ОБ ИСТЕЧЕНИИ ВОДЫ ЧЕРЕЗ ПЛОТИНУ

В. М. БАГИН (Москва)

Дается решение одной задачи плоского установившегося движения тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, частично ограниченной снизу двумя плоскостями, расположенными под углом $\pm 30°$ к горизонту. Задача может быть истолкована как истечение воды через плотину в форме клина с углом раствора 120°. Профиль, близкий к подобному, имеют так называемые водосливные каменнонабросные плотины [1]. Для рассмотренной плотины вычисляется коэффициент расхода, который оказывается весьма близким к опытному значению.

1. Задача решена одним приближенным методом, предложенным в работе [2]. Так как в задаче имеются только две независимые размерные постоянные, то проведем предварительный анализ функциональных зависимостей.

Движение жидкости описывается комплексным потенциалом скоростей $w = \varphi + i\psi$, который зависит от комплексной координаты в физической плоскости $z = x + iy$ и двух независимых размерных постоянных ψ_0 и g, т. е.

$$w = w(z, \psi_0, g) \tag{1.1}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, ψ_0 — некоторая постоянная с размерностью [$м^2$ $сек^{-1}$].

Кроме того, движение жидкости описывается комплексной скоростью

$$\bar{v} = \bar{v}(z, \psi_0, g) \qquad (\bar{v} = v_x - iv_y) \tag{1.2}$$

Согласно теории размерности [3], зависимости (1.1) и (1.2) можно представить в виде

$$w = \psi_0 W(Z), \quad \bar{v} = \bar{V}(Z), \quad Z = (g/\psi_0^2)^{1/3} z, \quad c = (\psi_0 g)^{1/3} \tag{1.3}$$

Здесь W и $\bar{V}$ — безразмерные комплексный потенциал скоростей и комплексная скорость, c — характерная скорость [2].

Для функций ζ и χ работы [2] будем иметь выражения

$$\zeta = \tau + i\theta = -\ln \bar{V}, \qquad \chi = e^{-3\zeta} = \bar{V}^3 \tag{1.4}$$

Используя (1.3) и (1.4), вместо функции Φ работы [2] получим выражение в виде

$$\Phi = \frac{i}{\chi}\frac{d\chi}{dW} + \frac{k}{\chi} \qquad (1 \leqslant k = \text{const} \leqslant {}^3/_2) \tag{1.5}$$

Отсюда для функции χ имеем уравнение

$$d\chi / dW + i\Phi(W)\chi - ik = 0 \tag{1.6}$$

Принимая начальное условие $\chi = \chi_0$ при $W = W_0$, решение этого уравнения получим в виде

$$\chi = \exp\left[-i\int_{W_0}^{W}\Phi(W)\,dW\right]\left\{\chi_0 + ik\int_{W_0}^{W}\exp\left[i\int_{W_0}^{W}\Phi(W)\,dW\right]dW\right\} \tag{1.7}$$

Найдя функцию χ, можно определить функцию z по формуле

$$z = (\psi_0^2/g)^{1/3}\int_{W_{00}}^{W}[\chi(W)]^{-1/3}\,dW \tag{1.8}$$

2. Рассмотрим задачу об истечении тяжелой жидкости через плотину в форме клина с углом раствора 120° (фиг. 1). Удобно обратить движение жидкости, как показано стрелкой на фиг. 1, что позволяет отобразить конформно область течения на верхнюю полуплоскость вспомогательной переменной u (фиг. 1).

Область комплексного потенциала скоростей показана на фиг. 1. Для потенциала скорости φ и функции тока ψ имеем следующие граничные условия:

$$\psi = 0 \quad \text{на } ABC \ (-\infty \leqslant \varphi \leqslant \infty), \qquad \psi = \psi_0 \quad \text{на } AC \ (-\infty \leqslant \varphi \leqslant \infty) \tag{2.1}$$

При $\psi = 0$ для функции θ имеем следующие граничные условия:

$$\theta = {}^1/_6\pi \quad \text{на } AB, \qquad \theta = -{}^1/_6\pi \quad \text{на } BC \tag{2.2}$$

Отобразим конформно рассматриваемую область в плоскости w на верхнюю полуплоскость вспомогательной переменной u при помощи формулы

$$w = \frac{\psi_0}{\pi}\ln u \qquad \left(W = \frac{1}{\pi}\ln u\right) \tag{2.3}$$

Тогда, учитывая (2.1) и (2.2) согласно предположениям работы [2], для функции Φ имеем граничные условия: (2.4)

$$\operatorname{Re}\Phi = 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} u = 0, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re} u \leqslant \infty,$$
$$\operatorname{Im}\Phi = 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} u = 0, \quad -\infty \leqslant \operatorname{Re} u \leqslant 0$$

Найдем особенности функций χ и Φ в плоскости u. Из асимптотических равенств (1.15) работы [2] при $\alpha = {}^4/_3\pi$ в окрестности точки $B(u=1)$, учитывая, что $w = O\,(u-1)$ при $u \to 1$, будем иметь

$$\chi = O[(u-1)^{-1}], \quad \Phi = O[(u-1)^{-1}] \quad \text{при } u \to 1 \tag{2.5}$$

В окрестности бесконечно удаленной точки C ($|u| = \infty$) имеем движение жидкости как бы от источника, так что

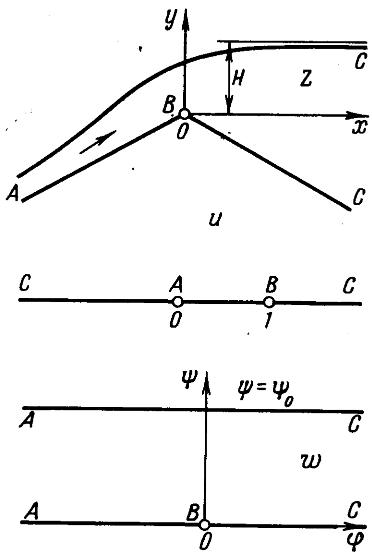
$$\bar V = O(z^{-1}), \quad \chi = O(z^{-3}), \quad \chi^{-1} = O(z^3)$$
$$\chi^{-1}d\chi\,/\,dw = O(1) \quad \text{при } \operatorname{Re} z \to \infty$$

Отсюда, замечая, что $z = O\,(u^{1/6})$, найдем

$$\chi = O(u^{-1/2}), \quad \Phi = O(u^{1/2}) \quad \text{при } |u| \to \infty \tag{2.6}$$

В окрестности точки A ($u = 0$), замечая, что по (2.3) $w = O\,(\ln u)$ при $u \to 0$, аналогично первой задаче работы [2], следует положить

$$\chi = O\,(\ln u), \quad \Phi = o\,(\ln^{-1} u) \quad \text{при } u \to 0 \tag{2.7}$$



Фиг. 1

Тогда, учитывая (2.4)—(2.7), для функции Φ по формуле Келдыша — Седова найдем выражение

$$\Phi = -iA\sqrt{u}\,\frac{u+a}{u-1} \qquad (A > 0) \tag{2.8}$$

Здесь A и a — некоторые действительные постоянные, которые определим ниже. Подставляя (2.3) и (2.8) в (1.6), получим уравнение

$$\frac{d\chi}{du} + \frac{A}{\pi}\,\frac{u+a}{u-1}\,\frac{\chi}{\sqrt{u}} - \frac{ik}{\pi u} = 0 \tag{2.9}$$

Вычислим один интеграл формулы (1.7)

$$i\int_{W_0}^{W}\Phi(W)\,dW = \frac{A(1+a)}{\pi}\left[\frac{2\sqrt{u}}{1+a} + \ln\frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1}\right]_{u_0}^{u} \tag{2.10}$$

Чтобы получить необходимую особенность (2.5) для функции χ, следует в (2.10) положить

$$A(1+a)\,/\,\pi = 1 \tag{2.11}$$

Принимая начальное условие $\chi = 0$ при $u = -\infty$ и полагая

$$\mu = 2\,/\,(1+a) > 0 \tag{2.12}$$

решение уравнения (2.9), удовлетворяющее начальному условию и условию (2.11), получим в виде

$$\chi = \frac{ik}{\pi}\,e^{-\mu\sqrt{u}}\,\frac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}-1}\int_{-\infty}^{u}\frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1}\,\frac{e^{\mu\sqrt{u}}}{u}\,du \tag{2.13}$$

Вводя новую переменную по формуле

$$t = \xi + i\eta = \sqrt{u} \tag{2.14}$$

запишем решение (2.13) в виде

$$\chi = \frac{2ik}{\pi} e^{-\mu t} \frac{t+1}{t-1} \left(2 \int\limits_{i\infty}^{t} \frac{e^{\mu t}}{t+1} dt - \int\limits_{i\infty}^{t} \frac{e^{\mu t}}{t} dt \right) \tag{2.15}$$

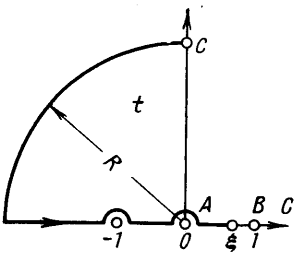
Чтобы получить выражение для χ при $\psi = 0$, проинтегрируем в (2.15) по пути, указанному на фиг. 2. Замечая, что интегралы по окружности бесконечно большого радиуса R равны нулю по лемме Жордана, получим

$$\chi(\xi, 0) = \frac{2ik}{\pi} e^{-\mu\xi} \frac{\xi+1}{\xi-1} [2e^{-\mu} \mathrm{Ei}(\mu(\xi+1)) - \mathrm{Ei}(\mu\xi) - i\pi(2e^{-\mu} - 1)] \qquad (\xi > 0)$$

$$\mathrm{Ei}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^x}{x} dx + \int\limits_{\varepsilon}^{x} \frac{e^x}{x} dx \right) \tag{2.16}$$

Так как функция χ при $\psi = 0$ должна быть мнимой, необходимо положить

$$2e^{-\mu} - 1 = 0 \tag{2.17}$$



Фиг. 2

Отсюда найдем $\mu = \ln 2$, а используя (2.12) и (2.11), получим

$$a = 2 / \ln 2 - 1, \qquad A = {}^1/_2 \pi \ln 2$$

Подставляя (2.17) в (2.16), получим окончательно

$$\chi(\xi, 0) = \frac{2ik}{\pi} e^{-\mu\xi} \frac{\xi+1}{\xi-1} [\mathrm{Ei}(\mu(\xi+1)) - \mathrm{Ei}(\mu\xi)]$$

$$(\mu = \ln 2) \tag{2.18}$$

Рассмотрим поведение χ при $|u| \to \infty$. Используем асимптотическое равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{u} \frac{\sqrt{u} - 1}{\sqrt{u} + 1} \frac{e^{\mu\sqrt{u}}}{u} du = \frac{2}{\mu} e^{\mu\sqrt{u}} \left[\frac{1}{\sqrt{u}} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right] \quad \text{при } |u| \to \infty$$

Из равенства (2.13) будем иметь

$$\chi = \frac{2ik}{\pi\mu} \left[\frac{1}{\sqrt{u}} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right] \quad \text{при } |u| \to \infty \tag{2.19}$$

Это согласуется с (2.6). Из (2.13) следует также, что при $u \to 0$ функция χ имеет особенность (2.7). Таким образом, найденная функция χ удовлетворяет всем требованиям задачи.

Функцию z найдем по формуле, следующей из (1.8), используя (2.3), (2.14) и полагая $t_{00} = 1$,

$$z = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\psi_0^2}{g} \right)^{1/3} \int\limits_{1}^{t} [\chi(t)]^{-1/3} \frac{dt}{t} \tag{2.20}$$

Отсюда найдем высоту подпора H (фиг. 1)

$$H = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\psi_0^2}{g} \right)^{1/3} \mathrm{Im} \int\limits_{1}^{i\infty} [\chi(t)]^{-1/3} \frac{dt}{t} \tag{2.21}$$

Вычислим интеграл, стоящий в (2.21), интегрируя по пути, указанному на фиг. 3, состоящему из полупрямой $1 \leqslant t \leqslant t_1$ и четверти окружности бесконечно большого радиуса R

$$\lambda = \int\limits_{1}^{t_2} \chi^{-1/3} \frac{dt}{t} = \int\limits_{1}^{t_1} \chi^{-1/3} \frac{dt}{t} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \chi^{-1/3} \frac{dt}{t} \tag{2.22}$$

При интегрировании в (2.22) по окружности бесконечно большого радиуса R функцию χ можно заменить ее асимптотическим выражением (2.19), которое после замены переменной принимает вид

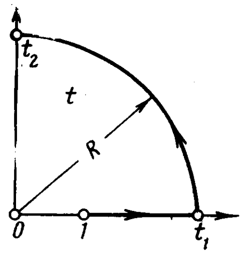
$$\chi = \frac{2ik}{\pi\mu}[t^{-1} + O(t^{-2})] \qquad \text{при } |t|\to\infty$$

Отсюда

$$\chi^{-1/3} = \left(\frac{\pi\mu}{2il}\right)^{1/3}[t^{1/3} + O(t^{-2/3})] \qquad \text{при } |t|\to\infty \tag{2.23}$$

Подставляя (2.23) во второй интеграл (2.22) и замечая, что интеграл от второго слагаемого асимптотического выражения (2.23) стремится к нулю при $R\to\infty$, получим

$$\lambda_1 = \int_{t_1}^{t_2} \chi^{-1/3}\frac{dt}{t} = \left(\frac{\pi\mu}{2ik}\right)^{1/3}\int_{t_1}^{t_2} t^{1/3}\frac{dt}{t} = 3\left(\frac{\pi\mu}{2ik}\right)^{1/3}(t_2^{1/3} - t_1^{1/3})$$



Фиг. 3

Отсюда, принимая во внимание, что $\operatorname{Re} t_2 = 0$, найдем

$$\operatorname{Im}\lambda_1 = -\operatorname{Im} 3\left(\frac{\pi\mu t_1}{2ik}\right)^{1/3}$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$\operatorname{Im}\lambda_1 = -\operatorname{Im}\left(\frac{\pi\mu}{2ik}\right)^{1/3}\left(\int_1^{t_1} t^{1/3}\frac{dt}{t} + 3\right) \tag{2.24}$$

Наконец, используя (2.22) и (2.24), получим

$$\operatorname{Im}\lambda = \operatorname{Im}\left[\int_1^{t_1}\chi^{-1/3}\frac{dt}{t} - \left(\frac{\pi\mu}{2ik}\right)^{1/3}\left(\int_1^{t_1} t^{1/3}\frac{dt}{t} + 3\right)\right] \tag{2.25}$$

Подставляя в (2.25) выражение для χ из (2.18) и полагая $t_1 = \infty$, получим

$$\operatorname{Im}\lambda = \left(\frac{\pi}{2k}\right)^{1/3}\sin\frac{\pi}{6}\left\{3\mu^{1/3} - \int_1^{\infty}\left[\left(\frac{e^{\mu\xi}(\xi-1)/(\xi+1)}{\operatorname{Ei}(\mu(\xi+1)) - \operatorname{Ei}(\mu\xi)}\right)^{1/3} - (\mu\xi)^{1/3}\right]\frac{d\xi}{\xi}\right\} \tag{2.26}$$

Величина, стоящая в фигурных скобках равенства (2.26), была вычислена на цифровой электронно-вычислительной машине и равна 3.285±0.001.

Следует заметить, что интеграл, стоящий в (2.26), сходится практически при значении верхнего предела $\xi_1 = 40$. Подставляя (2.26) в (2.21) и заменяя $\sin {}^1\!/_6\pi$ на $^1\!/_2$, а фигурную скобку — ее числовым значением, получим

$$H = 3.285\,(\psi_0^2 / 2\pi^2 kg)^{1/3}, \qquad \text{или} \qquad \psi_0 = m\sqrt{2gH^3} \qquad (m = 0.5275\sqrt{k}) \tag{2.27}$$

Здесь m — коэффициент расхода. Коэффициент k можно взять в первом приближении равным $9\sqrt{3}/4\pi$; это значение получается путем минимизации интеграла

$$\int_0^{\pi/6}(\sin\theta - {}^1\!/_3 k\sin 3\theta)^2\,d\theta \tag{2.28}$$

Это дает, согласно (2.28), значение $m = 0.5878$. Минимальное возможное значение для k равно единице, что дает $m = 0.5275$. Опыты, проведенные на моделях плотин [1] близкого профиля, дают $m \approx 0.5$. Разницу между найденным теоретическим и опытным значениями можно объяснить, если учесть гидравлические потери и то, что опытные профили плотин имеют скругленную вершину.

Поступило 20 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляшевский Н. Н. Улучшенные типы водосливных плотин из каменной наброски. Киев, Изд-во АН УССР, 1953.
2. Багин В. М. О некоторых задачах движения тяжелой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.