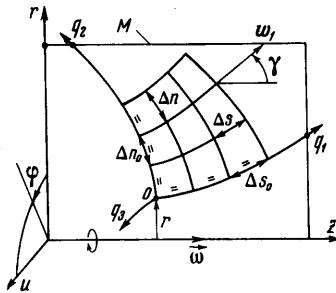


УРАВНЕНИЯ ОСРЕДНЕННОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Я. А. СИРОТКИН (Ленинград)

Математические трудности, возникающие при непосредственном решении нестационарных трехмерных задач гидродинамики, приводят к необходимости обращаться к идеализированным одномерным или двумерным моделям. При этом в полных уравнениях задачи, если они могут быть выписаны, производные по устраняемым координатам не всегда можно полагать равными нулю, если вдоль этих координат (т. е. поперек канала, слоя или основного потока) поток неравномерный. В связи с этим представляется полезным при построении этих моделей полную исходную систему уравнений подвергнуть операции осреднения по соответствующим координатам. Такой подход обычен для гидравлики [1], применяется в теории турбомашин [2], задачах движения в тонком слое [3] и др. В настоящей статье приводится метод осреднения, более общий, чем в работах [1-3]. Так, течение не считается слабоизменяющимся и отмечается, в каких случаях необходимо предположение о тонкости слоя. Обосновывается также введение средней непроницаемой поверхности S_2' в трехмерных каналах (аналогичной гидравлической оси в двумерных каналах).



Фиг. 1

турбомашин для несжимаемой жидкости, хотя этот метод пригоден также для вывода осредненных уравнений широкого класса течений в трубах, трехмерных каналах и слоях разнообразной геометрической формы, включая уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости и магнитной гидродинамики.

Еще Лоренц [6] при записи уравнений осесимметричной задачи теории турбомашин в рамках гипотезы бесконечно большого числа бесконечно тонких лопастей ввел массовые силы воздействия лопастей на поток F . В настоящей работе показано, что эти силы, как и коэффициент стеснения χ при учете конечной толщины лопастей крылатки, появляются в уравнениях задачи в результате введения непроницаемых стенок межлопастных каналов и проведения операции осреднения по шагу решетки между этими стенками. При этом рассматриваются также вопросы определения поверхности S_2' и замыкания системы осредненных уравнений при наличии в них пульсационных членов.

В заключение на примере неподвижной кольцевой решетки осевой турбомашин оценено влияние пульсационных членов на осредненный осесимметричный поток.

1. Вывод осредненных уравнений. Рассмотрим правую ортогональную криволинейную систему координат q_1, q_2, q_3 , вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω около оси z (фиг. 1). В этой системе поверхности $q_3 = \text{const}$ суть полуплоскости, проходящие через ось вращения z (меридианные плоскости M), а поверхности $q_1 = \text{const}$ и $q_2 = \text{const}$ суть поверхности вращения, образующие которых в плоскости M дают криволинейную ортогональную сетку. Для выбранной таким образом системы координат коэффициенты Ламэ

$$H_1 = H_1(q_1, q_2), \quad H_2 = H_2(q_1, q_2), \quad H_3 = r(q_1, q_2), \quad \frac{\partial H_i}{\partial q_3} = 0 \quad i = 1, 2, 3,$$

где r — расстояние от оси z и $q_3 = \varphi$. В связи с этим уравнения движения и неразрывности для такой системы

$$\frac{d'w}{dt} + 2\omega \times w + \omega \times (\omega \times r) = -\frac{\nabla p}{\rho} + f, \quad \nabla \cdot w = 0, \quad \frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \cdot \nabla \quad (1.1)$$

в проекциях на оси q_1, q_2, q_3 при пренебрежении ускорением силы тяжести g имеют вид

$$\frac{Dw_1}{Dt} - \frac{(w_3 + \omega r)^2}{rH_1} \frac{\partial r}{\partial q_1} - \frac{w_2^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{w_1 w_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} + f_1$$

$$\frac{Dw_2}{Dt} - \frac{(w_3 + \omega r)^2}{rH_2} \frac{\partial r}{\partial q_2} - \frac{w_1^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{w_1 w_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} = - \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} + f_2$$

$$\frac{Dw_3}{Dt} + \frac{(w_3 + 2\omega r)}{rH_1 H_2} \left(w_1 H_2 \frac{\partial r}{\partial q_1} + w_2 H_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right) = - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_3 \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{rH_1 H_2} \left[\frac{\partial (rH_2 w_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (rH_1 w_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 w_3)}{\partial \varphi} \right] = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{rH_1 H_2} \left(rH_2 w_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + rH_1 w_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + H_1 H_2 w_3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \mathbf{f} = - \frac{\mathbf{w}}{w} f$$

Здесь $\mathbf{w}(w_1, w_2, w_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ — векторы относительной и абсолютной скорости и их проекции на оси q_1, q_2, φ ; p — давление; ρ — плотность; t — время; $\mathbf{f}(f_1, f_2, f_3)$ — вектор массовых сил трения, направленный противоположно вектору скорости \mathbf{w} , и его составляющие в системе q_1, q_2, φ . При помощи вектора \mathbf{f} , который ниже считается функцией координат и скорости \mathbf{w} , феноменологически учитываются силы трения [2, 4].

Умножая (1.3) на w_1, w_2, w_3 и добавляя результаты соответственно к уравнениям (1.2), получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \nabla \cdot (w_1 \mathbf{w}) - \frac{(w_3 + \omega r)^2}{rH_1} \frac{\partial r}{\partial q_1} - \frac{w_2^2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} + \frac{w_1 w_2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} = - \frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} + f_1$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \nabla \cdot (w_2 \mathbf{w}) - \frac{(w_3 + \omega r)^2}{rH_2} \frac{\partial r}{\partial q_2} - \frac{w_1^2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{w_1 w_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} = - \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} + f_2$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} \nabla \cdot (w_3 \mathbf{w}) + \frac{(w_3 + 2\omega r)}{r} \left(\frac{w_1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q_1} + \frac{w_2}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q_2} \right) = - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_3 \quad (1.4)$$

Для вывода уравнений осредненного течения в каком-либо канале произвольной формы необходимо систему (1.3), (1.4) проинтегрировать с переменными пределами, учитывающими геометрическую форму этого канала, которая может зависеть и не зависеть от времени t . В результате будут получены нестационарные или стационарные уравнения одномерной или двумерной гидравлики в зависимости от того, будет ли проведено интегрирование по двум координатам или одной.

Здесь будет проведено осреднение системы (1.3), (1.4) для получения уравнений осредненного осесимметричного (двумерного) вихревого течения в крылатке рабочего колеса турбомшины, которая располагается в кольцевой трубе, образованной вращением двух криволинейных образующих. Крылатка содержит N одинаковых лопастей конечной в окружном направлении толщины $s'(q_1, q_2)$, так что коэффициент стеснения межлопастного канала $\chi(q_1, q_2) = 1 - (s'N/2\pi r)$. Межлопастной канал крылатки ограничен следующими друг за другом в направлении вращения поверхностями Φ_- и Φ_+ (фиг. 2) двух смежных лопастей. Уравнения этих поверхностей в предположении, что они не зависят от времени, имеют вид

$$\varphi = \Phi_-(q_1, q_2), \quad \varphi = \Phi_+(q_1, q_2) = \Phi_-(q_1, q_2) + \theta \chi(q_1, q_2), \quad \Phi_{\pm} \in C^{(1)}, \quad \theta = 2\pi/N \quad (1.5)$$

Здесь $\theta \chi$ — угловая толщина слоя (канала).

Из условия непроницаемости этих поверхностей следует, что

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})_{\pm} = E_{\pm}^{-1} \left(\frac{w_1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \frac{w_2}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} - \frac{w_3}{r} \right) = 0 \quad (1.6)$$

Здесь нормаль к поверхностям Φ_+ и Φ_-

$$\mathbf{v}_{\pm} = - \frac{\nabla [\varphi - \Phi_{\pm}(q_1, q_2)]}{E_{\pm}}, \quad \nabla = \frac{\mathbf{i}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{i}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{i}_3}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.7)$$

$$E_{\pm} = \left[\left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi_{\pm}}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi_{\pm}}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]^{1/2} \neq 0$$

В связи с тем, что $\partial H_i / \partial \varphi = 0$ ($i = 1, 2, 3$), осреднение по φ (по шагу решетки) можно проводить для слоя произвольной толщины, т. е. для любого числа лопастей в крылатке; если же коэффициенты Ламэ зависели бы и от третьей переменной $q_3 = \varphi$, то потребовалось бы сделать дополнительное предположение о тонкости слоя [3], как

это обычно делается при выводе осредненных уравнений на осесимметричных поверхностях тона S_1' с тонким слоем переменной толщины $h(q_1, q_2, t)$.

Каждую из входящих в уравнения системы (1.3), (1.4) функций $B(q_1, q_2, \varphi, t)$ будем представлять в виде суммы средней $\langle B(q_1, q_2, t) \rangle$ и пульсационной $B'(q_1, q_2, \varphi, t)$ величин

$$B(q_1, q_2, \varphi, t) = \langle B(q_1, q_2, t) \rangle + B'(q_1, q_2, \varphi, t). \quad (1.8)$$

Здесь

$$\langle B(q_1, q_2, t) \rangle = \frac{1}{\theta\chi(q_1, q_2)} \int_{\Phi_-(q_1, q_2)}^{\Phi_+(q_1, q_2)} B(q_1, q_2, \varphi, t) d\varphi \quad (1.9)$$

— обычная средняя интегральная величина, а $B(q_1, q_2, \varphi, t)$ — однозначная ограниченная интегрируемая функция, непрерывная вместе со своими первыми производными. Очевидны свойства принятого закона осреднения

$$\begin{aligned} \langle\langle B \rangle\rangle &= \langle B \rangle, & \langle B' \rangle &= 0, & \langle A + B \rangle &= \langle A \rangle + \langle B \rangle, & \langle\langle A \rangle B \rangle &= \langle A \rangle \langle B \rangle, \\ \langle AB \rangle &= \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A'B' \rangle, & \left\langle \frac{\partial B}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t}, & \left\langle \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right\rangle &= \frac{B_+ - B_-}{\theta\chi} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Дифференцирование $\langle B \rangle$ по q_i ($i = 1, 2$) с учетом переменных пределов в (1.9) дает

$$\left\langle \frac{\partial B}{\partial q_i} \right\rangle = \frac{1}{\chi} \frac{\partial(\chi \langle B \rangle)}{\partial q_i} - \frac{1}{\theta\chi} \left(B_+ \frac{\partial \Phi_+}{\partial q_i} - B_- \frac{\partial \Phi_-}{\partial q_i} \right) \quad (1.11)$$

Осредняя выражение $DB/Dt = \partial B/\partial t + \nabla \cdot (Bw)$ с учетом (1.9)–(1.11), получаем

$$\left\langle \frac{DB}{Dt} \right\rangle = \frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle Bw \rangle) - \frac{1}{\theta\chi} [(BEv \cdot w)_+ - (BEv \cdot w)_-]$$

Здесь, в силу (1.6), выражение в квадратной скобе обращается в нуль, и с учетом (1.10) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DB}{Dt} \right\rangle &= \frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t} + \langle \nabla' \cdot (Bw) \rangle = \frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle B \rangle \langle w \rangle) + \frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle B'w \rangle) \\ \nabla' \cdot (BA) &= \frac{1}{rH_1H_2} \left[\frac{\partial(rH_2BA_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(rH_1BA_2)}{\partial q_2} \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Особое внимание следует уделить осреднению производных от p , находящихся в правых частях уравнений (1.4). Для них, в соответствии с (1.10)–(1.11), имеем

$$\left\langle \frac{\partial p}{\partial q_i} \right\rangle = \frac{1}{\chi} \frac{\partial(\chi \langle p \rangle)}{\partial q_i} - \frac{1}{\theta\chi} \left(p_+ \frac{\partial \Phi_+}{\partial q_i} - p_- \frac{\partial \Phi_-}{\partial q_i} \right), \quad \left\langle \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{p_+ - p_-}{\theta\chi} \quad (i=1, 2) \quad (1.13)$$

Введем теперь некоторую фиксированную среднюю межлопаственную поверхность

$$\varphi = \Phi(q_1, q_2) \quad (1.14)$$

которую обозначим через S_2' и будем предполагать непроницаемой для осредненного вектора скорости $\langle w \rangle$, т. е.

$$v \cdot \langle w \rangle = \frac{1}{E} \left(\frac{\langle w_1 \rangle}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \frac{\langle w_2 \rangle}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} - \frac{\langle w_3 \rangle}{r} \right) = 0, \quad v = - \frac{\nabla[\varphi - \Phi(q_1, q_2)]}{E} \quad (1.15)$$

В работах [2, 3] делаются некоторые предположения в отношении правой части (1.13); отказываясь здесь от них, выделим ту часть правых частей в (1.13), которая нормальна к поверхности (1.14). Для этого введем обозначения

$$\operatorname{ctg} \beta_{\pm} = \frac{r}{H_1} \frac{\partial \Phi_{\pm}}{\partial q_1}, \quad \operatorname{tg} \delta_{\pm} = \frac{r}{H_2} \frac{\partial \Phi_{\pm}}{\partial q_2}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{r}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{r}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}$$

и представим

$$\operatorname{ctg} \beta_{\pm} = \operatorname{ctg}(\beta + \beta_{\pm}'), \quad \operatorname{tg} \delta_{\pm} = \operatorname{tg}(\delta + \delta_{\pm}') \quad (1.16)$$

где β_{\pm} , δ_{\pm} , β и δ — углы наклона поверхностей (1.5) и (1.14); углы β измеряются на поверхностях $q_2 = \text{const}$ от направления вращения, а δ — на поверхностях $q_1 = \text{const}$ от меридианной плоскости в направлении вращения (фиг. 2).

Преобразуем теперь (1.13) с учетом (1.8) и (1.16)

$$\left\langle \frac{\partial p}{\partial q_1} \right\rangle = \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial q_1} + \frac{\langle p \rangle}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial q_1} - \frac{H_1}{r\theta\chi} [p_+(\text{ctg } \beta + \beta_+) - p_-(\text{ctg } \beta + \beta_-)] = \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial q_1} +$$

$$+ \frac{\langle p \rangle}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial q_1} - \frac{p_+ - p_-}{r\theta\chi} H_1 \text{ctg } \beta - \frac{\langle p \rangle H_1}{r\theta\chi} (\beta_+ - \beta_-) - \frac{H_1}{r\theta\chi} (p_+ \beta_+ - p_- \beta_-)$$

Учтем, что

$$\beta_+ - \beta_- = \text{ctg } \beta_+ - \text{ctg } \beta_- = \frac{r}{H_1} \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial q_1} + \theta \frac{\partial \chi}{\partial q_1} - \frac{\partial \Phi_+}{\partial q_1} \right) = \frac{r\theta}{H_1} \frac{\partial \chi}{\partial q_1}$$

В дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением:

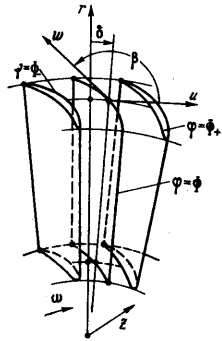
$$\mathbf{F} = - \frac{p_+ - p_-}{r\theta\chi\rho} \nabla [\varphi - \Phi(q_1, q_2)] \quad (1.17)$$

Тогда окончательно вместо (1.13) получим

$$\frac{1}{\rho H_1} \left\langle \frac{\partial p}{\partial q_1} \right\rangle = \frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial q_1} - F_1 - \frac{(p'_\beta)_+ - (p'_\beta)_-}{r\theta\chi\rho}$$

$$\frac{1}{\rho H_2} \left\langle \frac{\partial p}{\partial q_2} \right\rangle = \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial q_2} - F_2 - \frac{(p'_\delta)_+ - (p'_\delta)_-}{r\theta\chi\rho} \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{r\rho} \left\langle \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right\rangle = -F_3 \quad \left(F_3 = \frac{p_+ - p_-}{r\theta\chi\rho} \right)$$



Фиг. 2

Из (1.17) и (1.18) очевидно, что вектор \mathbf{F} будет нормальным к поверхности (1.14), т. е.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{F} = 0, \text{ или } F_1 = -F_3 \text{ctg } \beta, F_2 = -F_3 \text{tg } \delta. \quad (1.19)$$

Из (1.18) видно, что при преобразовании (1.13) выделена главная, нормальная к поверхности (1.14) часть \mathbf{F} ; оставшиеся в правых частях (1.18) последние слагаемые представляют собой квадратичные пульсационные члены, так как β_{\pm} и δ_{\pm} имеют порядок пульсаций первого порядка.

Осредняя уравнения (1.3), (1.4) с учетом (1.8)–(1.10), (1.12), (1.18) и учитывая, что при $B = 1$ из (1.12) следует уравнение неразрывности $\nabla' \cdot (\chi \langle \mathbf{w} \rangle) = 0$ и

$$\frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle B \rangle \langle \mathbf{w} \rangle) = \frac{\langle B \rangle}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle \mathbf{w} \rangle) + (\langle \mathbf{w} \rangle \cdot \nabla') \langle B \rangle = (\langle \mathbf{w} \rangle \cdot \nabla') \langle B \rangle \quad (1.20)$$

$$\langle \mathbf{w} \rangle \cdot \nabla' = \frac{d}{dt} = \frac{\langle w_1 \rangle}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\langle w_2 \rangle}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2}$$

получаем уравнения неустановившегося осесимметричного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости в крылатке рабочего колеса турбомашин

$$\frac{\partial \langle w_1 \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{w} \rangle \cdot \nabla') \langle w_1 \rangle - \frac{(\langle w_3 \rangle + \omega r)^2}{r H_1} \frac{\partial r}{\partial q_1} - \frac{\langle w_2 \rangle^2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} +$$

$$+ \frac{\langle w_1 \rangle \langle w_2 \rangle}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} = - \frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial q_1} + F_1 + \langle f_1 \rangle + R_1$$

$$\frac{\partial \langle w_2 \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{w} \rangle \cdot \nabla') \langle w_2 \rangle - \frac{(\langle w_3 \rangle + \omega r)^2}{r H_2} \frac{\partial r}{\partial q_2} - \frac{\langle w_1 \rangle^2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} +$$

$$+ \frac{\langle w_1 \rangle \langle w_2 \rangle}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} = - \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial q_2} + F_2 + \langle f_2 \rangle + R_2 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \langle w_3 \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{w} \cdot \nabla' \rangle \langle w_3 \rangle + \frac{(\langle w_3 \rangle + 2\omega r)}{r} \langle \mathbf{w} \cdot \nabla' \rangle r = F_3 + \langle f_3 \rangle + R_3$$

$$\frac{\partial (r\chi H_2 \langle w_1 \rangle)}{\partial q_1} + \frac{\partial (r\chi H_1 \langle w_2 \rangle)}{\partial q_2} = 0, \quad \nabla' = \frac{\mathbf{i}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{i}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \quad (1.22)$$

Полные выражения для квадратичных пульсационных членов имеют вид

$$R_1 = -\frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle w_1' w_1' \rangle) + \frac{\langle w_3'^2 \rangle}{r H_1} \frac{\partial r}{\partial q_1} + \frac{\langle w_2'^2 \rangle}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} -$$

$$-\frac{\langle w_1' w_2' \rangle}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{(p' \beta')_+ - (p' \beta')_-}{r \theta \chi \rho}$$

$$R_2 = -\frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle w_2' w_2' \rangle) + \frac{\langle w_3'^2 \rangle}{r H_2} \frac{\partial r}{\partial q_2} + \frac{\langle w_1'^2 \rangle}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} -$$

$$-\frac{\langle w_1' w_2' \rangle}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} + \frac{(p' \delta')_+ - (p' \delta')_-}{r \theta \chi \rho} \quad (1.23)$$

$$R_3 = -\frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle w_3' w_3' \rangle) - \frac{\langle w_1' w_3' \rangle}{r H_1} \frac{\partial r}{\partial q_1} - \frac{\langle w_2' w_3' \rangle}{r H_2} \frac{\partial r}{\partial q_2}$$

Система (1.21), (1.22), (1.15), (1.19) замкнутая, так как содержит семь уравнений и столько же неизвестных $\langle \mathbf{w} \rangle$, F , p , если считать форму поверхности S_2' заданной (прямая задача) и пренебречь силой трения $\langle \mathbf{f} \rangle$ и пульсационными членами. Учет последних связан с решением задачи также на осесимметричных поверхностях S_1' ; поочередное решение задач на поверхностях S_2' и S_1' в принципе позволяет учесть конечное число лопастей конечной толщины в крылатке.

Предположим, что осредненный осесимметричный поток в крылатке рабочего колеса квазиустановившийся, т. е. $\partial \langle w_i \rangle / \partial t = 0$, ($i = 1, 2, 3$), и введем осредненную обобщенную полную энергию в относительном потоке

$$\langle H \rangle = \frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle w \rangle^2 - (\omega r)^2}{2} + \frac{\langle w'^2 \rangle}{2} \quad (1.24)$$

Тогда, исключая $\langle p \rangle$ из системы (1.21) при помощи дифференцирования (1.24) по q_1 и q_2 , получаем

$$\langle w_2 \rangle \langle \Omega_3 \rangle - \langle w_3 \rangle \langle \Omega_2 \rangle = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial q_1} - F_1 - \langle f_1 \rangle - R_1 - \frac{1}{2H_1} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial q_1} \quad (1.25)$$

$$\langle w_3 \rangle \langle \Omega_1 \rangle - \langle w_1 \rangle \langle \Omega_3 \rangle = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial q_2} - F_2 - \langle f_2 \rangle - R_2 - \frac{1}{2H_2} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial q_2} \quad (1.26)$$

$$\langle w_1 \rangle \langle \Omega_2 \rangle - \langle w_2 \rangle \langle \Omega_1 \rangle = -F_3 - \langle f_3 \rangle - R_3 \quad (1.27)$$

Здесь компоненты вихря

$$\langle \Omega_1 \rangle = \frac{1}{r H_2} \frac{\partial (\langle c_3 \rangle r)}{\partial q_2} = \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial \langle w_3 \rangle}{\partial q_2} + \frac{\langle w_3 \rangle + 2\omega r}{r} \frac{\partial r}{\partial q_2} \right)$$

$$\langle \Omega_2 \rangle = -\frac{1}{r H_1} \frac{\partial (\langle c_3 \rangle r)}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial \langle w_3 \rangle}{\partial q_1} + \frac{\langle w_3 \rangle + 2\omega r}{r} \frac{\partial r}{\partial q_1} \right) \quad (1.28)$$

$$\langle \Omega_3 \rangle = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial (\langle w_2 \rangle H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (\langle w_1 \rangle H_1)}{\partial q_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial \langle w_2 \rangle}{\partial q_1} + \langle w_2 \rangle \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} \right) - \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial \langle w_1 \rangle}{\partial q_2} + \langle w_1 \rangle \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} \right)$$

$$\langle c_3 \rangle = \langle w_3 \rangle + \omega r$$

Для получения уравнений вихрей подставим в (1.26) величину F_3 из (1.27) с учетом (1.15), (1.19) и (1.28)

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta}{rH_2} \frac{\partial(\langle c_3 \rangle r)}{\partial q_2} - \frac{\operatorname{tg} \delta}{rH_1} \frac{\partial(\langle c_3 \rangle r)}{\partial q_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(\langle w_2 \rangle H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(\langle w_1 \rangle H_1)}{\partial q_2} \right) = \\ = \frac{1}{\langle w_1 \rangle} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial q_2} - \langle f_2 \rangle - \langle f_3 \rangle \operatorname{tg} \delta - R \right), \quad R = R_2 + R_3 \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{2H_2} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial q_2} \quad (1.29)$$

Система (1.15), (1.22), (1.29) также замкнутая, ибо содержит только три неизвестные величины $\langle w \rangle$, если, конечно, задана поверхность S_2' и $\langle f \rangle$ выражается через заданные величины и $\langle w \rangle$, а пульсационные члены не учитываются или определяются из решения задач на поверхностях S_1' . При введении обычным путем функции тока $\psi(q_1, q_2)$ после несложных преобразований эта система сводится к одному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка, которое в естественной и цилиндрической системах координат приводится, например, под номерами (1.23) и (1.25) в работе [7].

Итак, благодаря введению ограничивающих стенок межлопастного канала (1.5) и проведения операции осреднения в уравнениях движения появились массовые силы F воздействия этих стенок (лопастей) на осредненный по шагу решетки осесимметричный поток, а также коэффициент стеснения χ и пульсационные члены R , а в уравнении неразрывности — только коэффициент χ . При этом были сделаны вполне естественные предположения.

- 1) О непроницаемости поверхностей Φ_- и Φ_+ (1.6).
- 2) О независимости поверхностей Φ_- , Φ_+ и χ от времени t (это предположение в случае необходимости можно опустить [3]).
- 3) О введении непроницаемой для $\langle w \rangle$ средней межлопастной поверхности S_2' (1.14), которое позволило выделить главную нормальную к S_2' часть массовых сил воздействия лопастей (стенок) на поток (1.17).
- 4) О квазиустановившемся характере осредненного осесимметричного течения в крылатке рабочего колеса турбомашин. Последнее предположение, как и второе, в случае необходимости рассматривать неустановившееся течение можно опустить, но тогда надо вместо системы (1.25) — (1.27) рассматривать систему (1.21), (1.22), которая получит некоторые видоизменения в связи с появлением дополнительной переменной t .

Никаких дополнительных предположений, отмеченных в работах [1–3], при этом не нужно, т. е. кривизна поверхностей S_2' , Φ_{\pm} может быть произвольной, а течение — быстро изменяющимся.

Если же коэффициенты Ламэ зависят от координаты, по которой проводится осреднение (например, при выводе уравнений течения на осесимметричной поверхности тока S_1'), то необходимо сделать только одно дополнительное предположение о тонкости слоя.

Отметим еще, что если осреднение проводится для уравнений течения сжимаемой жидкости, то, помимо указанных выше предположений, необходимо сделать еще одно дополнительное — о малости пульсаций p' , ρ' и температуры T' по сравнению с $\langle p \rangle$, $\langle \rho \rangle$ и $\langle T \rangle$.

2. Учет квадратичных пульсационных членов и определение поверхности S_2' . При решении прямой задачи нет необходимости определять среднюю поверхность тока S_2' , достаточно знать только углы ее наклона β и δ . Решая обратную задачу, необходимо, однако, определять и поверхность S_2' . Очевидно, что определение углов наклона поверхности S_2' при решении прямой и обратной задач тесно связано с учетом пульсаций.

Прежде всего покажем, что, кроме одного предельного случая, уравнение Бернулли выполняется только с точностью до пульсаций, в связи с чем в общем случае осесимметричные поверхности S_1' совпадают с поверхностями Бернулли ($\langle H \rangle = \text{const}$) также только с точностью до пульсаций. Действительно, для случая конечного числа лопастей конечной толщины в крылатке из (1.19) следует, что $\operatorname{ctg} \beta = -F_1/F_3$ и $\operatorname{tg} \delta = -F_2/F_3$. Умножая эти выражения соответственно на $\langle w_1 \rangle$ и $\langle w_2 \rangle$ и вычитая слева и справа из суммы этих произведений $\langle w_3 \rangle$, получаем с учетом (1.15) и (1.19)

$$\langle w_1 \rangle \operatorname{ctg} \beta + \langle w_2 \rangle \operatorname{tg} \delta - \langle w_3 \rangle = - \frac{\langle w \rangle \cdot F}{F_3} = 0 \quad (2.1)$$

в силу чего умножение уравнений (1.25) — (1.27) соответственно на $\langle w_1 \rangle$, $\langle w_2 \rangle$, $\langle w_3 \rangle$ и суммирование их дает

$$\frac{d \langle H \rangle}{dt} = \langle w \rangle \cdot \langle f \rangle + \langle w \rangle \cdot R + \frac{1}{2} \frac{d \langle w'^2 \rangle}{dt} \quad (2.2)$$

Для учета сил трения $\langle f \rangle$ полную энергию на входе в крылатку (в канал) обозначим через $\langle H_0 \rangle$ и введем гидравлический коэффициент потерь $\xi = \xi(q_1, q_2)$, отнесенный к среднему скоростному напору на входе в крылатку $1/2 c_0^2$. Тогда осредненная касательная сила трения

$$\langle f \rangle = - \frac{\langle w \rangle}{\langle w \rangle} \langle f \rangle = - \frac{c_0^2 \langle w \rangle}{2 \langle w \rangle^2} \frac{d\xi}{dt}$$

Отсюда

$$\langle w \rangle \cdot \langle f \rangle = -1/2 c_0^2 d\xi / dt$$

Поэтому (2.2) можно привести к виду

$$\frac{d\langle H_0 \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\langle H \rangle + \frac{\xi c_0^2}{2} \right) = \langle w \rangle \cdot R + \frac{1}{2} \frac{d\langle w'^2 \rangle}{dt} \quad (2.3)$$

Отметим, что вместо (2.2) или (2.3) можно использовать уравнение

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = \langle w \rangle \cdot \langle f \rangle - \frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle w' H' \rangle)$$

$$H' = \frac{p'}{\rho} + w_1' \langle w_1 \rangle + w_2' \langle w_2 \rangle + w_3' \langle w_3 \rangle \quad \langle f' \rangle = 0 \quad (2.4)$$

которое получается в результате умножения уравнения движения (1.1) скалярно на $\langle w \rangle$ и последующего осреднения и предположения о квазиустановившемся характере течения. Из (2.2) и (2.4) видно, что даже при $\langle f \rangle = 0$ уравнение Бернулли для $\langle H \rangle$ при сделанных предположениях (1.15) и (1.19) выполняется с точностью до квадратичных пульсационных членов и только в предельном случае бесконечно большого числа бесконечно тонких лопастей в крылатке ($\chi = 1$, $\langle f \rangle = R = d\langle w'^2 \rangle / dt = 0$) имеем точно $d\langle H \rangle / dt = \mathbf{v} \cdot \langle w \rangle = \langle w \rangle \cdot \mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{F} = 0$.

Именно такой предельный случай был рассмотрен Лоренцем [6]. Если же в крылатке конечное число лопастей, но они бесконечно тонкие ($\chi = 1$), то необходимо прибегать к аналогичным для случая конечного числа лопастей предположениям, причем в связи с наличием в уравнениях движения пульсационных членов опять получаются соотношения типа (2.1) и (2.2). Кроме того, очевидно, что для любого случая конечного числа лопастей поверхность S_2' будет вихревой при $\langle H \rangle = \text{const}$ и $\langle f \rangle = 0$ также только с точностью до квадратичных пульсационных членов [5, 7].

Из-за наличия в системе (1.15), (1.22), (1.29) квадратичных пульсационных членов она оказывается незамкнутой. В уравнениях гидравлики [1] и течения в тонком слое [3] пульсации обычно отбрасываются, однако в первом случае для учета неравномерности параметров в нормальном к основному потоку сечению вводятся из опыта или других соображений коэффициенты этой неравномерности. В задачах теории турбомашин пренебрежение пульсациями (неравномерностью потока по шагу решетки) может быть недопустимым, в связи с чем для учета квадратичных пульсационных членов можно прибегнуть к методу последовательных приближений [2]. В первом приближении при решении прямой осесимметричной задачи поверхность S_2' и стеснение $\chi \neq 1$ задаются заранее, и в результате решения этой задачи без учета пульсаций определяются образующие осесимметричных поверхностей S_1' . После решения задачи об обтекании решеток на этих поверхностях в слоях переменной толщины $h(q_1)$ находятся пульсационные члены для уравнений (1.26), (1.27) и определяются углы δ и β для второго приближения по формулам

$$\text{tg } \delta^{(2)} = - \frac{F_2}{F_3}, \quad \text{ctg } \beta^{(2)} = \frac{\langle w_3 \rangle - \langle w_2 \rangle \text{tg } \delta^{(2)}}{\langle w_1 \rangle}$$

в которых F_2 и F_3 определяются из уравнений (1.26) и (1.27) с учетом пульсационных членов, что обеспечивает выполнение уравнения Бернулли с точностью до этих пульсаций. После этого решается уже с учетом пульсаций прямая осесимметричная задача во втором приближении, потом — опять на S_1' и так далее до тех пор, пока формы поверхностей S_1' и S_2' не перестанут меняться при переходе от предыдущего приближения к следующему.

В первом приближении, когда не учитываются пульсации, система (1.15), (1.22), (1.29) замкнутая, потому что, в силу (2.3), в уравнении (1.29)

$$\frac{1}{\langle w_2 \rangle H_2} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial q_2} = r\chi \frac{d\langle H_0 \rangle}{d\psi} - \frac{c_0^2}{2 \langle w_2 \rangle H_2} \frac{d\xi}{dq_2} \quad (2.5)$$

где $\langle H_0(\psi) \rangle$ на входе в крылатку обычно задается. Во втором и следующих приближениях, когда учитываются пульсации, для замыкания этой системы к ней следует присоединить уравнение (2.2) или (2.3), так как из-за наличия в нем пульсаций замена (2.5) в (1.29) уже недопустима. Однако с целью упрощения задачи замена (2.5) часто используется и при учете пульсаций; это означает, что не учитываются пульсации только в одном из уравнений: (2.2) или (2.3).

Система (1.15), (1.22), (1.29) в цилиндрической системе координат

$$H_1 = H_2 = 1, \quad H_3 = r, \quad q_1 = z, \quad q_2 = r, \quad q_3 = \varphi, \quad \langle w_1 \rangle = \langle w_z \rangle, \\ \langle w_2 \rangle = \langle w_r \rangle, \quad \langle w_3 \rangle = \langle w_u \rangle, \quad \langle c_s \rangle = \langle c_u \rangle$$

принимает вид

$$\frac{\text{ctg } \beta}{r} \frac{\partial \langle c_u \rangle}{\partial r} - \frac{\text{tg } \delta}{r} \frac{\partial \langle c_u \rangle}{\partial z} - \left(\frac{\partial \langle w_r \rangle}{\partial z} - \frac{\partial \langle w_z \rangle}{\partial r} \right) = \\ = \frac{1}{\langle w_z \rangle} \left(\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial r} - \langle f_r \rangle - \text{tg } \delta \langle f_u \rangle - R \right) \\ \frac{\partial (r\chi \langle w_r \rangle)}{\partial r} + \frac{\partial (r\chi \langle w_z \rangle)}{\partial z} = 0, \quad \langle w_u \rangle = \langle w_z \rangle \text{ctg } \beta + \langle w_r \rangle \text{tg } \delta \quad (2.6)$$

а в естественной

$$H_1 = \Delta s / \Delta s_0, \quad H_2 = \Delta n / \Delta n_0, \quad H_3 = r, \quad q_1 = s, \quad q_2 = n, \\ q_3 = \varphi, \quad \langle w_1 \rangle = \langle w_s \rangle, \quad \langle w_2 \rangle = 0, \quad \langle w_3 \rangle = \langle w_u \rangle, \quad \langle c_s \rangle = \langle c_u \rangle$$

(в этой системе линии $n = \text{const}$ — суть меридианные линии тока, а линии $s = \text{const}$ — ортогональные к ним кривые) будем иметь

$$\frac{\text{ctg } \beta}{rH_2} \frac{\partial \langle c_u \rangle}{\partial n} - \frac{\text{tg } \delta}{rH_1} \frac{\partial \langle c_u \rangle}{\partial s} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial \langle w_s \rangle H_1}{\partial n} = \\ = \frac{1}{\langle w_s \rangle} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial n} - \text{tg } \delta \langle f_u \rangle - R \right), \quad \frac{\partial (r\chi H_2 \langle w_s \rangle)}{\partial s} = 0, \quad \langle w_u \rangle = \langle w_s \rangle \text{ctg } \beta$$

В этой системе

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial n} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial s} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \gamma}{\partial n}, \quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial s} = \sin \gamma, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial r}{\partial n} = \cos \gamma$$

Здесь γ — угол между касательной к линиям $n = \text{const}$ и осью z , т. е.

$$\langle w_z \rangle = \langle w_s \rangle \cos \gamma, \quad \langle w_r \rangle = \langle w_s \rangle \sin \gamma.$$

В случае осевых турбомашин часто полагают, что $\delta = 0$ и $\langle f \rangle = 0$, тогда $F_r = 0$, в результате чего система (2.6) упрощается и после несложных преобразований сводится к одному эллиптическому уравнению в частных производных второго порядка относительно

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (1 + \text{ctg}^2 \beta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left[\frac{1}{2r^2} \frac{\partial (r \text{ctg } \beta)^2}{\partial r} - (1 + \text{ctg}^2 \beta) \frac{\partial \ln (r\chi)}{\partial r} \right] \frac{\partial \psi}{\partial r} - \\ - \frac{\partial \ln (r\chi)}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} = (r\chi)^2 \frac{d \langle H \rangle}{d\psi} - 2\omega r\chi \text{ctg } \beta + R_r \quad (2.7)$$

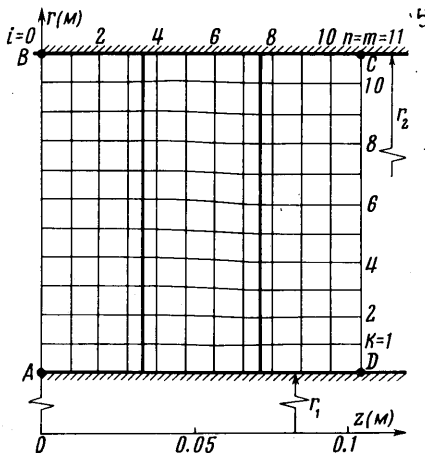
$$R_r = \frac{r\chi}{\langle w_z \rangle} \left[\frac{1}{\chi} \nabla' \cdot (\chi \langle w_r' w' \rangle) - \frac{\langle w_u'^2 \rangle}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} \right]$$

3. Пример расчета. Для оценки влияния квадратичных пульсационных членов на осредненный осесимметричный поток рассмотрим конкретный числовой пример течения идеальной несжимаемой жидкости в неподвижной ($\omega = 0$) кольцевой турбинной решетке с прямолинейными и параллельными оси z образующими при $D/l = 4.64$ ($D = r_1 + r_2, l = r_2 - r_1, r_1 = 0.19025$ м, фиг. 3).

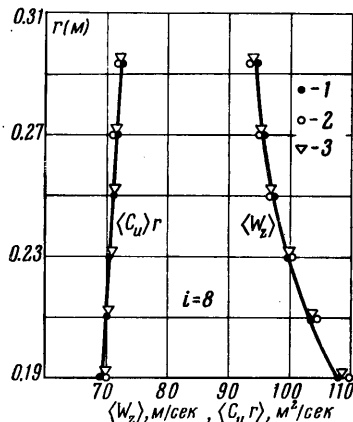
Решетка образована из 38 незакрученных лопаток постоянного вдоль радиуса сечения. Предполагалось, что $\langle H \rangle = \text{const}$, $\chi \neq 1$, $\langle f \rangle = 0$ и в первом приближении $\delta^{(1)} = 0$. Относительный шаг \bar{i} менялся от корня к периферии от 0.579 до 0.861, а коэффициент стеснения χ от 0.58 до 0.873. В первом приближении квадратичные пульсационные члены не учитывались ($R_r^{(1)} = 0$) и углы задаваемой поверхности S_2' определялись по формуле $\beta^{(1)} = 1/2(\beta_- + \beta_+)$.

При этих условиях решалась прямая осесимметричная задача для квадрата $ABCD$, краевые условия для линейного эллиптического уравнения (2.7) смешанного типа: $\psi = 0$ на AD , $\psi = \psi_m = 2.5$ на BC , $\partial\psi/\partial z = 0$ на AB и CD .

Эта задача решалась методом сеток на БЭСМ-2М¹, сетка была квадратной, число внутренних узлов $(n-1) \times (m-1) = 100$, $n = m = 11$. После этого при помощи той же программы решалась задача Дирихле для течения в межлопаточных каналах



Фиг. 3



Фиг. 4

на трех поверхностях типа S_1' , расположенных на корневом ($r = r_1$), среднем [$r = 1/2(r_1 + r_2)$] и периферийном ($r = r_2$) радиусах. По данным этого решения на S_2' вычислялся пульсационный член в (2.7) и новые значения углов $\beta^{(2)}$ и $\delta^{(2)}$ по формулам $\text{ctg } \beta^{(2)} = \langle w_u \rangle / \langle w_z \rangle$ и $\text{tg } \delta^{(2)} = -F_r / F_u$. Величины $\langle w_r \rangle$ и $\delta^{(2)}$ оказались пренебрежимо малыми и потому не учитывались ($|\delta^{(2)}| < 5^\circ$). После этого опять решалась прямая осесимметричная задача с новыми значениями углов $\beta^{(2)}$ при учете и без учета пульсаций $R_r^{(2)}$.

Результаты расчетов нанесены в виде меридианных линий тока первого приближения на фиг. 3. Линии тока второго приближения при $R_r^{(2)} \neq 0$ сместились к оси z , причем максимальное смещение вблизи центра квадрата $ABCD$ оказалось равным всего лишь 10^{-3} м. Линии тока второго приближения при $R_r^{(2)} = 0$ проходят посередине между двумя упомянутыми линиями тока. Заметное изменение (до 5°) получили только углы β в сечениях $i = 5 \div 7$. Соответственно почти не отличаются также величины $\langle w_z \rangle$ и $\langle C_u \rangle r$, вычисленные для этих трех случаев и приведенные на фиг. 4

$$[1 - R_r^{(1)} = 0, \quad 2 - R_r^{(2)} \neq 0, \quad 3 - R_r^{(2)} = 0]$$

В рассмотренном примере относительное удлинение лопастей было взято характерным для тепловых осевых турбомашин. Из полученных результатов расчета можно сделать предварительный вывод, что для учета конечного числа лопастей в тепловых осевых турбомашинах можно пренебречь квадратичными пульсационными членами и достаточно учесть лишь изменение формы поверхностей S_1' и S_2' при переходе от предыдущего приближения к последующему. В гидравлических турбомашинах с меньшим числом относительно менее длинных лопастей влияние пульсационных членов будет более существенным. Для более полного решения этого вопроса необходимо выполнить цикл аналогичных расчетов для разных типов турбомашин. В результате можно будет упростить задачу определения углов поверхности S_2' и пульсаций в последующих приближениях. Целью такого упрощения должно быть уменьшение объема вычислений.

Автор благодарит Г. Ю. Степанова за весьма полезное обсуждение.

Поступило 28 I 1966

¹ Программа составлена В. В. Чернюговым под руководством Л. А. Оганесяна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург И. П. Прикладная гидрогазодинамика. Изд. Ленингр. ун-та, 1958.
2. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. Физматгиз, 1962.
3. Васильев О. Ф., Хапилова Н. С. Уравнения движения тонкого слоя жидкости по поверхности вращающегося тела вращения. ПМТФ, 1965, № 3.
4. Сироткин Я. А. К постановке прямой задачи вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашине. Инж. ж., 1963, № 2.
5. Сироткин Я. А. К постановке двумерных задач вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашине. Инж. ж., 1964, № 2.
6. Logenz H. Neue Theorie und Berechnung der Kreisräder. Berlin, 1906.
7. Сироткин Я. А. К постановке обратной осесимметричной задачи вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости в турбомашине. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА
В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ**

В. И. ПОЛЕЖАЕВ (Москва)

Приводится разностная схема, излагаются результаты численного решения системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Решение стационарной задачи осуществляется в результате установления при $t \rightarrow \infty$.

Рассматриваются течение и перенос тепла при естественной конвекции в сжимаемом газе, заключенном в замкнутой прямоугольной области между двумя вертикальными стенками с различными температурами и теплоизолированными основаниями. В результате численного решения получены значения средней теплопередачи и картина возникновения и развития вторичных течений при больших числах Грасгофа.

1. Система двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого вязкого теплопроводного газа состоит из уравнений количества движения, неразрывности и энергии, которые запишем в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\kappa \rho C_M^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \\
 &+ \frac{1}{\rho C_R} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - C_{F_x} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\kappa \rho C_M^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \\
 &+ \frac{1}{\rho C_R} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - C_{F_y} \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\kappa}{\rho c_v C_R P} \left(\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \\
 &- \frac{\rho C_1}{\rho c_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\mu C_e}{\rho c_v C_R} \Phi \\
 \Phi &= 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь t — время; u, v — проекции вектора скорости V на оси координат x, y соответственно; p — давление; ρ — плотность; T — температура; c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; μ — коэффициент динамической вязкости; k — коэффициент теплопроводности.