О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, ОБТЕКАЕМОЙ ДО- ИЛИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Г. С. САМОЙЛОВИЧ (*Москва*)

Рассматривается резонанс, вызванный распространением волн вдоль оси решетки. Решетка малоизогнутых профилей может быть составлена из решетки диполей.

Возмущения давления, вызываемые в дозвуковом потоке сосредоточенной силой $Y = Y_0 \exp i\nu\tau$, паралллельной оси ординат и гармонически зависящей от времени, можно выразить формулой (в линейной постановке)

$$p = \frac{i\nu Y_0 y}{4\beta a} \frac{\exp i(\nu\tau + \mu x)}{\sqrt{x^2 + \beta^2 y^2}} H_1^{(2)}(\varkappa \sqrt{x^2 + \beta^2 y^2}) \qquad \left(\varkappa = \frac{\nu M}{u\beta^2},\ \mu = \frac{\nu M^2}{u\beta^2}\right)$$

Здесь a — скорость звука в невозмущенном потоке, u — скорость основного потока, направленная вдоль оси x, H — функция Ганкеля; $\beta^2 = 1 - M^2$.

Тогда возмущение давления от решетки сил будет

$$p = Ae^{i(\nu\tau+\mu x)} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(-\mu t \sin\gamma - \alpha)n} H_0^{(2)} [\varkappa \sqrt{(x - nt\sin\gamma)^2 + \beta^2 (y - nt\cos\gamma)^2}]$$

Здесь γ — вынос решетки, t — шаг, α — сдвиг фаз воздействия соседних сил, A — несущественный постоянный множитель.

Применим метод суммирования Пуассона и представим возмущение рядом изображений Фурье для суммируемой функции

$$p = Ae^{i(\nu\tau+\mu x)} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m)$$

Преобразования сводятся к вычислению интеграла Фурье от функции $H_0^{(2)}$

$$F(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{i(\mu t \sin\gamma - 2\pi m - \alpha)\xi}{2\pi} \times$$

$$\times H_0^{(2)} \{\varkappa \sqrt{[x - (\xi t/2\pi)\sin\gamma]^2 + \beta^2 [y - (\xi t/2\pi)\cos\gamma]^2}\} \, d\xi$$

Обозначив

$$b^2 = \beta^2 \frac{(x\cos\gamma - y\sin\gamma)^2}{\sin^2\gamma + \beta^2\cos^2\gamma}, \qquad c_m = \frac{\mu t \sin\gamma + 2\pi m + \alpha}{t\sqrt{\sin^2\gamma + \beta^2\cos^2\gamma}}$$

$$d_m = \frac{\exp ic_m (x\sin\gamma + y\beta^2\cos\gamma)}{t\sqrt{\sin^2\gamma + \beta^2\cos^2\gamma)}}$$

приводим интеграл к виду

$$F(m) = d_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{ic_m z} H_0^{(2)}(\varkappa \sqrt{z^2 + b^2})\, dz$$

При интегрировании возможны два случая

$$F(m) = \frac{2id_m}{\sqrt{c_m^2 - \varkappa^2}} \exp[-b\sqrt{c_m^2 - \varkappa^2}] \qquad \text{при } 0 < \varkappa < |c_m|, \quad b > 0$$

$$F(m) = \frac{2d_m}{\sqrt{\varkappa^2 - c_m^2}} \exp[-ib\sqrt{\varkappa^2 - c_m^2}] \qquad \text{при } 0 < |c_m| < \varkappa, \quad b > 0$$

При $\varkappa^2 \to c_m^2$ наблюдается резонанс. Значит, при резонансе

$$\varkappa = -\frac{\mu t \sin\gamma + 2\pi m + \alpha}{t\sqrt{\sin^2\gamma + \beta^2\cos^2\gamma}}, \qquad \varkappa > 0$$

резонансная частота равна

$$\nu = a(\pm M\sin\gamma + \sqrt{1 - M^2\cos^2\gamma})\,(\alpha + 2\pi m)\,/\,t$$

Формула имеет очевидное физическое толкование, так как произведение первых двух сомножителей представляет скорость распространения возмущения вдоль оси решетки, наклоненной под углом γ к оси ординат. Знаки $\pm$ соответствуют распространению сигнала в одну и другую стороны (аналогичная формула, полученная из других соображений в работе [1], при $\gamma \neq 0$, очевидно, неверна).

Действительно, сигнал, посланный из начала координат, покрывает окружность

$$(x - u\tau)^2 + y^2 = a^2\tau^2$$

Отсюда скорость сигнала в направлении γ равна

$$a_\gamma = a(M \sin\gamma + \sqrt{1 - M^2\cos^2\gamma})$$

Частные случаи формул очевидны и совпадают с известными [2].

При дорезонансном режиме колебаний $\varkappa < |c_m|$ возмущения вдали от решетки затухают. При сверхкритической частоте $\varkappa > |c_m|$ возмущения ограничены, но не затухают. Аналогичная задача для сверхзвукового потока имеет особенности. Возмущение давления от одной силы равно

$$p = Ae^{i(\nu\tau+\mu x)} \frac{\partial}{\partial y} J_0(\varkappa\sqrt{x^2 - \beta^2 y^2}), \qquad \beta^2 = M^2 - 1$$

Здесь J — функция Бесселя. Возмущения лежат внутри клина Маха. Например, для силы с индексом m на оси решетки возмущения возникают внутри клина

$$x - mt\sin\gamma = \pm\beta(y - mt\cos\gamma) \qquad \text{при} \quad x \geqslant mt\sin\gamma$$

Возможны два характерных режима обтекания:

а) при $\beta > \operatorname{tg}\gamma$, ось решетки лежит в невозмущенном потоке. Резонанс не может существовать.

б) при $\beta < \operatorname{tg}\gamma$, волны Маха выходят в пространство перед решеткой.

В последнем случае ввиду периодичности можно изучать возмущения только внутри полос, ограниченных смежными линиями Маха, например,

$$x = \beta y, \quad x - t\sin\gamma = \beta(y - t\cos\gamma), \quad x = -\beta y \quad x = -\beta(y - t\cos\gamma)$$

Внутри полосы возмущения создают только силы с индексом от $m = 0$ до $m = -\infty$.

Для сокращения выкладок рассмотрим возмущения только в начале координат (естественно, исключая силу с индексом $m = 0$)

$$p = Ae^{i(\nu\tau+\mu x)} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{m=1}^{\infty} e^{i(\mu mt\sin\gamma - m\alpha)} J_0(\varkappa mt\sqrt{\sin^2\gamma - \beta^2\cos^2\gamma})$$

Опустив преобразования, аналогичные приведенным выше, можно показать, что этот ряд можно выразить другим рядом, общий член которого имеет вид

$$\{\varkappa^2 t^2(\sin^2\gamma - \beta^2\cos^2\gamma) - [2\pi m \pm (\mu t\sin\gamma - \alpha)]^2\}^{-1/2}$$

При стремлении выражения в скобке к нулю ряд расходится, что соответствует возникновению резонанса. После преобразований получаем резонансную частоту

$$\nu = a(M\sin\gamma \pm \sqrt{1 - M^2\cos^2\gamma}\,(\alpha + 2\pi m) / t$$

Поскольку $M > 1$, то выдвигается условие $1 - M^2\cos^2\gamma \geqslant 0$, значит, резонанс возможен только при условии $\beta \leqslant \operatorname{tg}\gamma$. Двойной знак указывает на возможность двух резонансных частот, но в сверхзвуковой решетке обе волны бегут только в одну сторону вдоль оси решетки.

Можно показать, что в сверхзвуковом случае (в противоположность дозвуковому) колебания с дорезонансной частотой распространяются на весь поток, а колебания с частотой выше резонансной гаснут вдали от решетки.

Отметим возможные технические приложения:

а) при резонансных колебаниях демпфирование в решетке будет отсутствовать,

б) при вращении рабочего колеса турбомашины со скоростью V, противоположной бегущей волне, волна станет стоячей и может возбуждаться кромочными следами неподвижных решеток. Газ в межвенцевом зазоре будет колебаться. Это явление аналогично образованию стоячей резонансной волны в твердом диске.

Поступило 9 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д. Н., Доминас Л. В. Решетка пластин в дозвуковом нестационарном потоке газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
2. Wollston D. S., Runyan H. L. Some considerations on the air forces on a wing oscillating between two walls for subsonic compressible flow. JAS, 1955, No. 1.