2r$ — диаметр выходного сечения сопла; k — степень поджатия сопла; ϵ_{m0} — начальный максимальный уровень интенсивности турбулентности в пограничном слое на срезе сопла. Таким образом, величина x^* / δ^{**} определяется числом Рейнольдса R , величиной $n \equiv \rho_2 / \rho_1$ и параметрами, характеризующими состояние пограничного слоя на выходе из сопла $l / d, k, \epsilon_{m0}$. В наших опытах варьировалось лишь число R и геометрия сопла ($l / d, k$) а $n = 1$.

По измерениям полей скорости и интенсивности турбулентности на срезе сопла были определены значения толщины пограничных слоев в соплах с диаметром 20 и 50 мм при $R = \text{var}$, а так же максимальное значение интенсивности турбулентности ϵ_{m0} в пограничном слое. Эти данные представлены на фиг. 3 в зависимости от числа R , отнесенного к диаметру сопла. Диапазон чисел R был выбран таким образом, чтобы в сопле 50 мм происходил переход от ламинарного пограничного слоя к турбулентному. Немонотонный характер зависимостей δ^* и δ^{**} от числа R и возрастание величины ϵ_{m0} от 1 до 7% (фиг. 3) подтверждает, что в исследованном диапазоне чисел R действительно происходило изменение режима течения. В этом же диапазоне чисел R пограничный слой в сопле с диаметром 20 мм остается ламинарным, а уровень ϵ_{m0} не превышает 1%. Поскольку максимальное значение ϵ_m в зоне смещения полностью развитой турбулентной струи составляет примерно 15%, причем эта величина слабо зависит от числа R , то по формуле (1.1) можно определить значение x^* , если принять, что $A_m = \epsilon_m, A_0 = \epsilon_{m0}$, а $\delta \approx 10\delta^{**}$. Оказывается, что эта величина удовлетворительно соответствует значениям x^* , найденным экспериментально.



Фиг. 3. Зависимости параметров пограничного слоя на срезе сопел с диаметром 50 мм (сплошная линия) и 20 мм (пунктир) от числа R

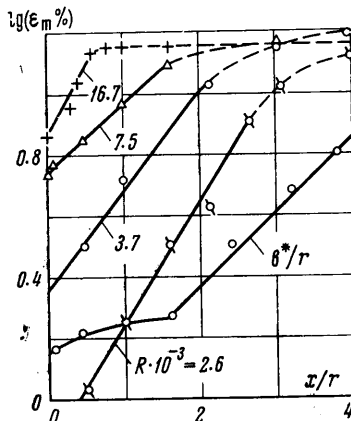
Для нахождения протяженности области перестройки «каналового» течения в струйное измерялись поля скорости и интенсивности турбулентности в поперечных сечениях струи вдоль по потоку. По этим данным находились значение ϵ_m и некоторая характерная толщина зоны смешения b^* . Кроме того, производилось фотографирование шпирен-изображений картины течения воздушной струи с незначительной добавкой углекислого газа, необходимой для визуализации потока.

Оказалось (фиг. 4), что на участке перехода наблюдается экспоненциальный рост амплитуды возмущений $\epsilon_m(x)$. При $x > x^*$ происходит резкое изменение характера нарастания толщины зоны смешения b^* (фиг. 4) и появление отчетливой вихревой структуры (фиг. 5).

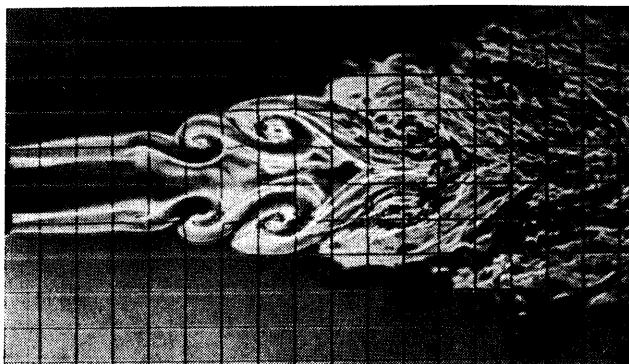
Величина x^* , отнесенная к толщине потери импульса в пограничном слое δ^{**} , представлена для сопел с диаметром 20 и 50 мм (фиг. 6). Видно, что, в соответствии с представлениями теории устойчивости и анализом размерностей, величина x^*/δ^{**} при $n = \text{const}$ зависит только от характера движения — ламинарного или турбулентного — в пограничном слое и сохраняет примерно постоянное значение, равное 50—70 — для ламинарного и 20 — для турбулентного пограничного слоя. Тот факт, что x^*/δ^{**} не зависит при этом от числа R , указывает на допустимость пренебрежения вязкостью жидкости ($R \gg R_*$) при расчете неустойчивости струйных течений. Кроме того, хорошее совпадение значений x^*/δ^{**} , вычисленных по формуле (1.1), с экспериментальными данными свидетельствует о применимости линейной теории к возмущениям скорости потока достаточно большой амплитуды (до 15% от средней скорости).

По осциллограммам почти периодических пульсаций скорости вблизи кромки сопла были найдены значения частоты колебаний и определено число $S \approx 0.08$. Этот результат также удовлетворительно согласуется с теорией.

3. Для того чтобы получить некоторые сведения о влиянии параметров n и m на характеристики перехода, была проведена серия фото- и киносъемок струй углекислого газа ($n = 0.66$), гелия ($n = 7.25$) и фреона-12 ($n = 0.25$), распространяющихся как в неподвижном ($m = 0$), так и в движущемся воздухе. В качестве источника света при



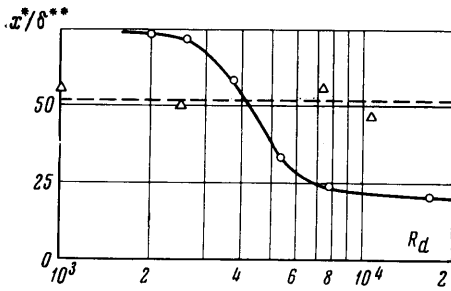
Фиг. 4. Изменение максимальной интенсивности турбулентности ϵ_m (сплошные линии) соответствуют экспоненте $\epsilon_m \approx e^{kx}$ и характерной толщины зоны смешения b^* вдоль струи с диаметром 50 мм



Фиг. 5. Теплеровское изображение струи углекислого газа, вытекающей из плоского сопла шириной 10 мм ($U_0 = 3.5$ м/сек, $R = 5 \cdot 10^3$)

фотографировании использовался искровой источник, дающий время экспозиции 10^{-4} сек и позволяющий получить четкую, мгновенную картину течения. Киносъемка производилась при помощи скоростной кинокамеры СКС-1М16, объединенной с оптической системой прибора Теллера. Скорость киносъемки составляла около 3000 кадр/сек. По кинограммам были определены значения фазовой скорости c_r/U_0 для гелия (~ 0.25) и углекислого газа (~ 0.5); эти данные также соответствуют теоретическим.

В результате обработки фотографий были найдены значения x^* в зависимости от числа R для разных газов при $m = 0$ (фиг. 7). На фиг. 7 для сравнения приведены значения x^* , определенные по термоанемометрическим измерениям в воздушной струе, вытекающей из сопла диаметром 20 мм. Видно, что наибольшая протяженность переходного участка имеет место при $n = 1$ и уменьшается по мере отклонения n от 1. Наименьшее значение x^* было зафиксировано в случае струи гелия ($n = 7.25$). При $R > 10^4$ протяженность переходного участка делается много меньшей диаметра сопла.

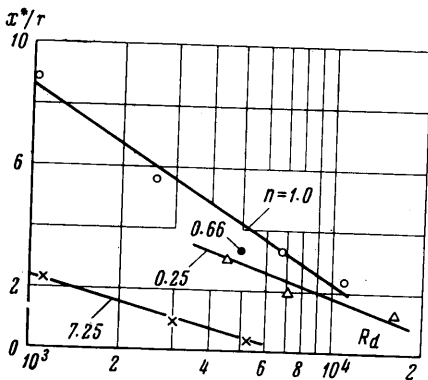


Фиг. 6. Зависимость приведенной длины переходного участка x^*/δ^{**} от R для сопла с диаметром 50 мм (сплошная линия) и 20 мм (пунктир)

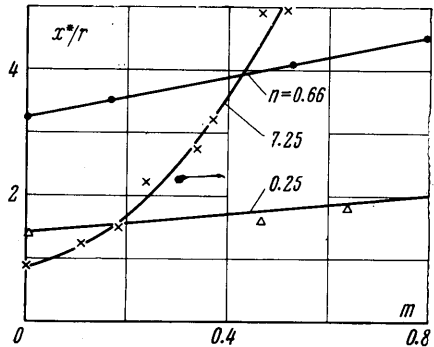
Аналогичные измерения были проведены для струй, распространяющихся в спутном потоке ($m = \text{var}$). На фиг. 8 представлены зависимости x^* от m для разных газов. Видно, что если величина x^* в струях углекислого газа и фреона-12 слабо зависит от m , то увеличение m в случае струи гелия приводит к сильному возрастанию x^* .

Надо отметить, что точность измерений x^* в струях переменной плотности невысока, поскольку при определении по фотографиям длины переходного участка могли иметь место как случайные, так и систематические ошибки. Поэтому данные, представленные на фиг. 7 и 8, следует рассматривать лишь как некоторые предварительные сведения о влиянии параметров n и m на процесс перехода в струе.

ли иметь место как случайные, так и систематические ошибки. Поэтому данные, представленные на фиг. 7 и 8, следует рассматривать лишь как некоторые предварительные сведения о влиянии параметров n и m на процесс перехода в струе.



Фиг. 7. Зависимость длины переходного участка x^*/r от числа R для струй различных газов (20 мм)



Фиг. 8. Влияние относительной скорости спутного потока m на длину переходного участка для струй различных газов (20 мм) при $R = \text{const}$

Ниже для четырех значений n приводится сопоставление теоретических (первая строка) и экспериментальных (вторая строка) результатов

n	= 0.25	0.66	1	7.25
Z_m	= { 0.39 (0.16)	0.40 (0.33)	0.4	0.32 (0.75)
	{ 0.51	0.45	0.35	2
S_m	= { 0.105 (0.058)	0.075 (0.062)	0.063	0.015 (0.066)
	{ —	—	0.08	0.14
$C_{\tau m}/U_0$	= { 0.62 (0.68)	0.54 (0.56)	0.5	0.22 (0.35)
	{ —	0.5	—	0.25

Первая цифра в строке теоретических результатов соответствует схеме течения 1, а вторая в скобках — схеме 2.

Приведенные значения Z_m для случаев $n \neq 1$ вычислялись по формуле (1.1) с использованием данных фиг. 7, причем предполагалось, что $\epsilon_m/\epsilon_{m0} = \text{idem}$ при $n = \text{var}$. Хотя из линейной теории устойчивости (фиг. 2) следует сильная зависимость длины волны от n , экспериментально было замечено, что размер оптических неоднородностей на фотографиях струй различных газов был практически одинаков при $R = \text{idem}$. Отсюда можно сделать вывод, что если для случая $n = 1$ рассмотрен-

ная здесь приближенная линейная теория устойчивости довольно хорошо соответствует действительности, то влияние n по имеющимся (см. таблицу), правда, далеко не полным, данным введением простого разрыва профиля плотности учесть теоретически не удастся. По-видимому, дальнейшие исследования необходимо вести как по пути усовершенствования линейной теории устойчивости (введение плавного профиля плотности и т. д.), так и по пути накопления экспериментальных данных по струям различной плотности.

В заключение подчеркнем, что рассмотренные выше эффекты, связанные с перестройкой «каналового» течения в струйное, хотя и имеют место при любых числах R , но протяженность участка, на котором развивается эта перестройка потока, при небольших значениях толщины пограничного слоя ($R > 10^4 - 10^5$) весьма мала и составляет ничтожную долю от калибра сопла. Учитывать же ее существование на практике надо лишь в особых случаях течения струи. В то же время понимание механизма, который сопровождает эту перестройку, чрезвычайно важно, поскольку он открывает возможности теоретического анализа, по крайней мере, некоторых характеристик турбулентного струйного течения. В этом направлении в последнее время уже достигнуты определенные успехи. Так, например, нелинейная теория, развитая Шаде [10] для плоской струи, позволила определить максимальную величину амплитуды пульсаций $\varepsilon_m = 0.17$, что находится в удовлетворительном соответствии с имеющимися экспериментальными данными по измерениям интенсивности турбулентности в зоне смещения струи.

Авторы благодарят В. И. Фурлетова, любезно предоставившего результаты своей работы.

Поступило 30 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
3. Tatsumi T., Kakutani T. The stability of a two-dimensional jet. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pt. 3.
4. Schade H., Michalke A. Sur Entstehung von Wirbeln in einer Grenzschicht. Z. Flugwiss., 1962, H. 4/5.
5. Michalke A., Schade H. Sur Stabilität von freien Grenzschichten. Ingr-Arch., 1963, B. 33, H. 1.
6. Wehrman O., Wille R. Beitrag zur Phänomenologie des laminarturbulenten Übergangs im Freistrahл bei kleinen Reynoldszahlen. Grenzschichtforschung (IUTAM Symposium über Grenzschichtforschung, Freiburg, 1957). Herausgegeben von H. Görtler, Springer-Verlag, 1958.
7. Fabian H. Experimentelle Untersuchungen der Geschwindigkeitsschwankungen in der Mischungszon eines Freistrahles nahe der Düsenmundung. DVL, 1960, Bericht No. 122.
8. Sato H. Experimental investigation on the transition of laminar separated layer. J. Phys. Soc. Japan, 1956, vol. 11, No. 6.
9. Sato H. The stability and transition of a two-dimensional jet. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt. 1.
10. Schade H. Contribution to the nonlinear stability theory of inviscid shear layers. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 5.

РАЗВИТИЕ ТЕЧЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ

Э. Г. СИНАЙСКИЙ

(Москва)

Рассмотрим задачу о развитии ламинарного трехслойного течения несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале $x^0 > 0$, $|y^0| < h$. Пусть параметры жидкости во внутреннем слое ($|y^0| < y_0^0$) равны $u_1^0, v_1^0, \rho_1^0, p^0, \mu_1^0$, а во внешних пристеночных слоях $u_2^0, v_2^0, \rho_2^0, p^0, \mu_2^0$. Здесь u^0, v^0 — компоненты скорости, μ^0 — коэффициент вязкости, ρ^0 — плотность, p^0 — давление. Если канал достаточно узкий, то давление в слоях одинаково. Течение будем считать симметричным относительно оси x^0 .

Предположим, что поперечная составляющая скорости мала по сравнению с продольной, и что линия раздела внутреннего и внешнего слоев, определяемая уравне-