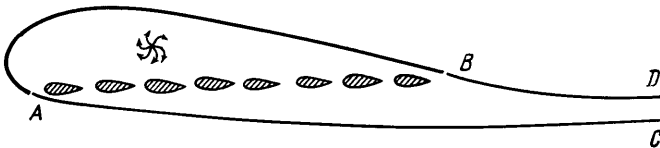


РАСЧЕТ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОФИЛЯ КРЫЛА С ВЫДУВОМ РЕГУЛИРУЕМОЙ СТРУИ ВО ВНЕШНИЙ ПОТОК

Н. Ф. ВОРОБЬЕВ, В. Г. ДУЛОВ

(Новосибирск)

Профиль крыла бесконечного размаха, нижняя поверхность которого заменена системой направляющих лопаток, обтекается потоком идеальной несжимаемой жидкости. Из внутренней полости крыла жидкость вытекает через систему направляющих лопаток во внешний поток, образуя струю в спутном потоке (фиг. 1). Полное давление в полости крыла и струе отличается от полного давления во внешнем набегающем потоке. Границы струи представляют собой уходящие в бесконечность линии тока, вдоль которых имеет место разрыв величины скорости. Течение жидко-



Фиг. 1

сти во внутренней полости крыла имитируется течением, вызванным системой надлежащим образом расположенных источников, система направляющих лопаток заменяется дискретными вихрями.

Форма дуги профиля выбирается так, что поток жидкости от источников в направлении, почти противоположном направлению скорости набегающего потока, сдерживается участком контура с большой кривизной в окрестности передней кромки. Рассматривается такой режим обтекания профиля с выходящей струей, когда оба конца дуги — точки схода потока и линия разрыва скоростей (дуга профиля, граница струи) — гладкая кривая, что накладывает дополнительное условие на величины циркуляций. В качестве модельного объекта для изучения обтекания профиля с выдувом струи взята дуга логарифмической спирали.

Получены формулы для определения суммарных характеристик силового воздействия потока на профиль при наличии струи и разрыва полного давления. На основании расчетов, проведенных для тонкого крыла, дан качественный анализ силового воздействия потока на профиль.

1. Комплексную скорость течения от системы особенностей, распределенных непрерывно вдоль дуги AB обтекаемого контура, вдоль граничных линий тока струи Λ и дискретно в точках z_m , лежащих по внутренней полости крыла и на нижней поверхности профиля, будем искать в виде (величина скорости на бесконечности в набегающем потоке принята равной единице)

$$\frac{dw}{dz} = e^{i\alpha} + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{BA} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\Lambda} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{m=1}^{n+k} \frac{-\Gamma_m + iQ_m}{z - z_m} \right] \quad (1.1)$$

Здесь w — комплексный потенциал течения в комплексной плоскости z ; α — угол наклона вектора скорости набегающего потока на бесконечности к оси абсцисс; подлежащая определению функция $f_1(\zeta)$ представляет собой комплексную величину, равную скачку комплексной скорости в

точках дуги AB с комплексными координатами ζ ; аналогичная функция для контура Λ обозначена через $f_2(\zeta)$. Величины Γ_m ($m = 1, \dots, n; 1, \dots, k$) — интенсивности вихрей и вихреисточников; величины Q_m ($m = 1, \dots, k$) — обильности вихреисточников. Линии AB и Λ — линии тока, на которых скорости терпят разрыв. Пусть t — значение комплексной координаты на линиях тока AB и Λ . Используя формулы для предельных значений интеграла типа Коши, на линиях тока AB и Λ из равенства (1.1) получаем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_i + \left(\frac{dw}{dz}\right)_e = 2 \left\{ e^{-i\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{BA} \frac{f_1(\zeta)}{1-\zeta} d\zeta + \int_{\Lambda} \frac{f_2(\zeta)}{t-\zeta} d\zeta - \sum_{m=1}^{n+k} \frac{-\Gamma_m + iQ_m}{t-z_m} \right] \right\} \quad (1.2)$$

где индексами i и e обозначаются предельные значения величины со стороны внутренней и внешней нормалей дуги соответственно. На линиях тока направление скорости совпадает с направлением касательной к линии тока, и величину комплексной скорости можно представить в виде

$$dw/dz = ve^{-i\theta}$$

где θ — угол между касательной к линии тока и осью абсцисс; $v = \pm|v|$, причем плюс — в случае совпадения направления скорости с направлением отсчета дуги, минус — в случае, когда направление скорости в данной точке противоположно направлению отсчета длины дуги. За направление отсчета при интегрировании вдоль контура выбирается направление $DBAC$, состоящее из следующих участков контура: $DB(\Lambda_2)$ — верхняя граница струи, BA — дуга профиля, $AC(\Lambda_1)$ — нижняя граница струи. Если ds — элемент длины дуги, то $d\zeta = e^{i\theta} ds$, и на линиях тока имеют место равенства

$$\begin{aligned} f_1(\zeta) d\zeta &= \gamma ds, & v_i - v_e &= \gamma & \text{на дуге } AB \\ f_2(\zeta) d\zeta &= \lambda ds, & v_i - v_e &= \lambda & \text{на контуре } \Lambda \end{aligned} \quad (1.3)$$

Равенство (1.2) теперь можно переписать так:

$$v_i + v_e = 2e^{i\theta} \left\{ e^{-i\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{BA} \frac{\gamma ds}{t-\zeta} + \int_{\Lambda} \frac{\lambda ds}{t-\zeta} - \sum_{m=1}^{n+k} \frac{-\Gamma_m + iQ_m}{t-z_m} \right] \right\} \quad (1.4)$$

Здесь $v_i + v_e$ — действительная величина, которая может быть записана в виде

$$v_i + v_e = 2 \left\{ \cos(\theta - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{BA} \gamma L_{\theta} ds + \int_{\Lambda} \lambda L_{\theta} ds + \sum_{m=1}^{n+k} H_m K_m \right] \right\} \quad (1.5)$$

Мнимая часть выражения, стоящая в правой части равенства (1.4), равна нулю

$$\sin(\theta - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{BA} \gamma K_{\theta} ds + \int_{\Lambda} \lambda K_{\theta} ds + \sum_{m=1}^{n+k} H_m L_m \right] = 0 \quad (1.6)$$

В последних формулах введены полярные координаты

$$t = re^{i\varphi}, \quad \zeta = \rho e^{i\psi}, \quad z^m = r_m e^{i\varphi_m}$$

и следующие обозначения:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\theta}}{2\pi i} \int_{BA} \frac{\gamma ds}{\zeta - t} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{BA} \gamma L_\theta ds, \quad \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\theta}}{2\pi i} \int_{BA} \frac{\gamma ds}{\zeta - t} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{BA} \gamma K_\theta ds$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\theta}}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\lambda ds}{\zeta - t} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda} \lambda L_\theta ds, \quad \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\theta}}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\lambda ds}{\zeta - t} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda} \lambda K_\theta ds$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\theta}}{2\pi i} \sum_{m=1}^{n+k} \frac{-\Gamma_m + iQ_m}{t - z_m} \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{n+k} H_m K_m$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\theta}}{2\pi i} \sum_{m=1}^{n+k} \frac{-\Gamma_m + iQ_m}{t - z_m} \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{n+k} H_m L_m$$

$$K_\theta = K(r, \varphi, \rho, \omega, \theta) = \frac{\cos \theta (r \cos \varphi - \rho \cos \omega) + \sin \theta (r \sin \varphi - \rho \sin \omega)}{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \omega) + \rho^2}$$

$$L_\theta = L(r, \varphi, \rho, \omega, \theta) = \frac{\cos \theta (r \sin \varphi - \rho \sin \omega) - \sin \theta (r \cos \varphi - \rho \cos \omega)}{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \omega) + \rho^2}$$

$$H_m L_m =$$

$$= \frac{Q_m [r \sin(\theta - \varphi) - r_m \sin(\theta - \varphi_m)] + \Gamma_m [r \cos(\theta - \varphi) - r_m \cos(\theta - \varphi_m)]}{r^2 - 2rr_m \cos(\varphi - \varphi_m) + r_m^2}$$

$$H_m K_m =$$

$$= \frac{Q_m [r \cos(\theta - \varphi) - r_m \cos(\theta - \varphi_m)] - \Gamma_m [r \sin(\theta - \varphi) - r_m \sin(\theta - \varphi_m)]}{r^2 - 2rr_m \cos(\varphi - \varphi_m) + r_m^2}$$

Пусть p_0 и p_0' — различные по величине полные давления в набегающем потоке и жидкости, истекающей из внутренней полости крыла. На свободных границах струи разрыв величины скорости подчинен следующему условию, которое следует из факта непрерывности статического давления и соотношений Бернулли для внешнего и внутреннего потоков:

$$(v_i - v_e)(v_i + v_e) = 2(p_0' - p_0) / \rho v_{e\infty}^2 = \varepsilon \quad (1.7)$$

Здесь и ниже везде v_i, v_e — безразмерные величины скоростей, отнесенные к величине скорости набегающего потока на бесконечности $v_{e\infty}^0$, а индексом 0 сверху будут обозначаться размерные величины скоростей.

Из равенств (1.3), (1.5) и (1.7) получаем

$$\varepsilon = 2\lambda \left\{ \cos(\theta - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{BA} \gamma L_\theta ds + \int_{\Lambda} \lambda L_\theta ds + \sum_{m=1}^{n+k} H_m K_m \right] \right\} \quad (1.8)$$

Это уравнение справедливо вдоль контура Λ .

Интегрируя равенство (1.1) и отделяя мнимую часть, получим для функции тока

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi) = & r \sin(\varphi - \alpha) + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{BA} \gamma \ln [r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \omega) + \rho^2] ds + \right. \\ & + \int_{\Lambda} \lambda \ln [r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \omega) + \rho^2] ds + 2 \sum_{m=1}^k Q_m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r \sin \varphi - r_m \sin \varphi_m}{r \cos \varphi - r_m \cos \varphi_m} + \\ & \left. + \sum_{m=1}^{n+k} \Gamma_m \ln [r^2 - 2rr_m \cos(\varphi - \varphi_m) + r_m^2] \right\} = C' \quad (1.9) \end{aligned}$$

Уравнения (1.6) на AB , (1.8) на Λ и (1.9) образуют полную систему уравнения для определения двух неизвестных функций γ , λ и контура Λ .

Исходными параметрами задачи будут скорость набегающего потока, разность полных давлений внутреннего и внешнего потоков, положение дискретных особенностей и обильности Q_m вихреисточников.

Значения величин циркуляции Γ_m вихрей и вихреисточников при заданных исходных параметрах должны в общем определяться при решении всей задачи из условий обтекания лопаток и дуги профиля (условий схода). Для упрощения задачи в данной работе значения Γ_m выбираются из дополнительных условий. Например, можно определить закон распределения суммарного расхода по нижней стороне профиля в виде задания расхода, приходящегося на щель между двумя лопатками, а каждую лопатку заменить одним вихрем, лежащим в точке, не совпадающей с границей щели. Расход через щель записывается как разность функций тока в граничных точках щели, причем в выражения для функции тока входят величины Γ_m . При n вихрях (лопатках) количество щелей будет равно $n + 1$; расход можно задавать только для n щелей, что накладывает n условий на $n + k$ величин Γ_m .

Условия схода струй с дуги профиля накладывают дополнительную зависимость на величины Γ_m . В работе рассматривается обтекание дуги профиля с выдувом струи в случае, когда точками схода являются передняя и задняя точки дуги. В этом случае контур интегрирования Λ_2 , BA , Λ_1 будет гладким контуром, для точек которого имеет место равенство

$$\int_{DBAC} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = i\pi \quad (1.10)$$

В точках A и B контура $DBAC$, являющихся точками схода, величина разрыва скорости при переходе с дуги AB на границу струи Λ меняется непрерывно, и имеют место равенства

$$\gamma(\omega_A) = \lambda(\omega_A), \quad \gamma(\omega_B) = \lambda(\omega_B) \quad (1.11)$$

При решении уравнений (1.6), (1.8) гладкий контур интегрирования $DBAC$ приходится разбивать на части $\Lambda_2(DB)$, BA , $\Lambda_1(AC)$. Для устранения логарифмических особенностей, получающихся при интегрировании по участкам контура, необходимо к уравнениям (1.6) и (1.8) добавить некоторые, равные тождественно нулю выражения, не изменяющие уравнений и обращающие на концах интервалов Λ_2 , BA , Λ_1 числители подынтегральных выражений в нуль. Используя равенство (1.10), уравнения (1.6) и (1.8) можно представить в виде

$$\int_{BA} [\gamma(\omega) - \gamma_0(\omega)] K_\theta ds = H(\varphi) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} H(\varphi) = & - \left\{ 2\pi \sin(\theta - \alpha) + \int_{\Lambda} [\lambda(\omega) K_\theta - \gamma_0(\varphi) K_\theta] ds + \right. \\ & \left. + \int_{BA} [\gamma_0(\omega) K_\theta - \gamma_0(\varphi) K_\theta] ds + \sum_{m=1}^{n+k} H_m L_m \right\} \\ \lambda^2(\varphi) + 2\lambda(\varphi) & \left\{ \cos(\theta - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_{BA} [\gamma(\omega) L_\theta - \lambda(\varphi) L_\theta] ds + \right. \\ & \left. + \int_{\Lambda} [\lambda(\omega) L_\theta - \lambda(\varphi) L_\theta] ds + \sum_{m=1}^{n+k} H_m K_m \right\} - \varepsilon = 0 \quad \text{на } \Lambda \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь выражения для K_θ , L_θ имеют такой же вид, как K_θ , L_θ , только в выражениях K_θ , L_θ вместо угла θ следует поставить θ — угол наклона касательной к контуру интегрирования к оси x в текущей точке интегрирования ρ , ω . Функцию $\gamma_0(\varphi)$ представим так

$$\gamma_0(\varphi) = d_0 + g_0 r(\varphi) \tag{1.14}$$

Коэффициенты d_0 , g_0 определяются так, чтобы на концах интервалов в точках A и B подынтегральные выражения в (1.12) обращались в нуль

$$\gamma_0(\varphi_A) = \gamma(\omega_A), \quad \gamma_0(\varphi_B) = \gamma(\omega_B) \tag{1.15}$$

Согласно (1.11), подынтегральные выражения в уравнении (1.13) в точках A и B также обращаются в нуль. Уравнение (1.12) для точек (r, φ) , лежащих на дуге AB , может рассматриваться как неоднородное интегральное уравнение первого рода с ядром K_θ для неизвестной функции $[\gamma(\omega) - \gamma_0(\omega)]$ с правой частью $H(\varphi)$. Если уравнения линий тока представлены в полярных координатах, то выражение $K_\theta ds$ может быть переписано в виде

$$K_\theta ds = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2(\omega) + \rho'^2(\omega)}{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} \right)^{1/2} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln [r^2(\varphi) - 2r(\varphi)\rho(\omega) \cos(\varphi - \omega) + \rho^2(\omega)] d\omega$$

В случае, когда точки r , φ и ρ , ω лежат на линии тока BA , которая является дугой логарифмической спирали,

$$r = e^{-q\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \tag{1.16}$$

Выражение $K_\theta ds$ становится зависящим только от разности аргументов $\eta = \omega - \varphi$ ($d\eta = d\omega$)

$$K_\theta ds = \frac{1}{2} e^{-q\eta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln [1 - 2e^{q\eta} \cos \eta + e^{2q\eta}] d\eta$$

или

$$K_\theta ds = e^{-q\eta} \left[\frac{qe^{q\eta}}{1 - e^{q\eta}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \frac{\operatorname{ch} q\eta - \cos \eta}{\operatorname{ch} q\eta - 1} \right] d\eta \tag{1.17}$$

Первое слагаемое выражения (1.17) — ядро типа Коши, а второе слагаемое оказывается непрерывной функцией. Правая часть уравнения (1.12) определяется через известные непрерывные функции и интеграл, содержащий неизвестную непрерывную функцию $\lambda(\omega)$ по неизвестной границе Λ с ветвями, уходящими в бесконечность. Функция $\lambda(\omega)$ на обеих ветвях границы Λ асимптотически стремится к постоянному значению λ_∞ , а ветви границы на достаточно большом удалении становятся параллельными друг другу. Интегрирование по ветвям производится в противоположном направлении, и для точек, лежащих на дуге AB , интеграл сходится. Если регулярную часть ядра K_θ перенести в правую сторону уравнения (1.12), то уравнение (1.12) можно рассматривать как сингулярное интегральное уравнение для функции $[\gamma(\omega) - \gamma_0(\omega)]$ с ядром Коши и непрерывной правой частью. Для существования решения такого уравнения, принимающего нулевые значения на концах интеграла AB , необходимо выполнение некоторого условия [1], накладываемого на правую часть уравнения, т. е. на величины Γ_m .

При $k > 1$ существует произвол в выборе $k - 1$ величин циркуляций, устраняемый из приближительных представлений о характере течения вблизи особенностей. Например, можно считать, что в реальных условиях крыла самолета внутренняя полость крыла будет загромаждена различного рода препятствиями, гасящими циркуляционные скорости вокруг источников (расходных труб), поэтому с большой степенью достоверности можно положить циркуляции Γ_m всех k вихреисточников равными нулю. Если принять, что Γ_m для всех k вихреисточников равны нулю и выполняются условия схода с обоих концов, то расход через щели можно задавать только для $(n - 1)$ щели.

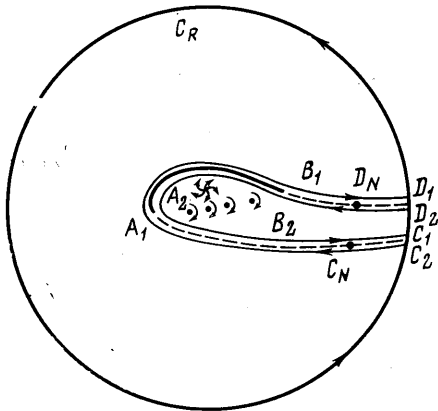
2. На непрерывный контур AB действует суммарная сила гидродинамического давления

$$P_{AB} = i \int_{B_1A_1} p_e dz + i \int_{A_2B_2} P_i dz = P_{B_1A_1} + P_{A_2B_2}$$

где индексы i и e относятся соответственно к внутреннему и внешнему потокам; дуга B_1A_1 — путь интегрирования по внешней стороне дуги BA ; дуга A_2B_2 — путь интегрирования по дуге, примыкающей к контуру BA с внутренней стороны настолько близко, что все дискретные особенности лежат вне контура $B_1A_1A_2B_2$ (фиг. 2). Используя уравнения Бернулли для внешнего и внутреннего потоков и учитывая, что полные давления во внешнем и внутреннем потоках различны, запишем выражение для суммарной силы, действующей на дугу BA , в виде

$$P_{AB} = i \left\{ p_0 \int_{B_1A_1} dz + p_0' \int_{A_2B_2} dz - \frac{\rho v_{e\infty}^2}{2} \left[\int_{B_1A_1} v_e^2 dz + \int_{A_2B_2} v_i^2 dz \right] \right\} \quad (2.1)$$

Главный вектор сил давления, действующих со стороны жидкости на все дискретные особенности, расположенные внутри полости крыла и на нижней поверхности контура, может быть определен через главный вектор давления и перенос количества движения, относящиеся к жидкому контуру, охватывающему все дискретные особенности и целиком расположенному во внутреннем потоке. В качестве такого контура выбираем кривую $\Sigma' = D_2B_2A_2C_2D_2$, проходящую по внутренней стороне границы струи D_2B_2 , по внутренней стороне дуги B_2A_2 , по внутренней стороне границы струи A_2C_2 и по дуге C_2D_2 окружности C_R радиуса R , проведенной из начала координат. Сосредоточенная сила, действующая на дискретные особенности, равна [2]



Фиг. 2

щемся линией тока, $V_{in}^0 = 0$; последнее равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned} P_* &= i \int_{\Sigma'} p_i dz + \rho \int_{\Sigma'} V_i^0 V_{in}^0 ds = \\ &= i p_0' \int_{\Sigma'} dz - i \frac{\rho v_{e\infty}^2}{2} \int_{\Sigma'} v_i^2 dz + \\ &\quad + \rho \int_{\Sigma'} V_i^0 V_{in}^0 ds \end{aligned}$$

или с учетом того, что первый интеграл в правой части равен нулю и на участке контура $\Sigma'D_2B_2A_2C_2$, являю-

$$P_* = -i \frac{\rho v_{e\infty}^2}{2} \left[\int_{\Sigma'} v_i^2 dz - 2i \int_{C_2D_2} v_i^2 \sin(\nu - \theta) e^{i(\theta - \nu)} dz \right] \quad (2.2)$$

где ν — угол между касательной к контуру интегрирования и осью x , θ — угол наклона вектора скорости к оси x .

Представляет интерес нахождение суммарной силы, действующей со стороны потока на систему «дуга AB — дискретные особенности», выраже-

ние которой, учитывая равенства (2.1) и (2.2), запишем в виде

$$P_{AB} + P_* = -i(p_0' - p_0) \int_{B_2A_2} dz - i \frac{\rho v_{e\infty}^{02}}{2} \left\{ \int_{B_1A_1} v_e^2 dz + \int_{D_2B_2 + A_2C_2} v_i^2 dz + \int_{C_2D_2} v_i^2 [1 - 2i \sin(\nu - \theta) e^{i(\theta - \nu)}] dz \right\} \quad (2.3)$$

Участки контура B_1A_1 , D_2B_2 , A_2C_2 — линии тока, вдоль которых

$$v = \frac{dw}{dz} e^{i\theta}, \quad d\bar{z} = e^{-2i\theta} dz \quad (2.4)$$

Здесь θ — угол между касательной к линии тока и осью x . В равенстве (2.3) переходим к сопряженным величинам

$$\bar{P}_{AB} + \bar{P}_* = i(p_0' - p_0) \int_{B_2A_2} d\bar{z} + i \frac{\rho v_{e\infty}^{02}}{2} \left\{ \int_{B_1A_1} \left(\frac{dw}{dz} \right)_e^2 dz + \int_{D_2B_2 + A_2C_2} \left(\frac{dw}{dz} \right)_i^2 dz + \int_{C_2D_2} v_i^2 [1 + 2i \sin(\nu - \theta) e^{-i(\theta - \nu)}] d\bar{z} \right\} \quad (2.5)$$

Во внешней области комплексного переменного z функция dw/dz не имеет особенностей, и поэтому

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{dw}{dz} \right)_e^2 dz = 0 \quad (2.6)$$

где путь интегрирования $\Sigma = C_1A_1B_1D_1C_1$ проходит по границе струи C_1A_1 , по дуге A_1B_1 , по границе струи B_1D_1 и по дуге D_1C_1 окружности C_R радиуса R , проведенной из начала координат. На жидкой границе силы давления уравниваются, и имеют место равенства

$$i \int_{D_1B_1} p_e dz + i \int_{B_2D_2} p_i dz = 0, \quad i \int_{C_1A_1} p_e d\bar{z} + i \int_{A_2C_2} p_i d\bar{z} = 0$$

которые, используя уравнения Бернулли для внешнего и внутреннего потоков и равенства (2.4), можно представить в виде

$$i \frac{\rho v_{e\infty}^{02}}{2} \left[\int_{B_1D_1} \left(\frac{dw}{dz} \right)_e^2 dz + \int_{D_2B_2} \left(\frac{dw}{dz} \right)_i^2 dz \right] = i(p_0' - p_0) \int_{D_2B_2} d\bar{z} \quad (2.7)$$

$$i \frac{\rho v_{e\infty}^{02}}{2} \left[\int_{C_1A_1} \left(\frac{dw}{dz} \right)_e^2 dz + \int_{A_2C_2} \left(\frac{dw}{dz} \right)_i^2 dz \right] = i(p_0' - p_0) \int_{A_2C_2} d\bar{z}$$

Равенство (2.5) с учетом соотношений (2.6), (2.7) и равенства

$$\int_{\Sigma'} d\bar{z} = 0$$

перепишем как

$$\bar{P}_{AB} + \bar{P}_* = -i(p_0' - p_0) \int_{C_2D_2} d\bar{z} + i \frac{\rho v_{e\infty}^{02}}{2} \left\{ \int_{D_1C_1} \left(\frac{dw}{dz} \right)_e^2 dz + \int_{C_2D_2} v_i^2 [1 + 2i \sin(\nu - \theta) e^{-i(\theta - \nu)}] d\bar{z} \right\} \quad (2.8)$$

где контур $D_1C_1 + C_2D_2$ — окружность C_R радиуса R .

Значение комплексной скорости dw/dz определяется равенством (1.1), где контур интегрирования Λ представляет собой границы струи, уходящие в бесконечность. Если в формуле (1.1) контур Λ заменить контуром Λ_N , состоящим из двух конечных отрезков границы $D_N B, AC_N$, то получим выражение, которое обозначим через dw_N/dz . Приближенное равенство $dw/dz \approx dw_N/dz$ тем точнее, чем скорее струя превращается в равномерный поток со скоростью, параллельной скорости набегающего потока. Интегралы по отброшенным частям границы струи, уходящим в бесконечность, взаимно компенсируют друг друга. На окружности $C_R = D_1 C_1 + C_2 D_2$ при достаточно большом $R > R_N = \max \{|z_{D_N}|, |z_{C_N}|\}$ выражение dw_N/dz раскладывается в ряд по отрицательным степеням

$$\frac{dw_N}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad a_0 = e^{-i\alpha}$$

$$a_k = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{BA} \zeta^{k-1} \gamma ds + \int_{\Lambda_N} \zeta^{k-1} \lambda ds - \sum_{m=1}^{n+k} (-\Gamma_m + iQ_m) z^{k-1} \right\} \quad (k \geq 1)$$

Тогда

$$\left(\frac{dw_N}{dz} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}, \quad b_0 = e^{-2i\alpha}, \quad b_k = \sum_{\nu=0}^k a_k a_{k-\nu} \quad (k \geq 1)$$

и, согласно теореме о вычетах,

$$\int_{C_R} \left(\frac{dw_N}{dz} \right)^2 dz = -2\pi i b_1 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$b_1 = 2a_1 a_0 = -\frac{2e^{-i\alpha}}{2\pi i} (\Gamma + \Gamma_{\Lambda} + \Gamma_* - iQ)$$

$$\Gamma = \int_{BA} \gamma ds, \quad \Gamma_{\Lambda} = \int_{\Lambda} \lambda ds, \quad \Gamma_* = \sum_{m=1}^{n+k} \Gamma_m, \quad Q = \sum_{m=1}^k Q_m \quad (2.9)$$

Здесь Γ — циркуляция скорости вдоль дуги AB , Γ_{Λ} — циркуляция скорости вдоль границы струи, Γ_* — величина циркуляции скорости вокруг всех дискретных особенностей, Q — обильность всех вихреисточников, расположенных внутри контура крыла.

На окружности C_R при $R > R_N$ с учетом сделанного приближения $dw/dz \approx dw_N/dz$ равенство (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{P}_{AB} + \bar{P}_* &= -i(p_0' - p_0) \int_{C_2 D_2} d\bar{z} + i \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} \left\{ \int_{C_R} \left(\frac{dw_N}{dz} \right)^2 dz - \right. \\ &\left. - \int_{C_2 D_2} \left(\frac{dw_N}{dz} \right)^2 dz + \int_{C_2 D_2} v_i^2 [1 + 2i \sin(\nu - \theta) e^{-i(\theta - \nu)}] d\bar{z} \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

При $R > R_N$ профиль скоростей в струе выравнивается, а величина скорости в струе становится близкой к величине скорости в струе на бесконечности, определяемой из условия выравнивания статических давлений на бесконечности в струе и во внешнем потоке и из уравнения Бернулли

$$|v_{i\infty}| = \sqrt{\varepsilon + 1} \quad (2.11)$$

где значение ε определено равенством (1.7). Скорость набегающего потока при $R > R_N$ становится близкой по величине и направлению к скорости набегающего потока на бесконечности. При $R > R_N$ равенство (2.10) может быть переписано в виде

$$\bar{P}_{AB} + \bar{P}_* = -i(p_0' - p_0) \int_{C_2 D_2} d\bar{z} + i \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} \left\{ \int_{C_R} \left(\frac{dw_N}{dz} \right)^2 dz - e^{-2i\alpha} \int_{C_2 D_2} dz + v_{i\infty}^2 \int_{C_2 D_2} [1 + 2i \sin(\nu - \alpha) e^{-i(\alpha - \nu)}] d\bar{z} \right\}$$

или, с учетом равенств (1.7), (2.11),

$$\bar{P}_{AB} + \bar{P}_* = i \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} \left\{ \int_{C_R} \left(\frac{dw_N}{dz} \right)^2 dz - e^{-2i\alpha} \int_{C_2 D_2} dz + \int_{C_2 D_2} [1 + 2iv_{i\infty}^2 \sin(\nu - \alpha) e^{-i(\alpha - \nu)}] d\bar{z} \right\} \quad (2.12)$$

Величина угла наклона касательной к элементу дуги $C_2 D_2$ к оси x при $R \rightarrow \infty$ равна $\nu = \alpha = 1/2\pi$. Воспользуемся соотношениями

$$dz = e^{-2i\nu} d\bar{z}, \quad z_{D_2} - z_{C_2} = ib_{\infty} e^{i\alpha}, \quad b_{\infty} = Q(\varepsilon + 1)^{1/2}$$

Здесь b_{∞} — ширина струи на бесконечности, определяемая из условия сохранения массы. Тогда вычисления дают

$$-e^{-2i\alpha} \int_{C_2 D_2} dz + \int_{C_2 D_2} [1 + 2iv_{i\infty}^2 \sin(\nu - \alpha) e^{-i(\alpha - \nu)}] d\bar{z} = 2i \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon + 1}} Q e^{i\alpha}$$

Величина $\bar{P}_{AB} = \bar{P}_* = X - iY$ представляет собой выражение, сопряженное с суммарной гидродинамической силой, действующей на систему «дуга AB — дискретные особенности». Используя равенства (2.9), (2.13) из соотношения (2.12), получим:

$$X + iY = 1/2 \rho v_{\infty}^2 \{ -2(1 + \varepsilon / \sqrt{\varepsilon + 1}) Q + i2(\Gamma + \Gamma_{\Lambda} + \Gamma_*) \} e^{i\alpha} \quad (2.14)$$

Аналогичным образом получается формула для момента сил.

3. В случае, когда относительная толщина дуги AB мала и выходящая из контура крыла струя имеет малый угол наклона к оси x , исходная система уравнения (1.6), (1.8), (1.9) допускает введение аппроксимаций, значительно упрощающих исходную систему и позволяющих получить решение в приближении тонкого крыла. В качестве дуги AB взята сильно вытянутая дуга логарифмической спирали, определенная уравнением (1.16), когда $q \gg 1$. Значением q^{-2} , по сравнению с 1, будем пренебрегать. Форма границы струи ищется в виде ряда, коэффициенты которого ищутся из условий обтекания профиля и поведения струи на бесконечности. Рассматриваются случаи малых углов атаки α , таких, что можно принимать $\text{tg } \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$ и пренебрегать значением α^2 по сравнению с 1. Величина тангенса угла наклона касательной к границе струи вдоль всей границы — малая величина, квадратом которой, по сравнению с единицей, можно пренебрегать.

Тогда

$$ds_j = (-1)^{j+1} d\xi \quad (\xi = \rho \cos \omega) \quad \text{на } \Lambda_j \quad (3.1)$$

Индекс $j = 1, 2$ относится соответственно к нижней и верхней границам струи. Неизвестная функция λ ищется в виде ряда

$$\lambda_j = \lambda_{j\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jn}}{(1 + \xi)^n} \quad (3.2)$$

Из условий конечности величины циркуляции скорость вдоль границы струи

$$\Gamma_{\Lambda} = \int_{\Lambda_1} \lambda_1 ds + \int_{\Lambda_2} \lambda_2 ds$$

используя равенства (3.1) и (3.2), будем иметь

$$\lambda_j = (-1)^{j+1} \left(\lambda_{\infty} + \frac{a}{1 + \xi} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{jn}}{(1 + \xi)^n}$$

Аппроксимация выражений $L_{\theta} ds$, $L_{\phi} ds$ в уравнении (1.13), проведенная с учетом тонкости дуги AB и малого наклона струи, позволяет выполнить в уравнении (1.13) необходимые интегрирования и определить коэффициенты λ_{∞} и a без совместного решения всей системы уравнений

$$\lambda_{\infty} = \sqrt{\varepsilon + 1} - 1, \quad a = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon + 1} - 1}{\varepsilon + 1} Q$$

Функция λ , рассматриваемая в смысле асимптотики на бесконечности, имеет вид

$$\lambda_j = (-1)^{j+1} [\lambda_{\infty} + a / (1 + \xi)] \quad (3.3)$$

Воспользуемся разложением [3]

$$\ln \frac{\operatorname{ch} q\eta - \cos \eta}{\operatorname{ch} q\eta - 1} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kq|\eta|} \frac{1}{k} \sin^2 \frac{k\eta}{2}$$

и запишем второе слагаемое в скобке равенства (1.17) так:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \frac{\operatorname{ch} q\eta - \cos \eta}{\operatorname{ch} q\eta - 1} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kq|\eta|} \left(\cos \frac{k\eta}{2} - q \sin \frac{k|\eta|}{2} \right) \sin \frac{k\eta}{2} d\eta$$

Оценивая для случая больших q сумму, стоящую в правой части последнего равенства, по первому слагаемому, получим

$$\max 2 \left[e^{-q|\eta|} \sin \frac{\eta}{2} \cdot \left(\cos \frac{\eta}{2} - q \sin \frac{|\eta|}{2} \right) \right] \approx \frac{\sqrt{2}}{q} e^{-2} \approx \frac{1}{5q}$$

Таким образом, при больших q (тонкое крыло) второе слагаемое ядра K_{θ} может быть отброшено как малая величина, и уравнение (1.12) сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши для определения неизвестной функции $\delta(\eta) = \gamma(\omega) - \gamma_0(\omega)$

$$q \int_{-\varphi}^{\pi-\varphi} \frac{\delta(\eta)}{1 - e^{q\eta}} d\eta = H(\varphi) \quad (3.4)$$

Здесь $H(\varphi)$ — известная непрерывная в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$ функция, выражаемая через интегралы от определенных выше функций λ и γ_0 , и другие известные функции, зависящие от параметров q , α , Γ_m , Q_m , z_m . Аппроксимация выражений $K_{\theta} ds$, $K_{\phi} ds$, проведенная с учетом тонкости крыла и малости наклона струи, позволяет взять все интегралы, через которые определяется функция $H(\varphi)$, и выразить функцию $H(\varphi)$ через элементарные функции переменной φ и параметров q , α , λ_{∞} , a , Γ_m , Q_m , z_m . При помощи соотношений

$$e^{-q\varphi} = \frac{1 + e^{-q\pi}}{2} - \frac{1 - e^{-q\pi}}{2} \cos t, \quad e^{-q\omega} = \frac{1 + e^{-q\pi}}{2} - \frac{1 - e^{-q\pi}}{2} \cos \tau$$

и равенства $\eta = \omega - \varphi$, ($d\eta = d\omega$) уравнение (3.4) преобразуется в уравнение

$$\int_0^{\pi} \frac{g(\tau) \sin \tau}{\cos t - \cos \tau} d\tau = h(t) \quad (3.5)$$

$$g(\tau) = v(\omega) - \gamma_0(\omega), \quad h(t) = H(\varphi), \quad h(t) = h_0(t, q) + ah_1(t, q) +$$

В уравнении (3.5) введены следующие обозначения:

$$+ \lambda_\infty h_2(t, q) + ah_3(t, q) + \sum_{m=1}^{n+k} \Gamma_m h_4(t, q, z_m) + \sum_{m=1}^k Q_m h_5(t, q, z_m)$$

Для того чтобы существовало решение уравнения (3.5), принимающее на концах интервала нулевые значения, правая часть уравнения (3.5) должна удовлетворять условию [1]

$$\int_0^\pi h(t) dt = 0 \tag{3.6}$$

Существует формула обращения уравнения (3.5). Конкретные расчеты проводились с использованием аппарата тригонометрических рядов. Решение уравнения (3.5) ищется в виде ряда

$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\tau \tag{3.7}$$

При этом функция $g(\tau)$ на концах интервала обращается в нуль в силу структуры ряда. Коэффициенты ряда (3.7) определяются из уравнения (3.5)

$$A_n = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi h(t) \cos nt dt \tag{3.8}$$

Интегралы в равенствах (3.6), (3.8) находятся численно при заданном значении параметра q и фиксированных положениях дискретных особенностей z_m .

Суммарные гидродинамические силы определяются через значения Γ , Γ_Λ , Γ_* . Значение циркуляции скорости вдоль дуги AB

$$\Gamma = \int_{BA} \gamma ds, \quad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\tau + d_0 + g_0 \rho \tag{3.9}$$

Для тонкой дуги логарифмической спирали $\rho = e^{-q\alpha}$ имеет место приближенное равенство $ds = -d\rho$, которое записывается в виде $ds = 1/2(1 - e^{-q\pi}) \sin \tau d\tau$. Проводя интегрирование в (3.9), получим

$$\Gamma = 1/4(1 - e^{-q\pi})\pi H_1 + (1 - e^{-q\pi})d_0 + 1/2(1 - e^{-2q\pi})g_0$$

Величина циркуляции скорости вдоль границы струи, согласно (3.1), (3.4), равна

$$\Gamma_\Lambda = \int_\Lambda \lambda ds = \int_{-\exp(-q\pi)}^1 \left(\lambda_\infty + \frac{a}{1 + \xi} \right) d\xi = (1 + e^{-q\pi})\lambda_\infty + a \ln \frac{2}{1 - e^{-q\pi}}$$

Суммарная циркуляция вокруг всех дискретных особенностей

$$\Gamma_* = \sum_{m=1}^{n+k} \Gamma_m,$$

причем, как отмечалось при постановке задачи, величины циркуляций Γ_m всех k вихресточников принимаются равными нулю, а значения Γ_m для n вихрей определяются из условий задания расходов через $(n - 1)$ щель и условия (3.6) схода струй с передней и задней кромки. Выражение для функции тока в точке (r, φ) в случае обтекания тонкой дуги логарифмической спирали с выдувом струи под малым углом к нижней образующей профиля, когда значения функций γ , λ и путь интегрирования Λ определены равенствами (3.1), (3.4), (3.8), (3.9), может быть, согласно (1.9), представлено в следующей структурной форме записи:

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi) = & R_0(q, r, \varphi) + aR_1(q, r, \varphi) + \lambda_\infty R_2(q, r, \varphi) + aR_3(q, r, \varphi) + \\ & + \sum_{m=1}^n \Gamma_m R_4(q, r, \varphi, r_m, \varphi_m) + \sum_{m=1}^k Q_m R_5(q, r, \varphi, r_m, \varphi_m) = C \end{aligned}$$

Суммарную силу, действующую на систему «профиль — дискретные особенности», можно представить, согласно равенству (2.17), при $\alpha = 0$ в виде

$$(X + iY)_{\alpha=0} = \frac{\rho v_{e\infty}^2}{2} \left\langle -2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon+1}} \right) Q + \right. \\ \left. + i \left\{ (C_0 + D_0) + (C_1 + D_1) (\sqrt{\varepsilon+1} - 1) + \left[(C_2 + D_2) - (C_3 + D_3) \frac{\sqrt{\varepsilon+1} - 1}{2\pi(\varepsilon+1)} \right] Q \right\} \right\rangle, \quad (3.21) \\ C_0 + C_1 (\sqrt{\varepsilon+1} - 1) + \left[C_2 - C_3 \frac{\sqrt{\varepsilon+1} - 1}{2\pi(\varepsilon+1)} \right] Q = 2(\Gamma + \Gamma_A) \\ D_0 + D_1 (\sqrt{\varepsilon+1} - 1) + \left[D_2 - D_3 \frac{\sqrt{\varepsilon+1} - 1}{2\pi(\varepsilon+1)} \right] Q = 2\Gamma_*$$

Коэффициенты C_i , D_i не зависят от параметров Q и ε . При этом коэффициенты C_i характеризуют силы, действующие со стороны потока на профиль AB , а коэффициенты D_i — силы, действующие на дискретные особенности. Выражение

$$\left[(C_2 + D_2) - (C_3 + D_3) \frac{\sqrt{\varepsilon+1} - 1}{2\pi(\varepsilon+1)} \right]$$

представляет собой величину $(\partial C_y / \partial Q)_{\alpha=0}$, возникающую при обтекании профиля, с кромки которого сходят линии тока, не смыкающиеся на бесконечности ($Q \neq 0$). При отсутствии разрыва полного давления ($\varepsilon = 0$) значение $(\partial C_y / \partial Q)_{\alpha=0} = C_2 + D_2$. Для условий старта и посадки, когда скорость $v_{e\infty}^\circ$ мала, параметр ε при наличии разрыва полных давлений, согласно равенству (1.7), принимает большие значения. При изменении параметра ε в интервале $0 \leq \varepsilon \leq \infty$ максимальное значение величины $(\sqrt{\varepsilon+1} - 1) / 2\pi(\varepsilon+1)$ равно 0.04, а во всех проведенных численных расчетах абсолютная величина суммы $(C_3 + D_3)$ получалась значительно меньшей абсолютной величины суммы $(C_2 + D_2)$, т. е. при любых значениях параметра ε значение $(\partial C_y / \partial Q)_{\alpha=0}$ слабо зависит от ε . Это означает, что нелинейность граничных условий мало влияет на структуру формул для суммарных сил, и величины, характеризующие зависимость подъемной силы от ε и от Q , практически входят в виде отдельных слагаемых.

Второй член, стоящий в квадратной скобке равенства (3.21), т. е. величина $(C_1 + D_1) (\sqrt{\varepsilon+1} - 1)$, зависит от параметра ε , характеризующего величину разрыва полного давления. В проведенных расчетах коэффициент C_1 , связанный с действием потока на профиль AB , получается всегда положительным, а коэффициент D_1 оказывается отрицательным. Это значит, что с увеличением полного давления в полости крыла увеличивается подъемная сила, действующая на контур AB . С другой стороны, при истечении струи из полости крыла вдоль нижней поверхности крыла поток ускоряется после выхода из щели между лопатками, и ускоренным потоком обтекает нижнюю поверхность лопаток, причем статическое давление на этой поверхности мало отличается от давления на границе струи, статическое же давление на верхней поверхности лопаток мало отличается от полного давления в полости крыла. Возникает сила суммарного давления на лопатки, направленная вниз, которая увеличивается с ростом полного давления в полости крыла.

При истечении струи из полости крыла в покоящуюся среду ($v_{e\infty}^\circ = 0$) значение параметра $\varepsilon = \infty$, в этом случае у всех величин, которые относились к величине $v_{e\infty}^\circ$, необходимо выделить множитель $1/v_{e\infty}^\circ$ после чего формула (3.21) принимает вид

$$(X + iY)_{\alpha=0} = -Q^\circ v_{i\infty}^\circ + \frac{i}{2} [(C_1^\circ + D_1^\circ) \sqrt{2\rho(p_0' - p_0)} + (C_2^\circ + D_2^\circ) Q^\circ]$$

где C_1° , D_1° , C_2° , D_2° , Q° , $v_{i\infty}^\circ$, p_0' , p_0 , ρ — размерные величины.

Замечание 1. Рассмотренная выше расчетная схема для профиля крыла с выдувом очевидным образом [1] распространяется на несвязные контуры, состоящие из нескольких пересекающихся дуг. Отметим две возможности использования дуг спиралей для построения идеализированных схем некоторых течений:

а) две дуги спиралей (вообще говоря, с различными значениями параметра q), расположенные последовательно одна за другой, могут служить примером крыла со щелевым эжектором;

б) четыре дуги спиралей, расположенные попарно симметрично относительно горизонтальной прямой, имитируют крыло с щелевым эжектором у поверхности земли и могут служить теоретической моделью для изучения экранного эффекта.

Замечание 2. Вполне аналогичным образом может быть рассмотрена задача обтекания профиля с выдувом струи в случае забора воздуха из внешнего потока при помощи специальных воздухозаборных устройств, расположенных на верхней части контура AB . Здесь следует разместить непрерывным образом диполи, оси которых направлены по внутренней нормали к контуру, распределение плотности диполей подчинено требованию обеспечения суммарного расхода. При рассмотрении задачи с разрывом полного давления нужно вдоль той же части дуги расположить непрерывную цепочку вихрей с плотностью $f_1(\zeta)$, определяемой в процессе решения задачи. Выражение для комплексной скорости с учетом указанных особенностей запишется в виде

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\alpha} + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{BA} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_A \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{m=1}^{n+k} \frac{-\Gamma_m + iQ_m}{z - z_m} - \int_{B_1A_1} \frac{m(s)}{(z - \zeta)^2} d\zeta \right],$$

где функция $m(s)$ — плотность распределения диполей — предполагается заданной; B_1A_1 — часть контура AB , на которой размещены диполи. Будем считать выполненными все условия, обеспечивающие существование предельных значений сингулярных интегралов [4] (в частности, $m(A_1) = m(B_1) = 0$). Тогда, выполняя интегрирование по частям в интеграле по дуге B_1A_1 , можно получить равенство, аналогичное равенству (1.4)

$$v_i + v_e = 2e^{i\theta} \left\{ e^{-i\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{BA} \frac{\gamma ds}{t - \zeta} + \int_A \frac{\lambda ds}{t - \zeta} - \sum_{m=1}^{n+k} \frac{-\Gamma_m + iQ_m}{t - z_m} + \int_{B_1A_1} \frac{m'(s) ds}{t - \zeta} \right] \right\}$$

Весь рассмотренный выше математический аппарат остается в силе для системы интегральных уравнений, вытекающей из последнего равенства, поскольку интеграл, содержащий $m(s)$, можно считать известной функцией.

Авторы благодарят С. А. Христиановича за постановку задачи и обсуждение.

Поступило 14 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
2. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. Гостехиздат, 1949.
3. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.