

ОБ ИСКУССТВЕННОМ КАВАТАЦИОННОМ ТЕЧЕНИИ ЗА ТОНКИМ КЛИНОМ, ПОМЕЩЕННЫМ НА НИЖНЮЮ ПОВЕРХНОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СТЕНКИ

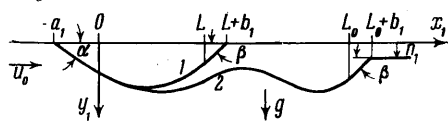
А. А. БУТУЗОВ

(Ленинград)

1. Ставится задача, рассмотренная в работе [1], о кавитационном обтекании тонкого клина (насадка), представляющего собой пластинку, подходящую к стенке под малым углом α . В отличие от работы [1], отношение длины каверны L к длине насадки a_1 считается произвольным. Для изучения этого случая применяется видоизмененная схема Рябушинского (фиг. 1, кривая 1), согласно которой длина фиктивного клина b_1 , замыкающего каверну, принимается малой по сравнению с длиной насадки a_1 . При этом угол примыкания поверхности фиктивного клина к горизонтальной стенке β заранее не фиксируется.

Обозначения

- a, b — отношения соответственно длин насадка и фиктивного клина к длине каверны;
- η, x — отношения ординаты и абсциссы точки контура каверны;
- η_1, x_1 — то же к длине каверны;
- f — величина, обратная квадрату числа Фруда по длине каверны;
- σ — число кавитации;
- U_0 — скорость потока на бесконечности;
- ρ — плотность жидкости;
- g — ускорение силы тяжести;
- p_0 — статическое давление на уровне горизонтальной стенки;
- p_k — давление в каверне.



Фиг. 1

Формулировка и прием решения задачи аналогичны приведенным в работе [1] для схемы Рябушинского. Жидкость предполагается несжимаемой, идеальной, движется безвихревым. Выполняются линеаризованные граничные условия, условие непротекания жидкости через контур твердых стенок и каверны и условие постоянства давления на контуре каверны. Ищется контур каверны $\eta(x)$.

Функция $\eta(x)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$f\eta(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\eta'(\xi) d\xi}{\xi - x} + \frac{\sigma}{2} + \frac{\beta}{\pi} \ln \frac{1-x}{1+b-x} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{a+x}{x} \quad (0 < x < 1)$$

$$f = gL / U_0^2, \quad \sigma = (p_0 - p_k) / \frac{1}{2}\rho U_0^2 \quad (1.1)$$

и условиям

$$\eta'(0) = \alpha, \quad \eta(0) = \alpha a, \quad \eta'(1) = -\beta, \quad \eta(1) = \beta b \quad (1.2)$$

Параметры σ и β в соотношениях (1.1), (1.2) неизвестны. Интегро-дифференциальное уравнение решалось приближенно. Оно заменялось системой линейных алгебраических уравнений, исходя из аппроксимации функции $\eta(x)$ на интервалах $\xi_i < x < \xi_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = 1$) участками парабол второй степени, гладко сопрягаемыми друг с другом.

Указанная аппроксимация при выполнении первых трех условий (1.2) приводит к равенствам вида

$$\eta(x) = \alpha a + \sum_{i=0}^n c_i(x) q_i \quad (0 \leq x \leq 1), \quad \int_0^1 \frac{\eta'(\xi) d\xi}{\xi - x} = \sum_{i=0}^n d_i(x) q_i \quad (0 < x < 1)$$

$$q_i = \eta'(\xi_i), \quad q_0 = \alpha, \quad q_n = -\beta \quad (1.3)$$

Здесь функции $c_i(x), d_i(x)$ зависят от выбора точек ξ_m , причем

$$c_i(0) = 0, \quad c_0'(0) = c_n'(1) = 1, \quad c_i'(0) = 0 \text{ при } i \neq 0, \quad c_i'(1) = 0 \text{ при } i \neq n$$

Система из $n+1$ линейного алгебраического уравнения с $n+1$ неизвестным $\sigma/a, \beta/a, q_1/a, \dots, q_{n-1}/a$ составляется в результате подстановки равенств (1.3) в уравнение (1.1) при $x = \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_{i+1})$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) и в четвертое условие (1.2).

Система решалась на ЭВМ М-20. Вычисления проводились для следующих значений параметров $a, b : a = 1.6, 0.8$ при $b = 0.04, 0.2, 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ при $b/a = 0.4, 0.2, 0.1$. Диапазон значений параметра f ($0 \leq f \leq f_0$) выбирался в процес-

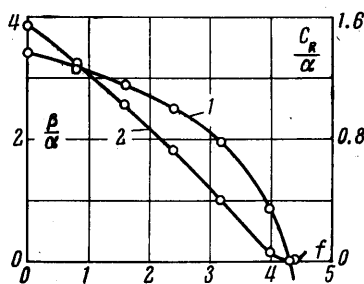
се расчетов. С целью проверки сходимости приближенных решений интегро-дифференциального уравнения вычисления выполнялись для случаев $n = 20$ и $n = 40$, при $f = 0$ использовалось также точное решение уравнения (1.1) [2].

Характерная для всех рассмотренных значений a и b зависимость величины β/a от величины f представлена в виде кривой 1 на фиг. 2. Эта зависимость относится к случаю $a = 0.2$, $b/a = 0.1$. На фиг. 2 кружками обозначены расчетные точки при $n = 40$. Точки при $n = 20$ практически совпадают с точками при $n = 40$. Как видно из фиг. 2 параметр β убывает с ростом параметра f , обращаясь в нуль при некотором значении $f = f_*$. Значение параметра $f = f_*$ имеет смысл предельного значения, поскольку $\beta < 0$ при $f > f_*$, и контур каверны пересекает стенку. Следовательно, по крайней мере, в некотором диапазоне значений f ($f > f_*$) тонкие каверны на нижней поверхности горизонтальной стенки существовать не могут.

Предельному значению параметра f соответствуют предельные значения других параметров, характеризующих кавитационное течение, и, в частности, — параметров $f_1 = ga_1/U_0^2$, $F = U_0/\sqrt{gL}$, $\delta = \eta_{\max}$, σ . Предельные значения указанных параметров, найденные в результате расчетов, приведены ниже.

$a = 1.6$	0.8	0.4	0.2	0.1	0.05	0.025	0.0125
$f_{1*} = 4.58$	2.59	1.51	0.870	0.483	0.258	0.133	0.0677
$F_* = 0.590$	0.556	0.515	0.480	0.455	0.441	0.434	0.430
$\delta_*/\alpha = 1.62$	0.87	0.54	0.44	0.50	0.67	0.95	1.39
$-\sigma_*/\alpha = 3.70$	2.15	1.54	1.46	1.81	2.59	3.85	5.67

Данные, приведенные в таблице, получены при $n = 40$. Расхождение между этими данными и данными, полученными при $n = 20$, не превышает следующих величин: для параметра $f_{1*} - 0.4\%$, для параметра $F_* - 0.2\%$, для параметра $\delta_*/\alpha - 2\%$, для параметра $\sigma_*/\alpha - 4\%$. В случае $f = 0$ значения параметра σ/a , найденные при $n = 20$ и $n = 40$, отличаются от значений σ/a , найденных из точного решения уравнения (1.1) менее, чем на 4% .



Фиг. 2

Рассмотрение зависимости $a = a(f, \sigma/a)$, построенной по результатам расчета, показало, что величина σ_* — минимальное значение σ при $f_1 = \text{const}$ и, следовательно, определяет максимальное давление в каверне при заданной скорости потока. Этому давлению соответствует максимальная при $U_0 = \text{const}$ длина каверны L_* . Контур каверны предельной длины, в силу условия $\beta = 0$, подходит к стенке по касательной. Следовательно, каверне предельной длины теоретически соответствуют нулевой расход газа и нулевое сопротивление насадка.

Изменение коэффициента сопротивления насадка

$$c_R = \frac{2R}{\rho U_0^2 a a_1} = \alpha \left\{ \frac{2}{\pi a} \int_{-a}^0 dx \int_{-a}^{1+b} \frac{\eta'(\xi) d\xi}{\xi - x} + af \right\} + \sigma \quad (1.4)$$

с изменением параметра f иллюстрируется данными, приведенными на фиг. 2. В выражении (1.4) величина $\eta = \eta(\xi)$ — уравнение контура тела, состоящего из каверны и клиньев. На фиг. 2 показана зависимость (кривая 2) между величинами c_R/α и f , обозначение расчетных точек прежние.

Интересно отметить, что в случае симметричного кавитационного обтекания клина потоком жидкости, направленным снизу вверх, также имеют место каверны предельной длины с контуром, касающимся оси симметрии, или, что то же — вертикальной стенки [3]. Сопротивление насадка в этом случае равно архимедовой силе, действующей на тело насадок — каверна.

С целью получения более полных данных о параметрах тонких каверн, образованных на нижней поверхности горизонтальной стенки, были найдены пределы параметров F_* и δ_*/σ_* при $a \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 0$. Для отыскания этих пределов был использован тот факт, что параметры F_* и δ_*/σ_* , определяемые из решения уравнения (1.1), не зависят от величины a . Было положено $aa \rightarrow \Delta$ при $a \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$. В первом случае значения величин F_* и δ_*/σ_* стремятся к значениям величин F и δ/σ , соответствующим каверне предельной длины, образованной за уступом, во втором случае — каверне, контур которой в передней и задней точках касается стенки.

Для случая уступа параметры F_* и δ_*/σ_* были определены точно так же, как для случая клина конечной длины. Вычисления выполнялись для значения параметра $b = 0.04$. Заметим, что в случае уступа правая часть уравнений (1.1) обращается

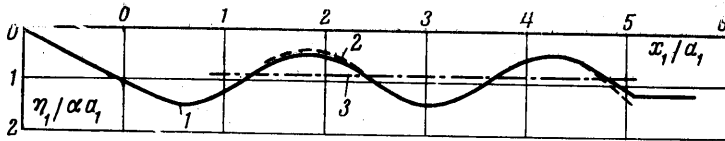
в нуль, первое и второе условия (1.2) заменяются условиями $\eta'(0) = 0$, $\eta(0) = \Delta$; корни системы линейных уравнений — имеют вид σ/Δ , β/Δ , q/Δ . Заметим также, что в этом случае формула (1.4) приобретает вид $c_R = \Delta f + \sigma$, причем давление p_0 в выражении для σ представляет собой статическое давление на уровне горизонтальной стенки за уступом.

Для определения параметров F_* и δ_*/σ_* , относящихся ко второму случаю, применялась схема Рябушинского, т. е. полагалось $\alpha = \beta$, $a = b$; при этом параметр σ считался заданным, параметр a — неизвестным. Величина f , отвечающая условию $\alpha = \beta = 0$, находилась из рассмотрения зависимости a/σ от f . Указанная зависимость была построена по результатам вычислений параметра σ/a , приведенных в работе [1].

Согласно полученным данным, $F_* = 0.657$, $\delta_*/\sigma_* = \Delta/\sigma_* = -0.431$ — для случая уступа и $F_* = 0.425$, $\delta_*/\sigma_* = -0.239$ — для случая каверны с контуром, касающимся стенки в обеих конечных точках. Приведенные цифровые результаты найдены при $n = 40$, т. е. при разбиении длины каверны точками ξ_i на 40 интервалов. При $n = 20$ значения параметров F_* и δ_*/σ_* отличаются от приведенных менее, чем на 0.5%.

В работе [1] в качестве числа Фруда F_* для малых значений параметра a указано значение F_* , соответствующее каверне, контур которой касается стенки в передней и задней точках. В свете результатов, полученных выше, это значение — предел числа Фруда F_* при $a \rightarrow 0$. Очевидно также, что сделанный в работе [1] вывод о неограниченном увеличении относительной толщины каверны δ при $F \rightarrow F_*$ ($F > F_*$), $\alpha = \text{const}$ справедлив также только в предельном смысле: δ при $F \rightarrow F_*$ стремится к конечной величине, значение которой растёт в области малых значений параметра a с уменьшением a .

2. На практике при весьма больших расходах газа иногда образуются каверны, поверхность которых, не замыкаясь на горизонтальную стенку, переходит в поверх-



Фиг. 3

ность стационарного шлейфа гравитационных волн. Теоретически этот случай может быть рассмотрен как случай каверны бесконечной длины.

Если ограничиться целью — определить контур каверны бесконечной длины лишь на некотором участке его протяженности l ($0 < x_1 < l$), то, очевидно, также можно воспользоваться схемой, рассмотренной выше, выбрав расстояние $L = L_0$ ($l < L_0$) достаточно большим. При этом, поскольку в данном случае число кавитации σ должно задаваться независимо от параметров f_1 ($f_1 = af$) и a и, следовательно, является известным, схему требуется несколько изменить — так, чтобы в соотношения (1.1), (1.2) и соответствующую систему алгебраических уравнений вошли, кроме β , еще один неизвестный параметр. Необходимое изменение схемы достигается за счет того, что горизонтальная стенка за фиктивным клином, также фиктивная, считается смещенной в вертикальном направлении относительно стенки перед насадком на некоторое расстояние h_1 (фиг. 1, кривая 2), служащее дополнительным, неизвестным параметром. Этот параметр входит лишь в четвертое условие (1.2), приобретающее вид $\eta(1) = \beta b + h_1$, и в соответствующее ему уравнение системы алгебраических уравнений — все остальные соотношения остаются прежними.

Описанная схема была использована для численного расчета параметров каверн с волновым шлейфом за тонким клином и уступом. Было принято $L_0 = 4L_*$, $n = 40$. В процессе расчетов при каждом фиксированном значении параметра f ($f = 4f_*$) варьировался параметр σ . Это равносильно изменению давления в каверне при постоянной скорости потока. Рассматривались следующие случаи клина конечной длины: $a_1/L_* = 1.6, 0.8, 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$. Им соответствуют значения параметра $f_1 = 4.58, 2.59, 1.51, 0.870, 0.483, 0.258$ и значения параметров f и a , определяемые выражениями $f = 4f_1 L_*/a_1$, $a = a_1/4L_*$. Значение параметра b принималось равным 0.04 — для случая уступа и случая клина при $a_1/L_* = 1.6$ и равным 0.1 a — для остальных случаев клина.

Один из найденных в результате расчетов контуров каверн представлен на фиг. 3 кривой 1. Показанный на фиг. 3 контур относится к случаю $f_1 = 2.59$, $\sigma/\sigma_* = 2.09$. В других случаях каверны также имели аналогичный волновой характер, причем их контур не всегда лежал ниже линии горизонтальной стенки.

Чтобы получить более полную информацию о профиле каверны бесконечной протяженности, определялись также длина и амплитуда волн (λ и A) и средний уровень поверхности жидкости h_0 на бесконечности за насадком. Эти величины находились из равенств

$$\lambda = 2\pi U_0^2 / g, \quad 1/4 \rho g A^2 - 1/2 \rho g h_0^2 = R, \quad \rho g h_0 = p_k - p_0 \quad (2.1)$$

Здесь R — сопротивление насадка. Оно вычислялось по формуле (1.4). Использование формулы (1.4) для определения величины R считалось правомочным, поскольку известно, что схематизация течения слабо сказывается на значении сопротивления насадка [4].

Расчетанные по схеме контуры каверн сопоставлялись с профилями волн, имеющих место на бесконечности. Такое сопоставление иллюстрируется данными, приведенными на фиг. 3. Здесь кривая 2, обозначенная пунктиром, соответствует синусоидальному профилю волн на бесконечности за насадком, прямая 3, обозначенная штрих-пунктиром, — уровень h_0 . Как показал сопоставление, во всех случаях высота первого гребня волны за насадком, отсчитанная от уровня h_0 , и его длина, измеренная на этом уровне, отличались от соответствующих величин A и $1/2\lambda$ менее, чем на 6%.

Последний результат позволил приближенно определить значения параметров f_1 и σ , при которых возможно существование каверн с волновым шлейфом на нижней поверхности горизонтальной стенки, исходя из условия $A/h_0 < 1$.

Заметим, что из этого условия и второго равенства (2.1) сразу же следует вывод: в случае каверны с волновым шлейфом на насадок действует сила тяги. Вывод строгий, поскольку условие $A/h_0 < 1$ — необходимое.

Значения параметров f_1 и σ , отвечающих условию $A/h_0 < 1$, находились путем графического построения зависимости величины A/h_0 от σ/σ_* при $f_1 = \text{const}$.

Согласно результатам расчета, функция $A/h_0 = H(\sigma/\sigma_*)$ имеет один минимум, причем величина $(A/h_0)_{\min}$ возрастает с уменьшением параметра f_1 так, что $(A/h_0)_{\min} > 1$ при f_1 от 0.87 до 0.258. Следовательно, условие $A/h_0 < 1$ выполняется лишь при достаточно больших значениях параметра f_1 в некотором диапазоне чисел кавитации $\sigma_2 < \sigma < \sigma_1$. Приводим значения величин σ_1/σ_* , σ_2/σ_* (символ ∞ — соответствует уступу)

$f_1 = \infty$	4.58	2.59	1.51	1.26
$\sigma_1/\sigma_* = 1.18$	1.27	1.32	1.51	2.1
$\sigma_2/\sigma_* = 7.11$	6.80	5.72	3.44	2.1

Здесь значения параметров f_1 и σ_1/σ_* , стоящие в последнем столбце, найдены из условия $(A/h_0)_{\min} = 1$ путем графического построения зависимостей между величинами $(A/h_0)_{\min}$ и f_1 , а также зависимостей между величинами σ/σ_* и f_1 при $(A/h_0) = (A/h_0)_{\min}$. Заметим, что контуры каверны за уступом в виде горизонтальной прямой отвечает случай $\sigma/\sigma_* = 2$, $(A/h_0)_{\min} = 0$.

Итак, согласно полученным данным, тонкие каверны со стационарным волновым шлейфом могут иметь место лишь при достаточно низких скоростях потока

$$U_0 < \sqrt{ga_1/1.26}$$

и давлениях

$$p_0 - 1/2 \rho U_0^2 \sigma_1 < p_k < p_0 - 1/2 \rho U_0^2 \sigma_2$$

превосходящих давление в каверне предельной длины.

3. С целью сопоставления теоретических результатов с опытными данными был поставлен эксперимент в гидрлотке, аналогичный эксперименту, описанному в работе [1]. Объектом испытаний являлась та же пластина с боковыми шайбами, длина ее 945 мм, ширина 200 мм. Опыты проводились с тремя клиновидными насадками (1, 2, 3), длина и высота которых соответственно составляли 100 и 10, 50 и 6, 25 и 3 мм. Отстояние заднего среза насадка от носика пластины равнялось 315 мм. Каверны на днищевой поверхности пластины создавались путем нагнетания воздуха через щель, расположенную непосредственно за насадком. Получаемые на опытах каверны фотографировались на фоне координатных сеток, нанесенных на боковые шайбы; замерялись скорость потока, расход воздуха и давление в каверне.

Каждый насадок испытывался при двух режимах работы гидрлотки, соответствующих примерно постоянным скоростям потока. Режимы подбирались такими, чтобы при расходе воздуха $Q = 0.01$ л/сек длина каверны на первом режиме была близка 125 мм, на втором — 250 мм. В процессе опытов расход воздуха постепенно увеличивался от 0.01 до 1 ÷ 3 л/сек. При этом расходы воздуха, превышающие 1 л/сек, задавались лишь в тех случаях, когда при $Q = 0.01$ л/сек длина каверны была близка

125 мм, и зона за насадком, доступная для наблюдений (ее протяженность — 300 мм), была достаточной для изучения каверн с волновым шлейфом, получаемых при больших расходах воздуха.

Согласно результатам эксперимента, параметры каверн, образованных при расходе воздуха $Q = 0.01$ л/сек, оставались практически неизменными в случае увеличения расхода газа до величины, примерно равной 0.25 л/сек. Эти параметры оставались также практически постоянными в течение нескольких минут после полного прекращения подачи воздуха.

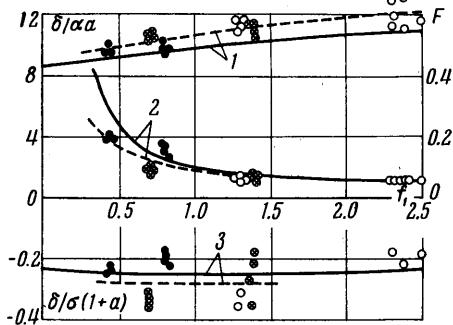
Увеличение расхода газа от 0.01 до 0.25 л/сек приводило лишь к развитию за каверной воздушного шлейфа нестационарного характера, который постепенно расширялся и утолщался. При $Q \approx 0.25$ л/сек ширина шлейфа становилась равной ширине пластины, а его толщина настолько большой, что вся видимая поверхность пластины за насадком постоянно покрывалась воздухом. Дальнейшее увеличение расхода воздуха, наконец, вызывало изменение параметров каверны и, в частности, — рост относительной толщины каверны. Относительная толщина каверны при Q от 0.01 до 0.25 л/сек была небольшой: отношение толщины каверны к длине тела насадок — каверна примерно равнялось $0.03 \div 0.065$.

Таким образом, согласно результатам эксперимента, в действительности могут быть получены тонкие каверны, для поддержания которых требуется весьма малый расход газа. Параметры этих каверн для некоторого диапазона расходов газа $0 < Q < Q_0$ имеют физический смысл предельных, так как не могут быть изменены за счет многократного увеличения расхода при $Q < Q_0$. Расходы газа $Q < Q_0$ характеризуются наличием за каверной газового шлейфа, ширина которого меньше ширины каверны.

На фиг. 4 теоретические значения предельных параметров тонких каверн сопоставлены с соответствующими экспериментальными значениями параметров каверн, ширина воздушного шлейфа за которыми меньше ширины каверны. Здесь построены зависимости величин F , δ/aa , $\delta/\sigma(1+a)$ от параметра f_1 — соответственно кривые 1, 2, 3; пунктирные кривые — экспериментальные. Кружками обозначены точки при $a_1 = 100$ мм, крестиками — при $a_1 = 50$ мм, зачерненными кружками — при $a_1 = 25$ мм. Приведенные данные свидетельствуют об удовлетворительном согласовании теории и эксперимента.

С целью проверки теоретического условия $f_1 > 1.26$, допускающего образование каверны с волновым шлейфом, на опытах в гидрлотке проводились подробные наблюдения за развитием газового шлейфа за каверной с увеличением расхода воздуха в случаях $f_1 \approx 2.4$ ($a_1 = 100$ мм), $f_1 \approx 1.4$ ($a_1 = 50$ мм) и $f_1 \approx 0.8$ ($a_1 = 25$ мм). Результаты наблюдений показали, что в первых двух случаях весьма значительное увеличение расхода газа до величины порядка 2 л/сек приводит к тому, что газовый шлейф постепенно стабилизируется, и его поверхность в пределах видимой зоны приобретает вид стационарной поверхности волнового гребня. Дальнейшее увеличение расхода газа вызывает в конечном счете интенсивные колебания поверхности воздушного шлейфа, сопровождающиеся периодическим его разрушением. В случае $f_1 \approx 0.8$ вплоть до расходов воздуха, приводящих к периодическому интенсивному колебанию поверхности газового шлейфа, стабилизация поверхности газового шлейфа не наблюдалась.

Таким образом, по данным эксперимента наименьшее значение параметра f_1 , допускающее образование каверны с волновым шлейфом, оценивается неравенством $0.8 < f_1 < 1.4$. Этот экспериментальный результат согласуется с теоретическим.



Фиг. 4

Поступило 19 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутузов А. А. О предельных параметрах искусственной каверны, образуемой на нижней поверхности горизонтальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
3. Lenau C. W., Street R. L. A Non-linear. Theory for Symmetric Supercavitating Flow in Gravity Field. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt. 2.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.