УДЕРЖАНИЕ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В ВАКУУМЕ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОВОДЯЩЕГО КОЖУХА

Ю. П. ЛАДИКОВ

(Киев)

В статье исследуется возможность устойчивого удержания жидкого металла в вакууме высокочастотным полем круговой поляризации. Считается, что частота колебаний металла, в силу его инерции, значительно меньше частоты вращения поля. Задача решалась в плоской постановке. В случае бесконечной проводимости жидкости показано, что выбором необходимого расстояния металла до кожуха можно стабилизировать все возможные возмущения. Далее рассмотрен случай конечной проводимости, но большой частоты поля и таких возмущений, при которых скинслой колеблется вместе с жидкостью, как упругая пленка, и доказано, что критерий устойчивости остается прежним. Затем рассмотрен случай коротковолновых возмущений (малых магнитных чисел Рейнольдса). Эти возмущения могут стабилизироваться только силами поверхностного натяжения, поэтому для устойчивости необходимо, чтобы глубина скинслоя была бы достаточно малой.

§ 1. Постановка задачи. В невозмущенном состоянии проводящая тяжелая жидкость занимает верхнее полупространство $z > 0$. В области $0 > z > -l$ — вакуум, в котором существует переменное магнитное поле с компонентами напряженности

$$H_x^0 = H_0 \cos \omega t, \qquad H_y^0 = H_0 \sin \omega t, \qquad H_z^0 = 0 \tag{1.1}$$

Ось z полагаем направленной вертикально вверх, оси x и y декартовой системы координат имеют произвольное фиксированное направление в горизонтальной плоскости. Область $z < -l$ — твердое тело, имеющее высокую проводимость. В дальнейшем эту область будем называть кожухом.

Магнитное поле в жидкости можно найти из уравнения диффузии

$$\frac{\partial \mathbf{H}^0}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \Delta \mathbf{H}^0 \tag{1.2}$$

Его компоненты имеют следующее выражение:

$$H_x^0 = H_0 e^{-\gamma z} \cos(\omega t - \gamma z), \qquad H_y^0 = H_0 e^{-\gamma z} \sin(\omega t - \gamma z), \qquad H_z^0 = 0, \tag{1.3}$$

$$\gamma = \sqrt{{}^1/_2 \omega / \nu_m}, \qquad \nu_m = 1/\sigma\mu, \qquad \delta = 1/\gamma$$

Здесь ν_m — магнитная вязкость, δ — толщина скинслоя σ, μ — проводимость и магнитная проницаемость жидкого металла. В соответствии с уравнениями магнитной гидростатики, полное давление в жидкости равно

$$P^0 = p^0 + {}^1/_2 \mu H^{02} = C - \rho g z \tag{1.4}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, p^0 — гидродинамическое давление, ${}^1/_2 \mu H^{02}$ — магнитное давление, C — константа.

Константа C может быть найдена из условия равенства полного давления на поверхности $z = 0$. Получим

$$C = {}^1/_2 \mu H_0^2, \qquad P^0 = {}^1/_2 \mu H_0^2 - \rho g z \tag{1.5}$$

Электрическое поле может быть найдено из уравнений Максвелла по заданному магнитному полю и условий непрерывности касательных составляющих на поверхностях раздела проводящая жидкость — вакуум и вакуум — кожух. В дальнейшем будут использованы уравнения магнитной гидродинамики, из которых электрическое поле можно исключить, поэтому нет особой необходимости в определении электрического поля и соответствующего распределения токов; в каждом случае электрическое поле можно определить в соответствии с найденным магнитным полем.

Рассматриваемая здесь задача является аналогом известной в гидродинамике задачи об устойчивости разрыва Релея — Тэйлора. Разница состоит лишь в том, что здесь тяжелая жидкость удерживается магнитным полем, а кожух является своеобразной системой регулирования с распределенными параметрами [1]. Аналогичная задача применительно к плазме без учета кожуха и при условии бесконечной проводимости рассматривалась в работе [2]. Ниже исследуется возможность устойчивого удержания жидкого металла в вакууме магнитным полем круговой поляризации. Металл обладает большей инерционностью, чем плазма. Время нарастания возмущения сравнительно велико и может быть значительно больше, чем период обращения поля.

Будем считать, что граница жидкости возмущается по закону

$$z = \beta(t)\, e^{i(Mx+Ny)} \tag{1.6}$$

где $\beta(t)$ — малая, пока произвольная функция времени. Вследствие этого возмущенные компоненты скорости магнитного поля и давления можно представить в виде

$$H_x = H_x^0 + h_x(z,t)\, e^{i(Mx+Ny)}, \qquad H_y = H_y^0 + h_y(z,t)\, e^{i(Mx+Ny)}$$
$$H_z = h_z(z,t)\, e^{i(Mx+Ny)}, \qquad V_x = v_x(z,t)\, e^{i(Mx+Ny)} \qquad V_y = v_y(z,t)\, e^{i(Mx+Ny)}$$
$$V_z = v_z(z,t)\, e^{i(Mx+Ny)}, \qquad P = P^0 + p_1(z,t)\, e^{i(Mx+Ny)} = P^0 + P^{(1)} \tag{1.7}$$

Для анализа устойчивости перейдем к безразмерным величинам, положим

$$x = Lx_1, \quad y = Ly_1, \quad z = L\zeta, \quad t = T\tau, \quad v_x = Uv_1, \quad v_y = Uv_2,$$
$$v_z = Uv_3, \quad P_1 = \rho U^2 \Pi, \quad h_x = H_0 h_1, \quad h_y = H_0 h_2, \quad h_z = H_0 h_3,$$
$$m = LM_1, \quad n = LN_1 \quad \alpha = L\gamma, \quad \nu = \omega T, \quad l = Ls, \quad \beta = L\eta \tag{1.8}$$

Считая возмущения малыми величинами, линеаризуем безразмерные уравнения магнитной гидродинамики [3]. Получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = a^2\left(iH\chi + h_3\frac{\partial H}{\partial \zeta}\right) - ik^2\Pi + \frac{1}{R_g}\Delta\xi, \qquad i\xi + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} = 0 \tag{1.9}$$
$$\frac{\partial v_3}{\partial \tau} = a^2 iHh_3 - \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} + \frac{1}{R_g}\Delta v_3, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \zeta}(Hv_3) + \frac{1}{R_m}\Delta\chi$$
$$\frac{\partial h_3}{\partial \tau} = iHv_3 + \frac{1}{R_m}\Delta h_3, \qquad i\chi + \frac{\partial h_3}{\partial \zeta} = 0, \qquad \Delta q = \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} - k^2 q.$$

$$\chi = mh_1 + nh_2, \quad \xi = mv_1 + nv_2, \quad k = \sqrt{m^2+n^2}, \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{m}{n}$$
$$a^2 = \frac{\mu H_0^2}{\rho U^2}, \quad R_g = \frac{UL}{\nu^2}, \quad R_m = \frac{UL}{\nu_m},$$
$$H = \frac{mH_x^0 + nH_y^0}{H_0} = ke^{-\alpha\zeta}\sin(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon)$$

Здесь v_3, h_3 — амплитуды безразмерных составляющих возмущений скорости и магнитной напряженности в направлении оси z; v_1, h_1, v_2, h_2

амплитуды возмущений скорости и поля в направлении осей x и y; Π — амплитуда возмущения полного давления.

Систему уравнений (1.9) можно решить относительно v_3 и h_3. Получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{R_g}\Delta\right)\Delta v_3=-ia^2k\,[2\alpha^2h_3\cos(\nu\tau-\alpha\zeta+\varepsilon)-$$

$$-\Delta h_3\sin(\nu\tau-\alpha\zeta+\varepsilon)]e^{-\alpha\zeta}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{R_m}\Delta\right)h_3=ike^{-\alpha\zeta}v_3\sin(\nu\tau-\alpha\zeta+\varepsilon) \qquad (1.10)$$

Возмущения магнитного поля в вакууме должны удовлетворять уравнениям

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}^{(1)}=0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}^{(1)}=0$$

Полагая

$$\mathbf{H}^{(1)}=\mathbf{grad}\,\varphi, \qquad \varphi=\Psi(\zeta,\tau)\,e^{i(Mx+Ny)}$$

получим

$$\Psi(\zeta,\tau)=A_1(\tau)\,e^{k\zeta}+B_1(\tau)\,e^{-k\zeta} \qquad (1.11)$$

Ввиду того что кожух обладает высокой проводимостью и частота поля ω достаточно велика, можно считать, что глубина скинслоя мала, и поэтому в качестве граничного условия на кожухе можно принять $H_z^{(1)}=0$ при $\zeta=-s$ (диссипативные процессы в кожухе здесь не рассматриваются). Используя это граничное условие, найдем

$$h_1(\zeta,\ \tau)=\operatorname{im}R(\tau)\operatorname{ch}k(\zeta+s), \qquad h_2(\zeta,\ \tau)=\operatorname{in}B(\tau)\operatorname{ch}(k\zeta+s),$$

$$h_3(\zeta,\tau)=kB(\tau)\operatorname{sh}k(\zeta+s) \qquad (1.12)$$

Здесь $B(\tau)$ — функция времени, подлежащая определению из граничных условий на поверхности жидкости. Уравнение свободной поверхности в безразмерных переменных может быть записано в виде:

$$F(x_1,y_1,\zeta,\tau)=\zeta-\eta(\tau)\,e^{i(mx_1+ny_1)}=0 \qquad (1.13)$$

Вектор скорости должен удовлетворять на границе жидкости кинематическому условию

$$\partial F/\partial\tau+\mathbf{V}\cdot\mathbf{grad}\,F=0 \qquad (1.14)$$

Отсюда получаем следующее граничное условие:

$$v_3(0,\tau)=d\eta/d\tau \qquad (1.15)$$

Кроме того, необходимо еще на границе жидкость — вакуум выполнить условие равенства полных давлений. При $z=\beta(t)\exp i(Mx+Ny)$

$$P^0+P^{(1)}=\frac{\mu H_0^2}{2}+\frac{\mu}{2}\left(H_x^0h_x+H_y^0h_y\right)e^{i(Mx+Ny)}+\sigma_0\left(\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\right) \qquad (1.16)$$

Здесь $P^0+P^{(1)}$ — возмущенное полное давление в жидкости, σ_0 — коэффициент поверхностного натяжения. Раскладывая левую и правую части (1.16) в ряд Маклорена по z, учитывая (1.6) и переходя к безразмерным величинам, получим

$$\Pi-F_r^{-2}\eta(\tau)=h_1\cos\nu\tau+h_2\sin\nu\tau-k^2Q\eta(\tau) \qquad (1.17)$$

или, учитывая (1.11)

$$\Pi=(F_r^{-2}-k^2Q)\,\eta(\tau)+ikB(\tau)\sin(\nu\tau+\varepsilon)\operatorname{ch}ks \qquad (1.18)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (1.10) при граничных условиях (1.15), (1.18) и одном дополнительном условии, которому должно удовлетворять магнитное поле на границе жидкость — вакуум. В случае большой частоты поля и высокой проводимости металла (идеальный скинэффект) это условие сводится к равенству нулю нормальной составляющей поля, а при достаточно глубоком скинслое — к непрерывности магнитного поля.

В дальнейшем за характерную скорость будем принимать скорость волн Альфвена $V_A = H_0\sqrt{\mu / \rho}$. При этом безразмерные параметры будут иметь следующие выражения:

$$a = 0, \qquad F_r = H_0 \sqrt{\mu/\rho g L}, \qquad Q = \sigma_0/\mu H_0^2 L \tag{1.19}$$

Эффекты вязкости учитываться не будут, поэтому далее всюду полагаем $R_g = \infty$.

§ 2. Случай бесконечной проводимости. Будем считать магнитное число Рейнольдса большим, что соответствует случаю идеального скинслоя. При этом $\mathbf{H}^0 = \mathbf{h} = 0$, и система уравнений (1.9) при граничном условии (1.15) имеет решение

$$\xi = -ik\frac{d\eta}{d\tau}e^{-k\zeta}, \qquad v_3 = \frac{d\eta}{d\tau}e^{-k\zeta}, \qquad \Pi = \frac{1}{k}\frac{d^2\eta}{d\tau^2}e^{-k\zeta} \tag{2.1}$$

Для идеального скинэффекта на поверхности жидкого металла нормальная составляющая магнитного поля должна быть равна нулю, поэтому, сохраняя обозначения предыдущего параграфа, получим при $z = 0$

$$[H_x{}^0 + h_x e^{i(Mx+Ny)}]\frac{\partial F}{\partial x} + [H_y{}^0 + h_y e^{i(Mx+Ny)}]\frac{\partial F}{\partial y} + h_z e^{i(Mx+Ny)} = 0 \tag{2.2}$$

Отсюда

$$h_3(0,\tau) = ik\eta(\tau)\sin(\nu\tau+\varepsilon), \qquad B(\tau) = \frac{i\eta(\tau)\sin(\nu\tau+\varepsilon)}{\operatorname{sh} ks} \tag{2.3}$$

Подставляя выражения $\Pi(\tau,\zeta)$ и $B(\tau)$ в (1.18), получим для определения безразмерной амплитуды возмущений поверхности дифференциальное уравнение Матье

$$d^2\eta/d\tau^2 = -k\eta(\tau)[k^2Q - F_r^{-2} + k \operatorname{cth} ks \sin^2(\nu\tau+\varepsilon)] \tag{2.4}$$

При отсутствии поля третий член правой части равен нулю, и уравнение (2.4) имеет неустойчивое решение для длинноволновых возмущений при $k^2 < F_r^{-2}Q^{-1}$. Перепишем уравнение (2.6) в виде

$$d^2\eta/d\tau^2 + k[k^2Q - F_r^{-2} + {}^1/_2 k \operatorname{cth} ks]\eta(\tau) = {}^1/_2 k\eta(\tau)\operatorname{cth} ks \cos 2(\nu\tau+\varepsilon) \tag{2.5}$$

Исследуем знак выражения, стоящего в квадратной скобке. Ввиду того, что коэффициент поверхностного натяжения мал, его влияние будет сказываться только на очень коротковолновых возмущениях. Для не очень коротких волн его влиянием можно пренебречь, и положительность этого выражения определяется условием

$$F_r^2 k \operatorname{cth} ks > 2 \tag{2.6}$$

Левая часть при $k = 0$ имеет минимальное значение, равное F_r^2/s. Таким образом, условие (2.6) будет заведомо выполнено, если

$$2s < F_r^2, \qquad \text{или} \qquad 2l < \mu H_0^2/\rho g \tag{2.7}$$

Здесь l — расстояние жидкости от кожуха.

Для ртути $H_0\sqrt{\mu/\rho} = 0{,}77$ *м/сек* при $H_0 = 10^3$ *э*. Отсюда $l < 3$ *см*. Пусть толщина слоя металла l_1, тогда из условия (1.5) можно получить

$$P = {}^1/_2\mu H_0^2 - \rho g l_1 = 0, \quad \text{или} \quad {}^1/_2\mu H_0^2 = \rho g l_1 \tag{2.8}$$

Подставляя в (2.7), получим

$$l < 2l_1 \tag{2.9}$$

Следовательно, расстояние жидкого металла от кожуха не должно превышать высоты столба жидкости.

Предполагая условие (2.7) выполненным, обозначим

$$k[k^2Q - F_r^{-2} + {}^1/_2 k \operatorname{cth} ks] = \Omega^2, \quad {}^1/_2 k \operatorname{cth} ks = G \tag{2.10}$$

Уравнение (2.4) примет вид

$$d^2\eta/d\tau^2 + \Omega^2\eta(\tau) = C_1\eta(\tau)\cos 2(\nu\tau + \varepsilon) \tag{2.11}$$

Для жидкого металла характерное время развития возмущений T при достаточно большой частоте поля ω много больше периода обращения поля $2\pi/\omega$, поэтому $\nu = \omega T \gg 1$. Имея это в виду, будем искать решение уравнения (2.11) в виде ($\varkappa$ — некоторый параметр)

$$\eta(\tau) = \eta_0(\tau) + \varkappa\eta_1(\tau) + \varkappa^2\eta_2(\tau) + \ldots \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в уравнение (2.11), получим для определения k-го приближения $\eta_k(\tau)$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$ линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью, которая зависит только от предыдущих $(k-1)$ приближений. Нулевое и первое приближения имеют выражения

$$\eta_0(\tau) = A_0\cos(\Omega\tau + \varepsilon_0) \tag{2.13}$$

$$\eta_1(\tau) = A_0C_1\left\{\frac{\cos[(\Omega - 2\nu)\tau + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon)]}{\Omega^2 - (\Omega - 2\nu)^2} - \frac{\cos[(\Omega + 2\nu)\tau + (\varepsilon_0 + 2\varepsilon)]}{(\Omega + 2\nu)^2 - \Omega^2}\right\}$$

Здесь A_0, ε_0 — произвольные постоянные, которые должны быть определены из начальных условий.

Вследствие того, что частота колебаний жидкого металла Ω значительно меньше частоты поля ν, случай резонанса невозможен. Второе, третье и т. д. приближения будут иметь соответственно порядок малости по ν, равный ν^{-4}, ν^{-6} и т. д. Ввиду $\nu \gg 1$ ряд (2.12) будет быстро сходиться при $\varkappa = 1$.

Из решений (2.12) следует, что при больших частотах исследование устойчивости можно проводить по усредненному за период обращения поля уравнению

$$d^2\eta/d\tau^2 + \Omega^2\eta(\tau) = 0 \tag{2.14}$$

которое получено в предположении, что функция $\eta(\tau)$ медленно изменяется. Таким образом, критерием устойчивости является условие (2.7).

Для систем с криволинейными магнитными силовыми линиями величина g должна быть увеличена за счет градиента магнитного давления. При этом критерий устойчивости может быть ослаблен благодаря тому, что наибольшая длина волны возмущения определяется геометрическими размерами системы. В этом случае критерием устойчивости служит неравенство (2.6), в котором вместо k подставлено $k_{\min}$. При отсутствии кожуха $s \to \infty$, устойчивость при длинноволновых возмущениях ухудшается. Условие устойчивости в этом случае принимает вид

$$\mu H_0^2 > 2\rho g \lambda_{\max} \tag{2.15}$$

Здесь λ_{max} — наибольшая возможная при данных геометрических размерах конструкции длина волны. Для цилиндрической геометрии градиент давления, отнесенный к плотности, равен $\mu H_0^2 / \rho r$, где r — радиус цилиндра. Условие (2.15) в этом случае принимает вид $r > 2\lambda_{max}$, и система, очевидно, будет неустойчивой. При наличии кожуха условие устойчивости принимает вид

$$\mathrm{cth}\,(2\pi l / \lambda_{max}) > \lambda_{max} / \pi r \tag{2.16}$$

и при достаточно малом l может быть выполнено. Действительно при малых l условие (2.16) примет вид $l < r / 2$.

§ 3. Исследование устойчивости при конечной проводимости и высокой частоте поля. Система уравнений (1.10) может быть преобразована к одному уравнению относительно переменной h_3. Однако это уравнение имеет переменные коэффициенты и не допускает разделения переменных. Поэтому, не умея решить задачу в общем виде, попытаемся найти приближенное решение в случае, когда проводимость σ и частота ω являются настолько большими, чтобы толщину скинслоя можно было считать малой. Как и прежде, вязкостью пренебрегаем: $R_g = \infty$. Будем рассматривать только длинноволновые возмущения, при которых длина волны значительно больше глубины скинслоя $\alpha / k \ll 1$. Для большой частоты поля такое рассмотрение будет достаточно убедительным, поскольку волны, длины которых имеют порядок равный глубине скинслоя, будут затухать за счет сил поверхностного натяжения и вязкости. Обратимся к системе (1.9). Магнитное поле около поверхности раздела жидкость — вакуум очень сильно изменяется. На глубине скинслоя (тонкой пленки) оно меняется от значения H_0 до нуля. Между тем, компоненты скорости не претерпевают таких резких изменений. Это дает нам право разделить весь объем, занятый жидкостью, на два слоя: один — очень тонкий скинслой, в котором имеется магнитное поле — основное и возмущенное, обладающее большим градиентом, а скорость, ввиду малой толщины слоя, считается постоянной, и остальная масса жидкости, в которой магнитное поле отсутствует.

Для второго слоя будем иметь решение (2.1), полученные для случая бесконечной проводимости. Полагая, что скорость мало зависит от z, можно продолжить решение для скорости в область скинслоя. Подставляя выражение $\exp(-k\zeta)\,d\eta / d\tau$ в первое уравнение (1.10), получим

$$(\partial^2 h_3/\partial\zeta^2 - k^2 h_3)\sin(\nu\tau - d\zeta + \varepsilon) = 2\alpha^2 h_3 \cos(\nu\tau - d\zeta + \varepsilon) \tag{3.1}$$

Вследствие $k / \alpha \ll 1$ вторым членом в левой части (3.1) можно пренебречь. Тогда

$$\partial^2 h_3/\partial\zeta^2 \sin(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon) = 2\alpha^2 h_3 \cos(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon) \tag{3.2}$$

Решением этого уравнения, затухающим на глубине скинслоя, будет

$$h_3 = \Psi_1(\tau) e^{-\alpha\zeta} \sin(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon) \tag{3.3}$$

Здесь $\Psi_1(\tau)$ — произвольная функция, которая может быть определена из второго уравнения (1.10). Ввиду того что v_3 слабо зависит от z, можем это уравнение удовлетворить при $z = 0$. Получим

$$\Psi(\tau) = ikd\eta / d\tau$$

при этом использовалось равенство $2\alpha^2 = R_m$. Таким образом,

$$h_3 = ik\eta(\tau) e^{-\alpha\zeta} \sin(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon) \tag{3.4}$$

Из непрерывности нормальной составляющей магнитной напряженности получим

$$B(\tau) = i\eta(\tau)\frac{\sin(\nu\tau + \varepsilon)}{\operatorname{sh} ks} \tag{3.5}$$

В соответствии с (1.11), компоненты поля в вакууме равны

$$h_1 = -\frac{m}{\operatorname{sh} ks}\eta(\tau)\operatorname{ch} k(\zeta + s), \quad h_2 = -\frac{n\eta(\tau)}{\operatorname{sh} ks}\operatorname{ch} k(\zeta + s).$$

$$h_3 = \frac{ik\eta(\tau)}{\operatorname{sh} ks}\operatorname{sh} k(\zeta + s) \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4) в (1.9), найдем

$$\Pi = \frac{1}{k}\frac{d^2\eta}{d\tau^2}e^{-k\zeta} \tag{3.7}$$

т. е. добавочное магнитное давление в скинслое имеет порядок k/α и в рассматриваемом приближении не учитывается. Используя (3.5), получим из (1.18) для определения функции $\eta(\tau)$ уравнение (2.5).

Таким образом, для анализа устойчивости в случае конечной проводимости, но большой частоты поля служит тоже уравнение (2.5), что и для случая бесконечной проводимости. Следовательно, для конечной проводимости при большой частоте справедлив критерий устойчивости (2.7). Однако нужно отметить, что полученное нами приближенное решение (3.4) не обладает необходимым произволом и не позволяет удовлетворить условиям непрерывности касательной составляющей возмущения магнитной напряженности. Величины h_x и h_y будут испытывать разрыв на поверхности раздела жидкость — вакуум, в то время как величины невозмущенного поля $H_x{}^0$ и $H_y{}^0$ непрерывны.

§ 4. Исследование устойчивости в случае малых магнитных чисел Рейнольдса (толстого скинслоя). Рассмотрим теперь обратную задачу. Будем считать, что длина волны возмущения имеет порядок, много меньший глубины скинслоя $\alpha \ll k$, т. е. произведение проводимости на частоту сравнительно невелико. В этом случае магнитное число Рейнольдса $R_m = L^2\omega / \nu_m$ мало, и можем искать решение системы (1.10) в виде ряда по степеням магнитного числа Рейнольдса R_m

$$h_3 = R_m h_{31} + R_m{}^2 h_{32} + \ldots; \qquad v_3 = v_{30} + R_m v_{31} + \ldots$$

$$\Pi = \Pi_0 + R_m \Pi_1 + \ldots, \qquad \xi = \xi_0 + R_m \xi_1 + \ldots,$$

$$\chi = R_m \chi_1 + R_m{}^2 \chi_2 + \ldots$$

Перепишем систему уравнений (1.10) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta v_3 = -ik[2\alpha^2 h_3 \cos(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon) - \Delta h_3 \sin(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon)]e^{-\alpha\zeta} \tag{4.1}$$

$$\Delta h_3 = R_m\left[\frac{\partial h_3}{\partial\tau} - ikv_3 e^{-\alpha\zeta}\sin(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon)\right] \tag{4.2}$$

Для нулевого приближения опять будем иметь чисто гидродинамический случай, рассмотренный в § 2. Поэтому

$$v_{30} = \frac{d\eta}{d\tau}e^{-k\zeta}, \qquad \Pi_0 = \frac{1}{k}\frac{d^2\eta}{d\tau^2}e^{-k\zeta}, \qquad \xi_0 = -ik\frac{d\eta}{d\tau}e^{-k\zeta} \tag{4.3}$$

Ввиду отсутствия проводимости $R_m = 0$ движение жидкости в нулевом приближении не вызывает возмущения магнитного поля внутри жидкости, а следовательно, в силу непрерывности и в вакууме.

Для первого приближения система уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2 v_{31}}{\partial\zeta^2} - k^2 v_{31}\right) = ike^{-\alpha\zeta}\left(\frac{\partial^2 h_{31}}{\partial\zeta^2} - k^2 h_{31}\right)\sin(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon) \qquad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 h_{31}}{\partial\zeta^2} - k^2 h_{31} = -ik\frac{d\eta}{d\tau}e^{-(\alpha+k)\xi}\sin(\nu\tau - \alpha\zeta + \varepsilon) \qquad (4.5)$$

Обозначим $dv_{31} / d\tau = f_1(\tau, \zeta)$. Из (4.4), (4.5) найдем

$$h_{31} = A_1(\tau)e^{-k\zeta} - \frac{ik}{2\alpha(k^2 + q^2)}\frac{d\eta}{d\tau}[-q\cos(\nu\tau + \varepsilon - \alpha\zeta) + k\sin(\nu\tau + \varepsilon - \alpha\zeta)]e^{-q\zeta} \qquad (4.6)$$

$$f_1 = \Phi_1(\tau)e^{-k\zeta} - \frac{k^2}{8\alpha}\frac{d\eta}{d\tau}\left\{-\frac{1}{q} + \frac{1}{k^2 + (q+\alpha)^2}[k\cos 2(\nu\tau + \varepsilon - \alpha\zeta) + (2\alpha + k)\sin 2(\nu\tau + \varepsilon - \alpha\zeta)]\right\} \qquad (4.7)$$

Здесь $A_1(\tau)$ и $\Phi(\tau)$ — произвольные функции времени, $q = k + \alpha$.

Так как условие $v_3(0, \tau) = d\eta / d\tau$ выполнено уже для нулевого приближения, для $v_{31}(0, \tau)$ будем иметь условие $v_{31}(0, \tau) = 0$. Отсюда

$$\Phi_1(\tau) = \frac{k^2}{8\alpha}\left[-\frac{1}{q} + \frac{1}{k^2 + (q+\alpha)^2}(k\cos 2\theta + (q + \alpha)\sin 2\theta)\right]\frac{d\eta}{d\tau}, \quad \theta = \nu\tau + \varepsilon \qquad (4.8)$$

На свободной поверхности необходимо удовлетворить условию непрерывности нормальной и касательной составляющих магнитного поля. Из (1.9) следует, что

$$\chi_1 = mh_{11} + nh_{21} = -\partial h_{31}/\partial\zeta$$

Для вакуума, используя (1.11), получим

$$\chi_1 = ik^2 B(\tau)\operatorname{ch} k(\zeta + s)$$

Сравнивая эти выражения при $z = 0$, найдем

$$\partial h_{31}/\partial\zeta = k^2 B(\tau)\operatorname{ch} ks \qquad (4.9)$$

Из равенства нормальных составляющих будем иметь

$$h_{31} = kB(\tau)\operatorname{sh} ks \qquad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) при помощи (4.6) можно теперь определить

$$B(\tau) = -i\frac{d\eta}{d\tau}\frac{\alpha\cos\theta - (2k + \alpha)\sin\theta}{2k(k^2 + q^2)(\operatorname{sh} ks + \operatorname{ch} ks)} \qquad (4.11)$$

$$A_1(\tau) = -i\frac{d\eta}{d\tau}\frac{1}{2\alpha(k^2 + q^2)(1 + \operatorname{th} ks)}\{[kq + (q^2 - k\alpha)\operatorname{th} ks] \times \cos\theta + [k^2 + q^2\operatorname{th} ks]\sin\theta\} \qquad (4.12)$$

Из (1.9) получим для первого приближения возмущения полного давления равенство при $\zeta = 0$

$$\Pi_1 = \frac{1}{k^2}\left\{-\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + ik\left[\sin\theta\frac{\partial h_{31}}{\partial \zeta} + \alpha(\sin\theta + \cos\theta)h_{31}(0,\tau)\right]\right\} \quad (4.13)$$

Используя это равенство и учитывая (4.6) — (4.12), получим из сравнения полных давлений на поверхности жидкости следующее уравнение для амплитуды возмущения границы $\eta(\tau)$:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{kR_m}{4q(k^2+q^2)(1+\operatorname{cth} ks)}\left\{2k^2 - \alpha^2 + (k^2+q^2)\operatorname{cth} ks + \right.$$

$$\frac{2q^2}{k[k^2+(q+\alpha)^2]}[-2k^3 + 2\alpha k^2 + k\alpha^2 + 4\alpha^3 - k(k+q)\operatorname{cth} ks]\cos 2\theta -$$

$$\left. - \frac{2\alpha q}{k^2+(k+q)^2}[2k^2 + 2q^2 + 2\alpha k + (k^2+q^2)\operatorname{cth} ks]\sin 2\theta\right\}\times$$

$$\times\frac{d\eta}{d\tau} + (k\eta/\tau)(Qk^2 - F_r^{-2}) = 0 \quad (4.14)$$

Усредненное за период обращения поля уравнение имеет вид

$$d^2\eta / d\tau^2 + 2r d\eta / d\tau - \Omega_1\eta(\tau) = 0$$

$$r = \frac{kR_m}{8q(k^2+q^2)(1+\operatorname{cth} ks)}[2k^2 - \alpha^2 + (k^2+q^2)\operatorname{cth} ks].$$

$$\Omega_1 = F_r^{-2} - Qk^2 \quad (4.15)$$

Корни характеристического уравнения для (4.15) имеют значения $-r \pm \sqrt{r^2 + \Omega_1^2}$. Таким образом, в случае $\Omega_1 > 0$ система неустойчива при любом значении амплитуды магнитного поля. Следовательно при слабой проводимости и малой частоте поля стабилизируются только очень короткие волны за счет сил поверхностного натяжения. Проведенный анализ показывает, что волны, имеющие длину порядка глубины скин-слоя, могут возрастать с течением времени. Поэтому для стабилизации системы необходимо иметь настолько большую частоту, чтобы возмущения, развивающиеся внутри скинслоя, гасились силами поверхностного натяжения. Возмущения достаточно большой длины волны, как следует из § 2 и 3, будут стабилизироваться кожухом.

Автор благодарен Ю. И. Самойленко за постановку задачи и полезное обсуждение.

Поступило 26 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко Ю. И. О разрешающей способности пространственно распределенных систем управления. Техническая кибернетика, 1966, № 4.
2. Беркович Дж., Град Г., Рубин Г. Проблемы устойчивости в магнитной гидродинамике. II Международн. конф. по мирному использованию атомной энергии (избр. док. иностр. ученых), Женева, 1958, т. I, стр. 109.
3. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Изд. «Мир», 1964.