РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ШАРА В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д. Е. ХЕЙСИН

(Ленинград)

Пусть изотропный упругий шар радиуса R располагается в однородной сжимаемой жидкости плотностью ρ_2. Скорость звука в жидкости равна c_0. Материал шара имеет плотность ρ_1. Жидкость считается идеальной, а внутренним трением в шаре будем пренебрегать.

Рассмотрим малые радиальные колебания (пульсации) шара, зависящие лишь от координаты r и времени t. Сферические координаты выберем с началом в центре шара. Заметим, что любое решение для сферической области может быть сведено к исследованию граничных задач для радиальных функций при помощи метода шаровых векторов (*см.* [1–3]).

При малых колебаниях шара движение в жидкости имеет потенциал $\varphi_2(r, t)$. Учитывая центральную симметрию задачи, введем потенциал упругого смещения $\varphi_1(r, t)$ в шаре согласно $u_r = \partial\varphi_1 / \partial r$. Здесь u_r — радиальное упругое смещение шара.

Таким образом, задача сводится к определению потенциальных функций φ_1 и φ_2. Функция $\varphi_2(r, t)$ должна удовлетворять волновому уравнению во внешней области

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}=0 \qquad (R<r<\infty) \tag{1}$$

Функция $\varphi_1(r, t)$ должна удовлетворять волновому уравнению внутри шара

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=0 \qquad (0\leqslant r\leqslant R) \tag{2}$$

Здесь c_l — скорость продольных упругих волн в шаре.

Ясно, что в начале координат $(r = 0)$ потенциал φ_1 должен быть ограничен, а потенциал φ_2 должен убывать при $r\to\infty$.

На поверхности шара $(r = R)$ потенциалы φ_1 и φ_2 связаны двумя граничными условиями. Кинематическое условие заключается в равенстве радиальных скоростей поверхности шара и прилегающих к ней частиц жидкости

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=\frac{\partial u_r}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t\,\partial r} \quad \text{при } r=R \tag{3}$$

Второе условие (динамическое) выражается в равенстве давления в жидкости p радиальным напряжениям на поверхности шара

$$\sigma_{rr}=-p \quad \text{при } r=R$$

Отсюда

$$\rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=\rho_1\left(c_l^2\Delta\varphi_1-4c_t^2\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) \quad \text{при } r=R \tag{4}$$

Здесь c_l и c_t — скорости продольных и поперечных упругих волн в шаре.

Рассмотрим в качестве начального состояния равномерное статическое сжатие шара, когда упругое смещение его поверхности равно u_0. Упругие смещения внутри шара определятся в этом случае по формуле

$$u_{r0}=u_0 r/R \tag{5}$$

Пусть в момент времени $t = 0$ начальное сжатие внезапно снимается. Скорость деформации шара до и в начальный момент времени равна нулю, а упругое перемещение равно n_{r0}. Для дальнейшего имеет смысл привести начальные условия к нулевым. С этой целью будем искать решение для упругих смещений в шаре в виде

$$u_r(r, t)=u_{r0}(r)+u_{rt}(r, t) \tag{6}$$

Здесь u_{r0} определится согласно (5), а искомая функция u_{rt} удовлетворяет нулевым начальным условиям. Переходя к потенциалу смещения φ_1, будем искать его в виде, аналогичном (6), т. е.

$$\varphi_1(r, t)=\varphi_0(r)+\varphi_{1t}(r, t), \qquad \left(\varphi_0(r)=\int_0^r u_0\frac{r}{R}\,dr=u_0\frac{r^2}{2R}\right) \tag{7}$$

Искомая функция φ_{1t} удовлетворяет нулевым начальным условиям.

Подставляя выражение (7) для φ_1 в уравнение (2), получим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi_{1t}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi_{1t}}{\partial r}-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\varphi_{1t}}{\partial t^2}=-3\frac{u_0}{R} \tag{8}$$

Жидкость в начальный момент времени будем полагать находящейся в покое. Таким образом, при $t=0$ потенциал движения в жидкости φ_2 равен нулю со всеми своими производными для всех $r>R$.

После того как начальное сжатие будет снято, возникнут радиальные упругие колебания шара, которые будут возбуждать в жидкости расходящиеся сферические волны. Поскольку приток энергии извне отсутствует, энергия системы волн, расходящихся в неограниченную жидкую среду, будет сообщаться ей колеблющимся шаром, так что его колебания со временем будут затухать.

При определенных условиях, например при малых значениях $\rho_2c_0\ll\rho_1c_l$, можно говорить о собственных колебаниях шара с малым коэффициентом затухания. В этом случае для области $R<r<\infty$ решение можно искать в виде расходящейся сферической волны

$$\varphi_2=A\frac{e^{ik_2r}}{r}e^{i\omega t}\qquad\left(k_2=\frac{\omega}{c_0}\right) \tag{9}$$

Здесь A — амплитуда, k_2 — волновое число, являющееся в данном случае комплексной величиной.

Внутри шара принимаем решение, конечное во всем его объеме,

$$\varphi_1=B\frac{\sin k_1r}{r}e^{i\omega t}\qquad\left(k_1=\frac{\omega}{c_l}\right) \tag{10}$$

Используя условия (3) и (4) на границе сферы получим уравнение для определения величины ω

$$\left[\frac{4c_t^2}{c_l^2}\frac{1}{k_1^2R^2}+\left(\frac{k_1R}{\operatorname{tg}k_1R}-1\right)^{-1}\right](ik_2R-1)=\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11}$$

Если $\rho_2=0$, то вместо (11) получим известное уравнение для собственных частот радиальных колебаний изотропного упругого шара со свободной от напряжений поверхностью (колебания первого типа, см. [3, 4])

$$\frac{\operatorname{tg}kR}{kR}=\left(1-\frac{c_l^2}{4c_t^2}(kR^2)\right)^{-1} \tag{12}$$

Уравнение (12) имеет счетное множество действительных корней, которые близки к вычисленным по формуле $kR=n\pi-1/n\pi$, за исключением очевидного корня $kR=0$. Корни уравнения (12) определяют дискретный спектр собственных волновых чисел или частот свободных колебаний упругого шара в вакууме.

Нетрудно видеть, что уравнение (11) не имеет ни действиельных, ни чисто мнимых корней. Все корни этого уравнения будут комплексными, соответствующими счетному множеству собственных форм свободных колебаний упругого шара в сжимаемой жидкости. При этом действительная часть корня определяет основную (несущую) частоту соответствующей формы, а мнимая часть представляет собой коэффициент затухания. Отсюда следует, что каждая форма свободных колебаний упругого шара в жидкости будет иметь вид синусоиды, затухающей по экспоненциальному закону.

При $\rho_1\approx\rho_2$ и $c_0\approx c_t$, как это имеет место, например, для ледяного шара в воде, затухание уже не будет малым, так что следует решать нестационарную задачу с учетом начальных условий. С этой целью используем одностороннее преобразование Лапласа (см. [3]).

Обозначим трансформанту Лапласа функции $\varphi_{1t}(r,t)$ через

$$X(r,\ s)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi_{1t}(r,t)\,dt$$

и преобразуем на комплексную плоскость s уравнение (8). В результате получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, которому должна удовлетворять функция-изображение $X(r,s)$

$$\frac{d^2X}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dX}{dr}-\frac{s^2}{c_l^2}X=-3\frac{u_0}{sR}\qquad(0\leqslant r\leqslant R)$$

Общее решение этого уравнения, конечное во всем объеме шара, включая его центр, будет

$$X(r, s) = B\left(r\left[i\frac{\pi s}{2c_l}\right]^{1/2}\right)^{-1}\sin\frac{irs}{c_l} + 3\frac{c_l^2}{s^2}\frac{u_0}{sR}$$

Здесь B — некоторая функция параметра s.

Введем далее трансформанту Лапласа функции $\varphi_2(r, t)$

$$F(r, s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\varphi_2(r, t)\,dt$$

и преобразуем волновое уравнение (1) на комплексную плоскость s. Учитывая нулевые начальные условия, для потенциала φ_2 получим однородное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $F(r, s)$

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF}{dr} - \frac{s^2}{c_0^2}F = 0 \qquad (R < r < \infty)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$F = \frac{C_1}{r}\exp\frac{-sr}{c_0} + \frac{C_2}{r}\exp\frac{sr}{c_0}$$

Здесь C_1 и C_2 — некоторые функции параметра s. Если рассматривать полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$, то, учитывая ограниченность функции F при $r \to \infty$, следует полагать $C_2 = 0$. Если рассматривать полуплоскость $\operatorname{Re} s < 0$, то надо принимать $C_1 = 0$. Как будет видно из дальнейшего, следует полагать $C_1 = 0$. Таким образом, решение для F будет

$$F = \frac{C_2(s)}{r}\exp\frac{sr}{c_0}$$

Неизвестные функции $B(s)$ и $C_2(s)$ найдем, используя граничные условия (3) и (4) на поверхности шара. При этом граничные условия следует предварительно преобразовать на комплексную плоскость s. Определив таким образом трансформанты $X(r, s)$ и $F(r, s)$, искомые потенциалы получим, используя формулу обращения при помощи интеграла Меллина.

Например, для потенциала упругого смещения шара $\varphi_1(r, t)$ будем иметь

$$\varphi_1(r, t) = u_0\frac{r^2}{2R} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left\{B(s)\left(r\left[i\frac{\pi}{2}\frac{s}{c_l}\right]^{1/2}\right)^{-1}\sin\frac{irs}{c_l} + 3\frac{c_l^2}{s^3}\frac{u_0}{R}\right\}e^{st}\,ds \tag{13}$$

Дифференцируя (13) по r и подставляя значение $B(s)$, получим выражение для упругого смещения u_r. Полагая $r = R$, получим окончательно для смещения поверхности шара:

$$u = u_0 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{u_0(3c_l^2 - 4c_t^2)}{s\Phi(s)}e^{st}ds \tag{14}$$

$$\Phi(s) = \frac{(sR)^2\sin(isR/c_l)}{\sin(isR/c_l) - (isR/c_l)\cos(isR/c_l)} + 4c_t^2 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{(sR)^2}{1 - sR/c_0}$$

Используя теорему о вычетах, можно вычислить этот интеграл, определив полюса подынтегрального выражения. Вычет относительно полюса $s = 0$ равняется $-u_0$. Таким образом, будем рассматривать интеграл

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{u_0(3c_l^2 + 4c_t^2)}{s\Phi(s)}e^{st}ds \tag{15}$$

Этот интеграл можно представить бесконечной суммой вычетов относительно полюсов подынтегрального выражения, определяемых корнями трансцендентного уравнения

$$\Phi(s) = 0 \tag{16}$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (10), полученному выше, а при замене $s = i\omega$ полностью совпадает с ним. Заметим, что в этом случае частота ω комплексная величина.

Комплексный спектр поля излучения упругого шара, свободно колеблющегося в сжимаемой жидкости, получим, применив преобразование Фурье к интегралу (15). Учитывая, что при $t \leqslant 0$ колебания шара отсутствуют, будем иметь

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty e^{-i\omega t} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{u_0(3c_l^2 - 4c_t^2)}{s\Phi(s)} e^{st} ds\, dt \tag{17}$$

Здесь ω — действительное число. Поменяв в (17) порядок интегрирования и учитывая условие затухания колебаний при $t \to \infty$ (чему соответствует $\operatorname{Re} s < 0$), получим для комплексного спектра

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{u_0(3c_l^2 - 4c_t^2)\, ds}{s(s - i\omega)\Phi(s)} \tag{18}$$

Здесь интеграл берется как сумма вычетов по всем полюсам подынтегрального выражения, кроме полюса $s = 0$.

При $\rho_2 = 0$ уравнение (14) будет иметь все корни чисто мнимые, а после замены $s = i\nu$ — все корни действительные ($\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$), совпадающие с корнями уравнения (12). В этом случае при каждом значении $\omega = \nu_j$ интеграл (18) будет расходиться, что соответствует j-й спектральной линии дискретного спектра свободных колебаний упругого шара при отсутствии сопротивления внешней среды.

При $\rho_2 \neq 0$ полюса подынтегрального выражения смещаются с мнимой оси на комплексную плоскость влево. Вычету относительно каждого такого полюса будет соответствовать собственная форма свободных колебаний упругого шара в жидкости. Как говорилось выше, такая форма имеет характер затухающей синусоиды. Комплексный спектр каждой формы — сплошной и определяется формулой (см. [5])

$$S_n(\omega) = \frac{\omega}{\alpha_n^2 - \omega^2 + \omega_n^2 + 2i\alpha_n\omega}$$

где α_n — коэффициент затухания, а ω_n — основная частота $n = \acute{u}$ формы.

Величина $z_n = -\alpha_n + i\omega_n$ — корень с порядковым номером n уравнения (16). По мере увеличения номера n величина коэффициента затухания возрастает, а частота ω_n убывает по сравнению с частотой ν_n свободных колебаний шара со свободной от напряжений границей.

Спектр $S_n(\omega)$ затухающей синусоиды имеет максимум, соответствующий основной частоте $\omega = \omega_n$. По мере увеличения коэффициента затухания, т. е. с увеличением порядкового номера n, этот максимум будет выравниваться.

Суммарный спектр возмущений, вызванных шаром, свободно колеблющимся в сжимаемой жидкости, получим, просуммировав спектры всех его форм, что эквивалентно вычислению интеграла (18) как суммы вычетов. Таким образом вместо дискретного спектра получим сплошной спектр с относительными максимумами, соответствующими основным частотам ω_n форм свободных колебаний. Учитывая условие $\omega_n < \nu_n$, можно полагать, что спектр будет сдвинут в сторону низких частот.

По мере уменьшения плотности внешней среды ($\rho_2 \to 0$), а точнее — импеданса $\rho_2 c_0$, максимумы будут становиться все более острыми, и спектр будет вырождаться в линейчатый. При этом $\alpha_n \to 0$, а $\omega_n \to \nu_n$.

Аналогичным образом может быть рассмотрена плоская задача о радиальных колебаниях цилиндра бесконечной длины, а также ряд других задач, связанных с излучением упругих волн телами, погруженными в сжимаемую жидкость.

Поступило 5 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрашень Г. И. Решения векторных предельных задач математической физики в случае шара. Докл. АН СССР, 1945, т. 46, № 7.
2. Петрашень Г. И. Симметрия вращения и шаровые векторы. Уч. зап. ЛГУ, 1949, вып. 17.
3. Петрашень Г. И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы. Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат., 1950, вып. 21, № 135.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Изд-во «Наука», 1965.
5. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Гостехиздат, 1953.