

ЛИТЕРАТУРА

1. Bownan J., Niblett G. The Passage of a Plane Shock Wave through a Wire Gauze, Proc. Phys. Soc. B. 1955, vol. 68, No. 12.
2. Dosa n j h D. S. Some Comments on «A Theoretical and Experimental Study of Shock Tube Flows». J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 11.
3. Glass I. I., Patterson G. H. A Theoretical and Experimental Study of Shock Tube Flows, J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 2 (перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1956, № 2).
4. Franks W. J., Hall J. G., Collision of Plane Shock Wave with Wire Screens. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, No. 12.
5. Schardin H. Ein Beispiel zur Verwendung des Stosswellenrohres für Probleme der Instationären Gasdynamik. Z. angew. Math. und Phys. 1958, B. 9, No. 5/6 (перев.: Сб. статей «Ударные трубы». Изд. иностр. лит., 1962).
6. Chester W. The Propagation of Shock Waves through Channels of Varying Width, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, vol. 6, No. 4 (перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1954, № 6).
7. Chisnell R. F. The Motion of Shock Waves in a Channel with Applications to cylindrical and spherical Shock Waves. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, No. 3.
8. Kahane A., Warren W. R., Griffith W. C., Marino A. A. A Theoretical and Experimental Study of Finite Amplitude Wave Interactions with Channels of Varying Area. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 21, N 8 (перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1955, № 4).
9. Rudinger G. Wave Diagrams for Non-Steady Flows in Ducts, Princeton, 1955.
10. Duff R. E. Shock-Tube Performance of Low Initial Pressure. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 2.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ К РАСЧЕТУ ОБТЕКАНИЯ КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ АТАКИ

А. П. БАЗЖИН, И. Ф. ЧЕЛЫШЕВА

(Москва)

1. В статье рассматривается обтекание конических тел с гладким контуром поперечного сечения под большими углами атаки.

Изучение полей течения около круговых конусов, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа под углами атаки [1], а также общие физические соображения приводят к выводу, что весьма вероятно следующая схема течения. При достаточно большом угле атаки течение на нижней стороне конического тела не будет испытывать влияния верхней стороны, так как по мере увеличения угла атаки область гиперболичности распространится на все расстояние от скачка уплотнения до тела. В таком случае течение около нижней части тела можно рассчитывать независимо, применив для этого один из методов расчета смешанных течений газа.

Был выбран метод, предложенный в работе [2]. Этот метод широко применялся для расчета симметричного обтекания затупленных плоских и осесимметричных тел, а также был использован для расчета пространственных смешанных течений газа около лобовых поверхностей тел под углами атаки. Достоинства и слабые стороны этого метода хорошо известны. Применение его к расчету конических течений производится, по-видимому, впервые.

Кроме этого метода авторам известен лишь один метод расчета поля течения около конусов при больших углах атаки. Это обратный метод, аналогичный широко известному методу Ван Дайка. В работе [3] дано его краткое описание и приведены примеры расчетов и экспериментальные данные, на основании которых производится оценка точности метода.

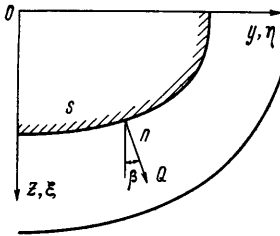
Выбранный метод расчета хорошо соответствует природе конического течения, в котором вблизи поверхности тела может образоваться вихревой слой с большими градиентами газодинамических величин по нормали к поверхности. Программа для ЭВМ, составленная на основе этого метода, позволяет рассчитать течение около нижней поверхности конического тела с гладким контуром поперечного сечения.

В статье представлены отдельные результаты систематических расчетов обтекания круговых и эллиптических конусов при больших углах атаки.

2. **Постановка задачи, метод решения.** Коническое течение можно рассматривать зависящим от двух независимых переменных:

$$\eta = \frac{y}{x}, \quad \xi = \frac{z}{x} \quad (2.1)$$

где x, y, z — прямоугольная система координат, и ось x направлена вдоль конического тела. В этих переменных систему уравнений газовой динамики можно представить в следующем виде:



Фиг. 1

$$\begin{aligned} a \frac{\partial u}{\partial \eta} + b \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \left(\eta \frac{\partial p}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) &= 0 \quad (2.2) \\ a \frac{\partial v}{\partial \eta} + b \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= 0, \quad a \frac{\partial w}{\partial \eta} + b \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \\ a \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + b \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) &= 0 \\ a \frac{\partial T}{\partial \eta} + b \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{dT}{dp} \left(a \frac{\partial p}{\partial \eta} + b \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) &= 0 \quad \left(\begin{array}{l} a = v - u\eta \\ b = w - u\xi \end{array} \right) \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность, p — давление, T — температура; u, v, w — составляющие скорости на направления x, y, z . Введем теперь в плоскости $x = \text{const}$ вместо системы координат η, ξ систему s, n , где s — длина дуги вдоль контура тела от плоскости симметрии до нормали, проходящей через рассматриваемую точку Q (фиг. 1), n — расстояние по нормали от поверхности тела до точки Q , отнесенное к расстоянию до скачка уплотнения, $\varepsilon(s)$, вдоль этой нормали. Связь между координатами выражается формулами:

$$\eta = \eta_T + n\varepsilon \sin \beta, \quad \xi = \xi_T + n\varepsilon \cos \beta. \quad (2.3)$$

Здесь $\eta_T(s), \xi_T(s)$ — координаты контура тела; $\beta(s)$ угол между нормалью к контуру тела в плоскости η, ξ и осью $\eta = 0$.

Из практики использования выбранного метода расчета известно, что для его успешного применения система координат приходится приспосабливать к форме рассматриваемого тела. Можно ожидать, что переход к системе координат s, n в значительной мере устранил эту трудность.

В этой системе координат уравнения (2.2), разрешенные относительно производных по n , можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{At + BX - NZ - PY}{(1/\rho)(A^2/c_1^2 - P^2 - N^2 - B^2)} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{1}{A} \left(X + \frac{B}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{A} \left(Y - \frac{P}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= \frac{1}{A} \left(Z - \frac{N}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{A} \left(m + A \frac{dT}{dp} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь c_1 — местная скорость звука.

$$A = aP + bN, \quad B = \eta P + \xi N, \quad C = aL - bR \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sin \beta - L\varepsilon'n}{\varepsilon}, \quad N = \frac{\cos \beta + R\varepsilon'n}{\varepsilon}, \quad L = \frac{\cos \beta}{1 + k\varepsilon n}, \quad R = \frac{\sin \beta}{1 + k\varepsilon n}, \quad \varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{ds} \\ X &= \frac{D}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - C \frac{\partial u}{\partial s}, \quad Y = -\frac{L}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - C \frac{\partial v}{\partial s}, \quad Z = \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - C \frac{\partial w}{\partial s}, \quad D = \eta L - \xi R \\ t &= D \frac{\partial u}{\partial s} - L \frac{\partial v}{\partial s} + R \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{C}{\rho c_1^2} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad m = C \left(\frac{dT}{dp} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial T}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

В плоскости симметрии течения система (2.4) вырождается и принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial n} &= - \frac{\varepsilon_0 b_0 v_1^0 \rho_0}{(b_0^2/c_1^2 - 1 - \xi^2)(1 + k_0 \varepsilon_0 n)}, & \frac{\partial u_0}{\partial n} &= \frac{\xi}{b_0 \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial n} \\ \frac{\partial v_1^0}{\partial n} &= \frac{\varepsilon_0}{b_0} \left[- \frac{2p_2^0}{\rho_0(1 + k_0 \varepsilon_0 n)} - v_1^0 \frac{v_1^0 - u_0(1 + k_0 \varepsilon_0 n) - b_0 k_0}{1 + k_0 \varepsilon_0 n} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon_0 \rho_0} \left(k_0 - \frac{2\varepsilon_2^0}{1 + k_0 \varepsilon_0 n} \right) \frac{\partial p_0}{\partial n} \right] \\ \frac{\partial w_0}{\partial n} &= - \frac{1}{b_0 \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial n}, & \frac{\partial T_0}{\partial n} &= \frac{dT_0}{dp} \frac{\partial p_0}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$v_1^0 = \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_0, \quad p_2^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \right)_0, \quad \varepsilon_2^0 = \left(\frac{d^2 \varepsilon}{ds^2} \right)_0$$

и нижний индекс 0 обозначает величины в плоскости симметрии.

Существо использованного метода расчета с наибольшей полнотой изложено в работе [2]. В рассматриваемом случае оно заключается в том, что в рассчитываемой области проводится несколько координатных лучей $s_i = \text{const}$, ($i = 0, 1 \dots N$). Система уравнений (2.4) записывается на каждом из N лучей, начиная с первого. Система (2.6) справедлива на нулевом луче, в плоскости симметрии течения. Частные производные по независимой переменной s , входящие в правые части уравнений (2.4) и (2.6), определяются из интерполяционных полиномов, приближенно представляющих зависимость искомых газодинамических функций от s . Например, по значениям давления на лучах s_0, s_1, \dots, s_N при постоянном значении n строится полином

$$p(s, n) = \sum_{j=0}^N p_{2j}^0(n) s^{2j} \quad (2.7)$$

Отсюда на i -луче:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \sum_{j=0}^N 2j p_{2j}^0 s_i^{(2j-1)} \quad (2.8)$$

Аналогично находят производные по s других газодинамических функций.

После вычисления граничных значений газодинамических функций на скачке уплотнения, системы (2.4) и (2.6) интегрируются от $n = 1$ до $n = 0$. При $n = 0$ проверяется выполнение условия непротекания на поверхности тела на каждом из лучей; в случае его невыполнения берется новая форма скачка уплотнения и весь расчет повторяется до тех пор, пока не будет удовлетворено условие на теле.

3. Граничное условие на поверхности тела.

Условие непротекания на поверхности тела в общем случае имеет вид

$$\mathbf{V} \text{ grad } F = 0 \quad (3.1)$$

где $F(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности тела.

Были рассмотрены конусы с эллиптическим поперечным сечением. В этом случае

$$F \equiv y^2/b^2 + z^2/a^2 - x^2 = 0 \quad (a = \text{tg } \theta_0, \quad b = \text{tg } \varphi_0) \quad (3.2)$$

Здесь a — полуось эллипса в плоскости симметрии течения в сечении $x = 1$.

Условие непротекания на каждом из лучей $s = s_i$ записывается в виде

$$\delta_i \equiv u_i - v_i \eta_{Ti} / b^2 - w_i \xi_{Ti} / a^2 = 0 \quad (3.3)$$

Решение считалось найденным, если при выбранной форме скачка уплотнения среднеквадратичная величина $\langle \delta_i^2 \rangle$, отнесенная к величине максимальной скорости, была меньше заданной малой величины Δ_δ . Во всех рассмотренных случаях величина Δ_δ была равна 1.10^{-5} .

4. **Граничные условия на поверхности скачка уплотнения.** Три связи между скоростями на поверхности скачка уплотнения —

$$V_\tau = V_{\tau\infty}, \quad \rho V_n = \rho_\infty V_{n\infty} \quad (4.1)$$

— приводят к следующей системе уравнений для определения составляющих скорости u, v, w за скачком:

$$a_i u + b_i v + c_i w = f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

Здесь

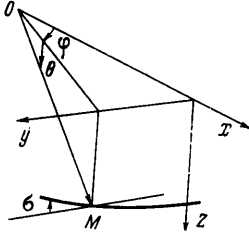
$$a_1 = \cos \varphi \cos \theta, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \sin \theta \cos \sigma + \sin \varphi \cos \theta \sin \sigma$$

$$b_1 = \sin \varphi \cos \theta, \quad b_2 = \cos \sigma, \quad b_3 = -\cos \varphi \cos \theta \sin \sigma$$

$$c_1 = \sin \theta, \quad c_2 = -\sin \sigma, \quad c_3 = -\cos \varphi \cos \theta \cos \sigma$$

$$f_1 = \cos \alpha \cos \varphi \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta, \quad f_2 = \sin \alpha \sin \sigma$$

$$f_3 = \Delta [\cos \alpha (\sin \theta \cos \sigma + \sin \varphi \cos \theta \sin \sigma) + \sin \alpha \cos \varphi \cos \theta \cos \sigma] \quad \Delta_1 = \rho_\infty / \rho$$



Фиг. 2

Углы φ и θ определены так, как показано на фиг. 2, где M — рассматриваемая точка поверхности скачка уплотнения, σ — угол наклона следа скачка уплотнения в плоскости $x = 1$ к плоскости x, y . Из системы (4.2) можно определить и производную $\frac{\partial v}{\partial s}$ при $\varphi = 0$. Эта производная на скачке уплотнения равна

$$v_1^0 = \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_0 = (1 - \Delta) \cos \theta_0 \sin(\theta_0 + \alpha) \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)_0 \quad (4.3)$$

Из геометрической связи на скачке уплотнения

$$d\varepsilon / ds = (1 + k\varepsilon) \operatorname{tg}(\beta - \sigma) \quad (4.4)$$

получаем в плоскости симметрии

$$\left(\frac{d\sigma}{ds} \right)_0 = k_0 - \frac{1}{1 + k_0 \varepsilon_0} \left(\frac{d^2 \varepsilon}{ds^2} \right)_0 \quad (4.5)$$

В общем случае несовершенного газа все термодинамические величины на скачке уплотнения определяются путем итераций из системы трех уравнений (h — энтальпия газа):

$$p = p_\infty + \rho_\infty V^2 n_\infty (1 - \Delta)$$

$$h = h_\infty + \frac{1}{2} V^2 n_\infty (1 - \Delta^2), \quad \Delta = \rho_\infty / \rho \quad (4.6)$$

5. **Результаты расчетов.** Для иллюстрации возможностей метода на фиг. 3—7 представлены отдельные результаты проведенных расчетов.

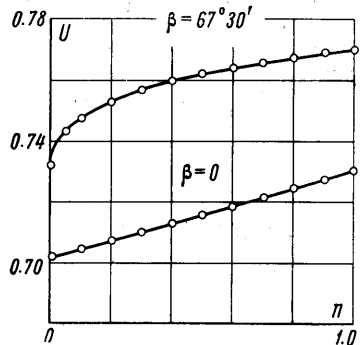
На фиг. 3 представлено изменение осевой составляющей скорости $U = u / V_{\max}$ поперек ударного слоя около конуса с полууглом раствора 20° при $M = 7.0$, вдоль двух лучей, расположенных под углами $\beta = 0$ и $67^\circ 30'$. Полученное по девятилучевой схеме решение практически повторяет решение из работы [1], показанное точками.

На фиг. 4 проведено сравнение вычисленных значений

$$C_p = p / \rho_\infty V_{\max}^2$$

согласно решения с результатами эксперимента из работы [4] (точки) и численным решением, полученным в работе [3] (пунктирная кривая). В этом случае полуугол раствора конуса был равен 10° и $M = 7.95$.

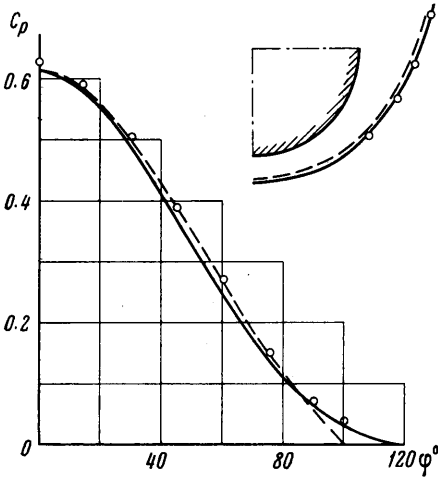
На фиг. 5 показан вид ударных волн и звуковых линий в поле течения около кругового конуса, с полууглом раствора 20° , установленного под различными углами атаки при $M = 7.0$. Полученные решения могут быть продолжены в сверхзвуковую область течения методом характеристик, как было продолжено решение, представленное на фиг. 4. На фиг. 6 показан вид ударных волн и звуковых линий около кругового конуса и конуса с эллиптическим поперечным сечением с отношением осей эллипса, равным двум, при $\alpha = 40^\circ$ и $M = 7.0$.



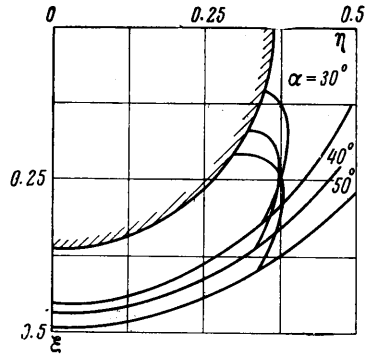
Фиг. 3

Все эти результаты подтверждают, что предположенная схема течения действительно реализуется на больших углах атаки.

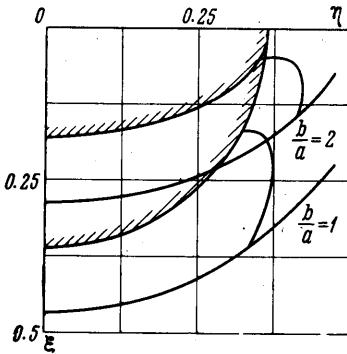
В качестве последнего примера на фиг. 7 показано распределение давления по круговому и эллиптическим конусам при $\alpha = 40^\circ$ и $M=7.0$. Увеличение эксцентрис-



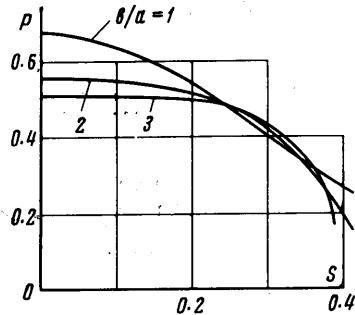
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

тета эллиптического поперечного сечения сопровождается появлением больших градиентов давления и других газодинамических параметров. Одновременно звуковая точка на поверхности тела перемещается ближе к концу большой полуоси эллипса (фиг. 6). Это перемещение соответствует предположению о том, что в предельном случае плоского треугольного крыла звуковая точка на теле располагается точно на передней кромке крыла [2].

Поступило 21 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. Изд-во «Наука», 1964.
2. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П., Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4, стр. 9—28.
3. Eastman D. W., Omar M. E. Flow fields about highly yawed cones by the inverse method. AIAA J. 1965, vol. 3, No. 9, p. 1782—84.
4. Трасу R. R. Hypersonic flow over a yawed circular cone. GALCIT Memo, 1963, 69.
5. Черный Г. Г. Крылья в гиперзвуковом потоке. ПММ, 1965 т. 29, вып. 4, стр. 616—634.