

5. Русанов В. В. Характеристики общих уравнений газовой динамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
6. Подладчиков Ю. Н. Метод характеристик для расчета пространственных сверхзвуковых течений газа. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4.
7. Запryanов З. Д., Миносцев В. Б. Метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
8. Миносцев В. Б. Метод расчета сверхзвукового трехмерного обтекания гладких тел. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1967, № 2.
9. Магомедов К. М. Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 2.
10. Магомедов К. М. Расчет пространственного обтекания притупленных конусов методом характеристик с учетом равновесных физико-химических превращений. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1967, № 3.
11. Moretti G. Three-dimensional supersonic flow computations. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 9.
12. Кацкова О. Н., Чушкин П. И. Трехмерное сверхзвуковое равновесное течение газа около тел под углом атаки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБТЕКАНИЯ ПРИТУПЛЕННЫХ КОНУСОВ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК С УЧЕТОМ РАВНОВЕСНЫХ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

К. М. МАГОМЕДОВ (Москва)

Рассматривается задача гиперзвукового обтекания притупленных конусов под углом атаки.

Для численного решения использован метод [1] с незначительными изменениями. Выбираются новые зависимые переменные, более удобные для расчета обтекания тел вращения под углом атаки. В качестве неизвестных рассматриваются давление и энтальпия, что упрощает аппроксимацию уравнения состояния с учетом равновесных физико-химических превращений. В связи с этим, в § 1 приводятся подробные расчетные формулы. В § 2 изложена схема расчета притупленных по сфере конусов под углом атаки.

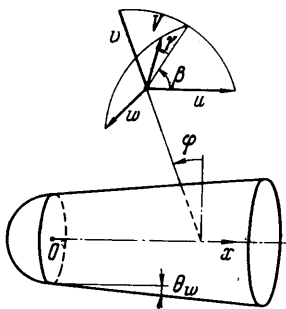
В § 3 приводятся некоторые результаты расчетов гиперзвукового обтекания притупленных по сфере конуса с углом полураствора $\theta_w = 0^\circ, 9^\circ 30'$ под углом атаки $\alpha = 0, 5^\circ, 10^\circ$ совершенным ($M_\infty = \infty$) и равновесно диссоциирующим воздухом. В частности, показаны результаты, иллюстрирующие момент возникновения скачка уплотнения на подветренной стороне обтекаемого под углом атаки затупленного цилиндра.

В § 4 показано, что удастся подобрать специальные переменные подобия, аналогичные соответствующим переменным в случае осесимметричного обтекания, в которых распределение давления вдоль образующих конуса с углом полураствора $\theta_w \geq \alpha$ как по меридиональным углам φ , так и по условиям гиперзвукового обтекания отличаются всего лишь на 10%. Полученная универсальная кривая может быть использована и для приближенного вычисления давления на конусе под углом атаки.

§ 1. Отнесем компоненты вектора скорости V к скорости V_∞ и плотности ρ_∞ набегающего потока, давление p и энтальпию i — соответственно к величинам $\rho_\infty V_\infty^2$ и V_∞^2 . Будем искать вектор скорости в цилиндрической системе координат x, r, φ (фиг. 1) в виде

$$V = \{u, v, w\} = V \{\cos \beta \cos \gamma, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma\}, \quad \beta = \arctg (v/u)$$

где γ — угол вектора скорости с меридиональной плоскостью $\varphi = \text{const}$, β — обычно вводимый угол на этой плоскости; линейные размеры отнесены к радиусу сферы, x отсчитываются от плоскости сопряжения сферы и конуса. В дальнейшем используются обозначения $\eta = \text{tg } \beta$, $\zeta = \text{tg } \gamma$.



Фиг. 1

Уравнение установившегося течения идеального газа в этих переменных можно записать в виде

$$\begin{aligned} \cos \gamma \mathbf{k}_2 \nabla \beta + \mathbf{k}_3 \nabla \gamma + Q(M^2 - 1) \mathbf{k}_1 \nabla P &= - \frac{\cos \gamma \sin \beta}{r} \left(\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{V}}{V} \right) \\ \cos \gamma \mathbf{k}_1 \nabla \beta + Q \mathbf{k}_2 \nabla P &= \frac{\sin^2 \gamma \cos \beta}{r} \left(\mathbf{k}_2 = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \mathbf{k}_1}{\partial \beta} \right) \\ \mathbf{k}_1 \nabla \gamma + Q \mathbf{k}_3 \nabla P &= \frac{\sin \beta \sin \gamma}{r} \left(\mathbf{k}_3 = \frac{\partial \mathbf{k}_1}{\partial \gamma} \right) \\ \mathbf{k}_1 \nabla j - \Lambda^{-1} \mathbf{k}_1 \nabla P &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Термодинамические величины, входящие в уравнения (1.1), имеют значения:

$$P = \ln p, \quad j = \ln i, \quad Q = p / (\rho V^2), \quad M = V / a \quad (1.2)$$

Здесь a — скорость звука, M — число Маха. Рассмотрим величины

$$\rho_i / p = \Lambda(p, j) \quad i / a^2 = \Phi(p, j) \quad (1.3)$$

Тогда с учетом уравнения Бернулли $V^2 + 2i = V_{\max}^2 = \text{const}$ величины Q и M выражаются через (1.3), т. е. для решения (1.1) с учетом равновесных физико-химических реакций, достаточно аппроксимировать функции $\Lambda(p, j)$ и $\Phi(p, j)$ в зависимости от давления и энтальпии.

Известно, что расчет физико-химических реакций параллельно с численным решением трехмерных задач или запоминание огромных таблиц термодинамических функций газа требует неоправданно большого времени и памяти ЭЦВМ. Проще определенным образом аппроксимировать уравнение состояния с достаточной для практики точностью.

В этом отношении наиболее интересна идея, лежащая в основе аппроксимаций, предложенных в работе [2] — при расчете обтекания тел методом сеток и в работе [3] — при расчете пограничного слоя, а именно: идея подбора некоторых комбинаций термодинамических величин, зависящих от логарифма давления почти линейно или слабо. В настоящей работе использована простая аппроксимация функций (1.3) (значения Λ и Φ вычисляются по таблицам [4]), подобная [3] и предложенная С. Г. Синченко.

Преобразуем уравнения (4.1) к характеристической форме. Для этого просуммируем эти уравнения с соответствующими множителями ω_j ($j = 1, 2, 3, 4$), как в работе [1]. Если вдоль линии тока выбрать $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = 0$, $\omega_3 = 1$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, $\omega_4 = 1$, а вдоль волновых бихарактеристик выбрать $\omega_1 = (-1)^i \sin \mu$, $\omega_2 = \cos \mu$, $\omega_3 = \omega_4 = 0$ ($\sin \mu = 1/M$), то получим условия совместности

вдоль линии тока $\tau_0 = \mathbf{k}_1$

$$\frac{d\gamma}{ds_0} + Q \mathbf{k}_3 \nabla P = - \frac{\sin \beta \sin \gamma}{r}, \quad \frac{dj}{ds_0} - \Lambda^{-1} \frac{dP}{ds_0} = 0 \quad (1.4)$$

вдоль волновых бихарактеристик $\tau_i = \omega_1 \mathbf{k}_2 + \omega_2 \mathbf{k}_1$

$$\begin{aligned} \cos \gamma \frac{d\beta}{ds_i} + (-1)^i \frac{Q}{\theta} \frac{dP}{ds_i} &= \\ = \cos \mu \cos \beta \cos \gamma [\xi \sin \gamma - (-1)^i \eta \theta] - (-1)^i \sin \mu \mathbf{k}_3 \nabla \gamma \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{df}{ds_i} = \tau_i \nabla f, \quad \theta = \tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right),$$

Здесь производные берутся вдоль бихарактеристик. Для исключения производных в нехарактеристическом направлении $\mathbf{k}_3$ введем в рассмотрение еще две бихарактеристики $\tau_i = \cos \mu \mathbf{k}_1 + (-1)^i \sin \mu \mathbf{k}_3$ ($i = 3, 4$). С учетом равенства $\tau_4 - \tau_3 = 2 \sin \mu \mathbf{k}_3$ легко получить

$$\mathbf{k}_3 \nabla f = \frac{1}{2 \sin \mu} \left(\frac{df}{ds_4} - \frac{df}{ds_3} \right) \quad (1.6)$$

Таким образом, уравнения (1.4), (1.5) с учетом (1.6) содержат в данной точке производные только вдоль бихарактеристик. Эти характеристические уравнения в сверхзвуковом случае ($M > 1$) эквивалентны исходным уравнениям (1.1) и могут служить основой численного метода характеристик.

Рассмотрим точку A с известными координатами, расположенную на расстоянии h от плоскости X при $x = \text{const}$, где решение уже найдено. Линия тока и бихарактеристика

ристики, проведенные из этой точки вверх по потоку, пересекаются с плоскостью X в точках с координатами

$$\Delta r_0 = -h\eta, \quad \Delta\varphi = -\frac{h\zeta\sqrt{1+\eta^2}}{r}$$

$$\Delta r_i = -h\frac{\eta + (-1)^i\theta\sqrt{1+\zeta^2}}{1 - (-1)^i\eta\theta\sqrt{1+\zeta^2}}, \quad \Delta\varphi_i = -\frac{h}{r}\frac{\zeta\sqrt{1+\eta^2}}{1 - (-1)^i\eta\theta\sqrt{1+\zeta^2}} \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

$$\Delta r_i = -h\eta, \quad \Delta\varphi_i = -\frac{h\sqrt{1+\eta^2}[\zeta + (-1)^i\theta]}{r[1 - (-1)^i\theta\zeta]} \quad (i = 3, 4)$$

$$r_i = r_A + \Delta r_i, \quad \varphi_i = \varphi_A + \Delta\varphi_i \quad (i = 0, 1, \dots, 4)$$

Уравнения вдоль линии тока (1.4) в разностной форме примут вид

$$\zeta_A = \zeta_0 - (1 + \zeta^2) \left[\frac{h\eta\zeta}{r} - \frac{QL(p)}{2\theta} \right], \quad j = j + \frac{P_A - P_0}{\Lambda} \quad (1.8)$$

$$(L(f) = f_4 - f_3 - \zeta\theta(f_4 + f_3 - 2f_A)).$$

Уравнения (1.5) вдоль бихарактеристик A_i ($i = 1, 2$) можно записать так:

$$\eta_A + a_i P_A = \Sigma_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.9)$$

$$a_i = (-1)^i \frac{Q}{\theta} \sqrt{1 + \zeta^2} (1 + \eta^2), \quad b_i = (-1)^i \frac{h}{r} \frac{\eta\theta\sqrt{1 + \zeta^2} - \zeta^2}{1 - (-1)^i\eta\theta\sqrt{1 + \zeta^2}} (1 + \eta^2)$$

$$c_i = -\frac{(-1)^i L(\zeta)}{2\sqrt{1 + \zeta^2}} \frac{1 + \eta^2}{1 - (-1)^i\eta\theta\sqrt{1 + \zeta^2}}, \quad \Sigma_i = \eta_i + a_i P_i - (b_i + c_i)$$

Здесь $\eta_i, \zeta_i, P_i, j_i$ ($i = 0, 1, 3, 4$) — параметры в точках i на плоскости X , которые можно найти интерполяцией.

Итак, уравнения (1.8), (1.9) выражают газодинамические функции в точке A через их значения в точках встречи бихарактеристик (1.7) с плоскостью X . Остановимся на некоторых вопросах, связанных с выбором конкретной схемы счета.

1. Выбор переменных, очевидно, играет большую роль в любом численном методе. Первоначальное введение углов β и γ в работе [1] оказалось неудобным из-за возникновения особенности при $\beta \rightarrow 0$. Замена непосредственных компонентов вектора скорости, давления, плотности и энтропии через тангенсы двух углов вектора скорости, давление и энтальпию упрощает арифметические выражения и является естественным обобщением двумерных переменных.

2. На первый взгляд, кажется заманчивым вычислять производные в нехарактеристическом направлении k_3 (см. формулы (1.4), (1.5)) непосредственно по данным на плоскости X , а не по формуле (1.6). Тем более, что порядок аппроксимации такой схемы можно повысить до второго, вычисляя эти производные при $x + h$ в точке A , а затем усредняя. Но теоретический анализ и практические расчеты показали, что использование интерполяционных полиномов на предыдущей плоскости для вычисления $k_3 \nabla f$ «портит» решение при больших x . Наиболее надежной и простой оказалась характеристическая схема с сохранением производных лишь вдоль бихарактеристических направлений.

3. При использовании обратной схемы, т. е. когда расчетная точка известна, существенным является вопрос интерполяции. Фиксированный выбор узлов упрощает программу, но шаг по x приходится выбирать так, чтобы бихарактеристики попадали внутрь области узлов. Автоматический выбор узлов хотя и усложняет программу, но уменьшает суммарное время счета задачи, особенно для удлиненных тел.

§ 2. Рассмотрим задачу сверхзвукового обтекания тела, уравнение которого задано в виде $r = r_w(x, \varphi)$. Пусть на некоторой плоскости $x = 0$ в области между телом и ударной волной газодинамические функции η, ζ, P, j заданы в зависимости от r и φ , причем всюду число Маха $M(P, j) > 1$.

Для притупленных тел начальные данные можно в принципе получить из численного решения смешанной задачи с отошедшей ударной волной. Однако для тел, притупленных по сфере, легко получить их пересчетом (поворотом системы координат) из данных по обтеканию сферы. Это возможно до определенных углов атаки и углов сопряжения. В настоящей работе начальные данные на сферическом затуплении получены из [5]. Для заостренных тел можно воспользоваться таблицами конических потоков [6], так как в окрестности острия решение уравнений газовой динамики можно аппроксимировать коническим потоком.

Итак, ставится задача численного решения уравнений газовой динамики в области, ограниченной неизвестной заранее ударной волной и телом, по начальным данным в плоскости $x = 0$.

Будем искать поверхность ударной волны в виде $r = R(x, \varphi)$.

Введем отсчет φ таким образом, чтобы вектор скорости набегающего потока V_∞ лежал в плоскости $\varphi = 0$, т. е.

$$V_\infty = \{\cos \alpha, -\sin \alpha \cos \varphi, \sin \alpha \sin \varphi\} \quad (\alpha - \text{угол атаки}) \quad (2.1)$$

Будем вести счет по плоскостям $x = \text{const}$ шаг за шагом по обратной схеме, т. е. считая рассчитываемую точку известной. В целях упрощения интерполяции и выбора новых точек область между телом и ударной волной при каждом x будем приводить к прямоугольному виду $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, например введением переменной $\lambda = (r - r_w) / (R - r_w)$. Пусть в узлах сетки $\lambda_i = 0, h_\lambda, \dots, 1$, $\varphi_j = 0, h_\varphi, \dots, \pi$ при некоторой x известны η, ζ, P, j . Найдем эти параметры в тех же узлах следующей плоскости $x + h$.

Счет точек меридиональной плоскости $\varphi = \varphi_j$ должен начинаться с нахождения и расчета точек ударной волны, так как для определения радиальной координаты новых точек $r_i = r_w + \lambda_i(R - r_w)$ необходимо знание искомой функции $R(x + h, \varphi_j)$.

Рассмотрим схему расчета точки A ударной волны.

Введем орт нормали к ударной волне [1],

$$n = (1 + q^2 + \omega^2)^{-1/2} \{q, -1, \omega\} \quad (q = R_x, \omega = R_\varphi / R)$$

Тогда будем иметь

$$R_A = R_0 + q_0 h + O(h^2), \quad \omega_A = \omega_0 + (\partial \omega / \partial x)_0 h + O(h^2) \quad (2.2)$$

Здесь $\partial \omega / \partial x = \partial(q(R)) / \partial \varphi$ вычисляется на предыдущей плоскости X через разностное отношение. Параметры непосредственно за ударной волной в точке A выражаются через q и ω следующим образом:

$$\eta = \frac{-\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi + (1 - k) Q_1}{1 - (1 - k) q Q_1}, \quad \zeta = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi - (1 - k) \omega Q_1}{\sqrt{1 + \eta^2 [1 - (1 - k) q Q_1]}} \quad (2.3)$$

$$Q_1 = [q + \operatorname{tg} \alpha (\cos \varphi + \omega \sin \varphi)] / (1 + q^2 + \omega^2)$$

При известной величине нормальной составляющей скорости набегающего потока

$$V_{n\infty}^2 = Q_1^2 (1 + q^2 + \omega^2) / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

для нахождения термодинамических величин p и i можно использовать известный итерационный процесс по k [5]

$$p = p_\infty + (1 - k) V_{n\infty}^2, \quad i = i_\infty + 1/2 (1 - k^2) V_{n\infty}^2, \quad k = \rho^{-1} = i / p \Lambda \quad (2.4)$$

Как видно из формул (2.2) — (2.4), все газодинамические и геометрические параметры искомой точки A ударной волны выражаются, как и в осесимметричном случае, через одно неизвестное q_A . Для его определения используется уравнение совместности (1.9) вдоль бихарактеристики $A2$

$$f(q_A) = 0 \quad (f(q_A) \equiv \eta_A + a_2 P_A - \Sigma_2)$$

Необходимость и достаточность использования именно одного подобного уравнения доказаны в работе [7].

Рассмотрим схему расчета внутренней точки течения. Из данной точки A проводим вверх по потоку бихарактеристики (1.7) (в первом приближении по параметрам η, ζ, P, j соответствующей точки предыдущей плоскости). По r_i, φ_i находим λ_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). По λ_i, φ_i интерполяцией находим параметры в точках i на плоскости X . Вычисляем коэффициенты в уравнениях совместности a_i, b_i, c_i, Σ_i и т. п.

Решая уравнения (1.8), (1.9) относительно газодинамических функций в точке A , находим $\eta_A, \zeta_A, P_A, j_A$. Далее можно повторить процесс вычисления коэффициентов в соотношениях (1.7) — (1.9) по усредненным значениям в точках A и i , хотя первый порядок аппроксимации метода этого и не требует [1].

Рассмотрим схему расчета точки тела. Условие непротекания на теле можно привести к виду

$$\eta_A = r_{wx}' + \omega \sqrt{1 + \eta_A^2} r_w^{-1} r_{w\varphi}'$$

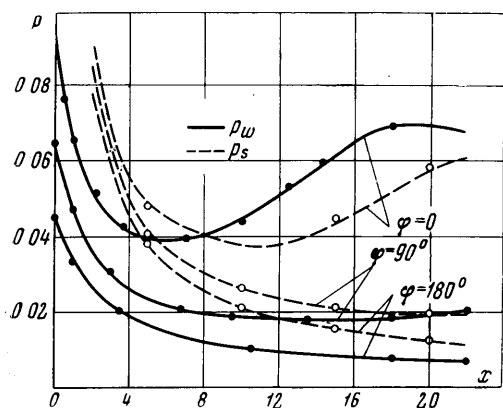
Для тел вращения $\eta_A = r_{wx}'$. Схема расчета аналогична предыдущему случаю, но вместо уравнения (1.9) при $i = 2$ надо использовать условие непротекания.

§ 3. В таблице и на фиг. 2—5 приводятся некоторые результаты расчетов обтекания воздухом гладко сопряженных со сферой конусов с углом полураствора θ_w под углом атаки α . Расчеты проведены в основном при 11×11 (в радиальном и угловом

Таблица

φ°	$\alpha = 5^\circ$					$\alpha = 10^\circ$				
	x	$10p_w$	i_w	10ψ	ζ_w	x	$10p_w$	i_w	10ψ	ζ_w
0	0	0.892	0.253	0.913	0.089	0	1.216	0.276	0.913	0.178
90		0.635	0.230	0.916		0	0.632	0.229	0.914	
180		0.447	0.208	0.913		0	0.304	0.186	0.913	
0	10	0.442	0.207	0.912	0.168	10	1.188	0.274	0.912	0.393
90		0.184	0.161	0.915		10	0.207	0.167	0.915	
180		0.108	0.138	0.911		10	0.0876	0.130	0.914	
0	16	0.646	0.231	0.912	0.235	20	1.098	0.268	0.912	0.581
90		0.181	0.160	0.914		20	0.225	0.171	0.913	
180		0.0823	0.128	0.911		20	0.0602	0.117	0.913	
0	22	0.676	0.234	0.913	0.311	28	0.627	0.229	0.912	0.538
90		0.200	0.165	0.916		28	0.247	0.175	0.913	
180		0.0713	0.123	0.912		28	0.0625	0.118	0.913	

направлениях) точках на каждой плоскости $x = \text{const}$. Сравнение с данными других авторов, а также другие виды контроля показывают, что указанное количество точек обеспечивает точность порядка 1—3%.



Фиг. 2

ности вычисления на теле энthalпии, плотности, величины скорости (ошибка в ψ меньше 0.5%, причем она имеется уже в начальных данных). Следовательно, последние параметры считаются с той же степенью точности, что и давление (порядка 1—2%). Из разностной формулы (1.8) видно, что ζ при $\lambda = 0$ зависит только от параметров на поверхности тела (бихарактеристики с индексами 0, 3, 4 лежат на линии $r = r_w$), значит, и погрешность в ζ_w определяется погрешностью в p_w и i_w .

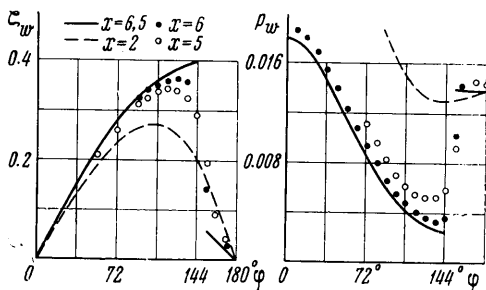
Таким образом, в методе характеристик погрешность вычисления газодинамических функций на теле определяется в основном ошибкой в давлении, причем вклад в эту погрешность неточности (существенной при больших x) вычислений в высокоэнтропийном слое незначителен — в отличие от обычного метода сеток [6].

Остановимся на одном интересном явлении при обтекании тел вращения под углом атаки, а именно: на возникновении скачков уплотнения в подветренной стороне на некотором расстоянии от носка при определенных углах атаки.

На фиг. 2 дано сравнение давления на теле p_w и ударной волне p_s при обтекании конуса $\theta_w = 9^\circ 30'$ ($M_\infty = \infty$, $\gamma = 1.4$, $\alpha = 5^\circ$) с результатами метода сеток [2, 6].

В таблице приведены давление p_w , энthalпия i_w , параметр окружной составляющей скорости ζ_w вдоль образующих конуса $\varphi = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi$ ($\theta_w = 9^\circ 30'$, $M_\infty = \infty$, $\gamma = 1.4$, $\alpha = 5^\circ$ и 10°).

Поскольку в предлагаемой разностной схеме условия постоянства энтропии вдоль тела непосредственно не используются (см. формулы (1.4) и (1.8)), а также и интерполяция может вызвать погрешности, то по отклонениям проводимой в таблице энтропийной функции $\psi = i_w^{1/(\gamma-1)} / p_w$ можно судить о точности вычисления.



Фиг. 3

На фиг. 3 показана полученная при численном расчете картина течения на приглушенном цилиндре $\theta_w = 0$ при $M_\infty = \infty$ для угла атаки $\alpha = 10^\circ$.

Можно проследить тенденцию к возникновению скачка уплотнения. Отметим, что окружная скорость в районе возникновения скачков больше скорости звука, и законы сохранения при переходе через скачок (предполагая, конечно, что он появляется) выполняются с точностью до 2—4%. Тем не менее, строго говоря, на основе решения, полученного численным методом, разработанным для непрерывных течений, трудно утверждать, что при больших углах атаки (в смысле образования сверхзвуковых поперечных течений) в районе $\varphi = 140-180^\circ$ получаем точное решение, но момент возникновения скачков, по-видимому, улавливается. Надо еще заметить, что полученная картина течения на подветренной стороне может быть нарушена влиянием эффектов вязкости. Но характер течения, вероятно, будет подобен поведению газа в теневой части окружности (плоская задача), летящей со скоростью $V_\infty \sin \alpha$.

На фиг. 4, 5 приведены некоторые результаты обтекания конуса $\theta_w = 9^\circ 30'$ потоком воздуха со скоростью $V_\infty = 7500$ м/сек и плотностью $\rho_\infty = 3.32 \cdot 10^{-7}$ г/см³ ($M_\infty = 23.6$) с учетом равновесных физико-химических превращений.

§ 4. Для практического использования результатов отдельных расчетов, очевидно, важен поиск определенных закономерностей в поведении полученного решения. В частности, представляет большой интерес распространение законов подобия, полученных для гиперзвукового обтекания притупленных конусов под нулевым углом атаки, на пространственное обтекание. Рассмотрим, с этой точки зрения, некоторые результаты проведенных расчетов.

Согласно гиперзвуковому закону подобия Г. Г. Черного [8], распределение давления на затупленном конусе при его осесимметричном обтекании совершенным газом имеет вид

$$\frac{p - p_\infty}{\text{tg}^2 \theta_w} = P_c(v, K, \gamma)$$

$$\left(v = \sqrt{\frac{2}{c_x} \frac{x}{d} \text{tg}^2 \theta_w} \right) \quad (4.1)$$

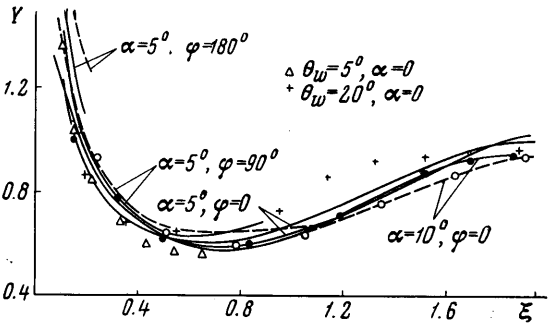
Здесь $K = M_\infty \theta_w$ — параметр гиперзвукового подобия, γ — отношение удельных теплоемкостей, c_x — коэффициент сопротивления носка, d — диаметр его миделя.

Введенный В. В. Луневым в работе [9] эффективный коэффициент сопротивления носка $c_x^* = c_x C^*(V_\infty, p)$ обобщает формулу (4.1) на случай наличия в высокоэнтальпийном слое физико-химических превращений.

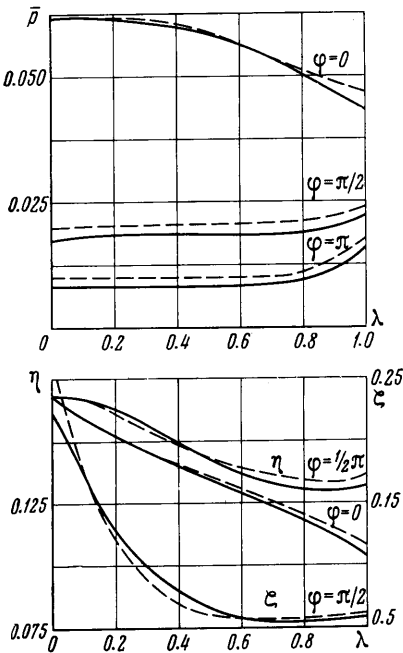
Рассмотрим случай обтекания притупленных конусов под углом атаки. Как известно, давление на теле при гиперзвуковом обтекании пропорционально квадрату местного угла атаки (если угол положительный); например, по формуле Ньютона для острых конусов под углом атаки имеем

$$p - p_\infty \approx V_{n\infty}^2 \approx (\theta_w + \alpha \cos \varphi)^2$$

Предположим, что влияние затупления, как и в осесимметричном случае [3], можно учесть через коэффициент сопротивления носка. Выражение для давления



Фиг. 4



Фиг. 5

на притупленном конусе под углом атаки будет иметь вид

$$\frac{p - p_\infty}{\tau^2} = Y = P_\alpha \left(\sqrt{\frac{2}{c_x}} M_\infty^{-2} \frac{x}{d}, K, K_\alpha, \gamma, \varphi \right) \quad (K_\alpha = M_\infty \alpha) \quad (4.2)$$

Здесь параметр $\tau = \text{tg}(\theta + \alpha \cos \varphi)$ будет переменным на различных образующих $\varphi = \text{const}$. Учитывая, что

$$M_\infty^{-2} = \tau^2 / (M_\infty^2 \tau^2) = \tau^2 / (K + K_\alpha \cos \varphi)^2$$

а также формулу (4.1) с эффективным коэффициентом сопротивления Лунева, введем первый аргумент в (4.2) по формуле

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{c_x^*}} \frac{\tau^2}{r_0} (x + 1 - \sin \theta_w), \quad \left(\begin{array}{l} c_x^* = c_x C^0(V_\infty, 0.8 \tau^2) \\ r_0 = r_w(0) \end{array} \right) \quad (4.3)$$

Здесь x отсчитывается от точки сопряжения конуса и сферы. Предположение $C^0(V_\infty, P) \approx C^0(V_\infty, 0.8 \tau^2)$ можно объяснить, во-первых, слабой зависимостью C^0 от P и, во-вторых, тем, что давление на остром конусе $p \approx \tau^2$, а минимум давления на затупленном конусе $p_{\min} \approx 0.6 \tau^2$. Величину $C^0(V_\infty, 0.8 \tau^2)$ можно найти по графику из работы [9]. Коэффициент сопротивления носка c_x берется для осесимметричного случая, так как $c_x(\alpha) = c_x(0) + O(\alpha^2)$.

На фиг. 4 показана зависимость Y от ξ при пространственном обтекании притупленного конуса с $\theta_w = 9^\circ 30'$ совершенным газом (сплошные линии) при $M_\infty = \infty$, $\gamma = 1.4$ и равновесно-диссоциирующим воздухом (пунктирные линии) при $V_\infty = 7.5 \text{ км/сек}$, $\rho_\infty = 3.32 \cdot 10^{-7} \text{ г/см}^3$. Для угла атаки $\alpha = 5^\circ$ приведены данные вдоль образующих $\varphi = 0, 90^\circ, 180^\circ$, для $\alpha = 10^\circ$ — при $\varphi = 0$. Там же даны давления при осесимметричном обтекании (треугольниками для $\theta_w = 5^\circ$, $M_\infty = \infty$ и крестиками для $\theta_w = 20^\circ$, $M_\infty = 23$). Сравнение приводимых на графике результатов показывает, что разные кривые близки между собой. При выполнении условий $K > 1$ и $K \geq K_\alpha$ (при невыполнении последнего условия нарушается оценка порядка давления при $\varphi \approx 180^\circ$) функция (4.2) аппроксимируется некоторой средней кривой $Y = F(\xi)$ с точностью порядка 5–7%. Это позволяет использовать функцию $F(\xi)$ для вычисления приближенного давления на затупленном конусе под углом атаки без проведения громоздких численных расчетов.

Более точные результаты можно получить, по-видимому, используя функцию $F(\xi)$, полученную для осесимметричного обтекания данного конуса, для вычисления давления при угле атаки $\alpha \leq \theta_w$, и, наконец, универсальная функция $F(\xi)$ позволяет пересчитать данные конкретного расчета на другие условия обтекания.

Близки также профили $\bar{p} = p - p_\infty$ и η в подобных сечениях $\xi = \text{const}$ между телом и ударной волной (фиг. 5). Здесь сплошными линиями показаны параметры для $M_\infty = \infty$ при $x \approx 18$, а пунктирными — с учетом диссоциации при $x \approx 10$.

Выполнение законов подобия, строго говоря, обоснованных пока для осесимметричного обтекания, и при наличии угла атаки, по-видимому, можно связать с правилом местных конусов. Оно заключается в том, что распределение давления по образующей обтекаемого под углом атаки притупленного конуса, а также распределение других параметров между телом и ударной волной в меридиональной плоскости совпадает (кроме окружной составляющей скорости и за исключением малых $\theta_w - \alpha$) с теми же величинами для конуса, обтекаемого без угла атаки, но с углом полураствора, равным местному углу атаки рассматриваемой образующей.

Автор благодарит В. В. Лунева за ценные советы и обсуждение работы.

Поступило 30 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Магомедов К. М. Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 2.
2. Дьяконов Ю. Н. Пространственное обтекание затупленных тел с учетом равновесных физико-химических реакций. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 4.
3. Мурзинов И. Н. Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равновесно диссоциирующего воздуха. Изв. АН СССР. Механика, 1966, № 2.
4. Предводителев А. С. Таблицы термодинамических функций воздуха. Изд-во АН СССР, 1957—1962.
5. Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равновесно диссоциирующим воздухом. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.
6. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. Изд-во «Наука», 1964.

7. Магомедов К. М. О расчете искомых поверхностей в пространственных методах характеристик. Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 6.
8. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
9. Лунев В. В. Гиперзвуковое обтекание тонких притупленных тел с физико-химическими превращениями газа в высокоэнтропийном слое. ПМТФ, 1964, № 5.

О ПЕРЕХОДЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГОРЮЧЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ К РЕЖИМУ ЧЕПМЕНА — ЖУГЕ

С. М. ГИШИНСКИЙ, З. Д. ЗАПРАНОВ

(Москва, София)

В связи с проблемой эффективного сжигания топлива в прямоточных двигателях представляет интерес изучение сверхзвукового обтекания тел горючей смесью газов. Согласно гипотезе Чепмена — Жуге, устойчивая самопроизвольная детонация происходит с минимальной скоростью, при этом скорость продуктов сгорания за волной достигает местной скорости звука. Одним из способов стабилизации детонационных волн является внесение в сверхзвуковой поток источника возмущения. Однако при произвольном возмущении режим Чепмена — Жуге может не установиться. Так, при определенных условиях в эксперименте обнаруживается, что детонационная волна расщепляется на адиабатическую ударную волну и фронт медленного горения. Подробная библиография по исследуемому вопросу содержится в работах [1, 2].

В работе [1] приведены примеры расчета обтекания сферы и цилиндрического торца со сферической головной частью потоком горючей смеси с детонационной волной в случае, когда волна не расщепляется. Для случая, когда расщепление происходит в сверхзвуковой зоне течения вне области влияния, показывается каким образом может быть применена используемая методика расчета.

В настоящей работе в той же постановке, что и в [1], получено численное решение задачи о сверхзвуковом обтекании профиля — кругового цилиндра и пластины с цилиндрическим притуплением. Исследуется возможность перехода течения к режиму Чепмена — Жуге, указывается на качественное отличие плоского течения от осесимметричного. Выводы настоящей работы согласуются с результатами [3], где изучается асимптотика на бесконечности нестационарных течений с детонационными волнами.

Рассматривается сверхзвуковое обтекание симметричного профиля равномерным потоком горючей смеси газов с параметрами M_1 , p_1 , T_1 . Как и в работе [1] принимается классическая модель детонационной волны, рассматриваемой в виде бесконечно тонкой зоны, на которой терпят разрыв все параметры потока смеси, в том числе и химический состав. Для упрощения расчетов исходная смесь и продукты сгорания считаются совершенным газом; приближенный учет реальности газовой смеси — изменение состава и молекулярного веса, производится путем изменения показателя адиабаты γ за волной детонации $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Тепловой эффект реакции при детонации полагается не зависящим от скорости детонации, т. е. тепловыделение при сгорании смеси одинаково во всех точках волны. Последнее ограничение не существенно, поскольку учет зависимости тепловыделения от наклона волны детонации приводит к незначительному усложнению расчетной схемы.

В указанной постановке задача решалась численно при помощи методики, изложенной в работе [1]. Проводились расчеты обтекания кругового цилиндра и профиля, представляющего комбинацию кругового цилиндра и сопряженной с ним полубесконечной пластины потоком с $M_1 = 5.5$, $\gamma_1 = 1.4$ и $\gamma_2 = 1.2$. Варьирование безразмерного параметра q , характеризующего тепловыделение, производилось в диапазоне 0—1.2. Параметр q равен отношению подведенного к единице массы газа тепла к полному теплосодержанию того же количества несгоревшей смеси.

На фиг. 1 для отдельных вариантов показана геометрическая картина течения — положение детонационных волн, звуковых линий и разрывных характеристик, идущих из линии сопряжения цилиндра с пластиной (пунктирные линии). Заметим, что построенная на фиг. 1 картина течения и распределения газодинамических функций левее разрывной характеристики соответствует также обтеканию гладкого кругового цилиндра. Распределение давления по поверхности профиля, отнесенного к давлению торможения за прямым скачком, в зависимости от длины контура s представлено на фиг. 2; отсчет s ведется от критической точки.

При сравнении результатов расчета обтекания профиля и затупленного тела (геометрия течения около сферы-цилиндра в меридиональной плоскости показана на фиг. 3) обнаруживается типичная для адиабатических потоков картина, профиль помещенный в сверхзвуковой поток горючей смеси, вносит более сильное возмущение,