

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

В. Н. СУХОВ

(Москва)

Для определения частот колебаний жидкости, частично заполняющей произвольную полость вращения, в настоящее время широко используются вариационные методы [1-4], требующие применения цифровых машин. В работе [5] дана методика приближенного решения рассматриваемой задачи для полости, слабо отличающейся от полости, решение для которой известно. В настоящей работе получено приближенное дифференциальное уравнение первого порядка для квадрата частоты и уровня заполнения в качестве независимой переменной. Изложенным способом были проведены расчеты ряда полостей (сфера, цилиндр со сферическим днищем, конус с различными углами раствора, тор). Сравнение этих результатов с результатами, полученными другими теоретическими методами и экспериментально, показывает достаточную для технических приложений точность предлагаемого метода.

Автор считает своим долгом поблагодарить И. В. Колина за проведение расчетов.

1. Рассмотрим колебания жидкости в полости вращения, сечение которой в плоскости  $xz$  приведено на фиг. 1. При некоторых уровнях заполнения  $h$  полости жидкостью в сечении плоскостью, параллельной  $yz$ , имеем односвязанные или двухсвязанные области. Движение жидкости при малых колебаниях можно описать в цилиндрической системе координат  $(x, r, \theta)$  при помощи потенциала скоростей

$$\varphi = \varphi(x, r, \theta) e^{i\omega t} \quad (1.1)$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний. Функция  $\varphi(x, r, \theta)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

и следующим граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{на } \Sigma \quad (1.3)$$

Здесь  $\Sigma$  — свободная поверхность,  $S$  — смачиваемая поверхность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\tau$  — объем, занятый жидкостью. Пусть задача для некоторого уровня заполнения  $h$  полости жидкостью решена, т. е. найдены собственные частоты колебаний  $\omega_i$  и соответствующие им функции  $\varphi_i(r, \theta, x)$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением колебаний, когда по окружности полости укладывается только одна волна. В этом случае

$$\varphi_i(r, \theta, x) = \Phi_i(r, x) \cos \theta \quad \left( \int_{\Sigma} \varphi_i \varphi_j dS = 0 \quad (i \neq j) \right) \quad (1.4)$$

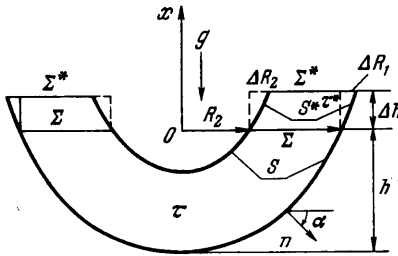
Функции  $\varphi_i$  обладают, как указано, свойством ортогональности. Кроме того, на свободной поверхности

$$-\omega_i^2 \varphi_i + g \partial \varphi_i / \partial x = 0 \quad (1.5)$$

Пусть уровень заполнения увеличился на бесконечно малую величину  $\Delta h$  (фиг. 1). Обозначим через  $\Sigma^*$  новую свободную поверхность,  $S^*$  — увеличение смачиваемой поверхности,  $\tau^*$  — увеличение объема жидкости.

Колебания какого-либо тона жидкости со свободной поверхностью  $\Sigma^*$  будут содержать все гармоники колебаний жидкости в объеме  $\tau$ , обладающем свободной поверхностью  $\Sigma$ . Обозначим потенциал скоростей, соответствующий  $i$ -му тону колебаний в объеме  $\tau + \tau^*$ , через  $\varphi^o(x, r, \theta)$

$$\varphi^o(x, r, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \varphi_j(x, r, \theta) \quad (1.6)$$



Фиг. 1

Здесь  $C_j$  — произвольные постоянные, функции  $\varphi_j(x, r, \theta)$  в области  $\tau^*$  аналитические продолжения соответствующих функций из области  $\tau$ . На свободной поверхности  $\Sigma^*$  должно выполняться условие

$$-\omega^2 \varphi^\circ + g \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

Систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $C_j$  можно получить, умножая (1.7) на соответствующие функции  $\varphi_i$  и интегрируя по свободной поверхности  $\Sigma^*$ . Например,  $i$ -е уравнение имеет вид

$$-\omega^2 \int_{\Sigma^*} \varphi^\circ \varphi_i dS + g \int_{\Sigma^*} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} \varphi_i dS = 0 \quad (1.8)$$

Используя формулу Грина, преобразуем второй член в формуле (1.8)

$$g \int_{\Sigma^*} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} \varphi_i dS = g \int_{\tau^*} \text{grad } \varphi^\circ \cdot \text{grad } \varphi_i d\tau - g \int_{\Sigma^*} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial n} \varphi_i dS + g \int_{\Sigma^*} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} \varphi_i dS \quad (1.9)$$

С точностью до величин порядка  $O(\Delta h^2)$  интеграл по объему  $\tau^*$  можно заменить интегралом по  $\tau^{**}$ , который получается, если на свободной поверхности построить прямой цилиндр высотой  $\Delta h$  (фиг. 1)

$$\int_{\tau^*} \text{grad } \varphi^\circ \cdot \text{grad } \varphi_i d\tau \approx \int_{\tau^{**}} \text{grad } \varphi^\circ \cdot \text{grad } \varphi_i d\tau = \pi \Delta h \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} \Phi_i r \Big|_{R_2}^{R_1} + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \int_{R_2}^{R_1} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} \Phi_i r dr + \frac{\omega_i^4}{g^2} C_i \int_{R_2}^{R_1} \Phi_i^2 r dr \right\} + O(\Delta h^2) \quad (1.10)$$

$$\int_{\Sigma^*} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial n} \varphi_i dS = \pi \left\{ \Delta h \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} \Phi_i r \Big|_{R_2}^{R_1} - \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i r \Big|_{R_1} \Delta R_1 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i r \Big|_{R_2} \Delta R_2 \right\} + O(\Delta h^2) \quad (1.11)$$

В последней формуле выражение в фигурных скобках при достаточно гладких стенках полости в силу того, что функции  $\Phi_i(z, r)$  удовлетворяют граничным условиям на стенке, имеет порядок  $O(\Delta h^2)$ .

Функции  $\varphi^\circ$  и  $\varphi_i$  на  $\Sigma^*$  с точностью до  $O(\Delta h^2)$  можно представить в виде

$$\varphi^\circ|_{\Sigma^*} = \varphi_\Sigma^\circ + \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} \Big|_{\Sigma} \Delta h = \sum_{j=1}^n C_j \left( 1 + \omega_j^2 \frac{\Delta h}{g} \right) \varphi_j \Big|_{\Sigma}, \quad \varphi_i|_{\Sigma^*} = \left( 1 + \omega_i \frac{\Delta h}{g} \right) \varphi_j \Big|_{\Sigma} \quad (1.12)$$

Учитывая условия ортогональности, имеем

$$\int_{\Sigma^*} \varphi^\circ \varphi_i dS = C_i \int_{\Sigma} \varphi_i^2 dS + 2C_i \frac{\omega_i^2 \Delta h}{g} \int_{\Sigma} \varphi_i^2 dS + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \int_{\Sigma^* - \Sigma} \varphi_i \varphi_j dS = \quad (1.13)$$

$$= C_i \left( 1 + 2 \frac{\omega_i^2 \Delta h}{g} \right) \int_{\Sigma} \varphi_i^2 dS + \pi \left( \sum_{j=1}^{\infty} C_j \Phi_j \Phi_i R_1 \Delta R_1 - \sum_{j=1}^{\infty} C_j \Phi_j \Phi_i R_2 \Delta R_2 \right) + O(\Delta h^2)$$

Систему уравнений (1.8) для определения постоянных  $C_j$  можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j \alpha_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.14)$$

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  с учетом соотношений (1.9)–(1.13) имеют вид

$$\alpha_{ii} = [-\omega^2(1 + 2\omega_i^2\Delta hg^{-1}) + \omega_i^4\Delta hg^{-1} + \omega_i^2]J_1(R_1, R_2) + g\Delta hJ_2(R_1, R_2) + [\Phi_i^2(R_1)R_1\Delta R_1 - \Phi_i^2(R_2)R_2\Delta R_2](\omega_i^2 - \omega^2) \quad (1.15)$$

$$\alpha_{ij} = [\Phi_j(R_1)\Phi_i(R_1)\Delta R_1 - \Phi_j(R_2)\Phi_i(R_2)R_2\Delta R_2](\omega_j^2 - \omega^2) + g\Delta hJ_2(R_1, R_2) \quad (1.16)$$

В приведенных формулах:

$$J_1(R_1, R_2) = \int_{R_2}^{R_1} \Phi_i^2 r dr, \quad J_2(R_1, R_2) = \int_{R_2}^{R_1} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} \Phi_i r dr \quad (1.17)$$

Нетривиальные решения системы уравнений (1.14) существуют, если ее определитель  $\Delta(\omega) = |\alpha_{ij}|$  равен нулю. Все недиагональные члены определителя имеют порядок не ниже  $O(\Delta h)$ , поэтому

$$\Delta(\omega) = \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_{ii} + O(\Delta h^2) \quad (1.18)$$

Следовательно, частота  $\Omega_i$  колебаний  $i$ -го тона при свободной поверхности жидкости  $\Sigma^*$  определяется уравнением  $\alpha_{ii} = 0$

$$\Omega_i^2 = \frac{\omega_i^2 + g\Delta hJ_2(R_1, R_2)/J_1(R_1, R_2)}{1 + \omega_i^2\Delta hg^{-1}} \quad (1.19)$$

При выводе этого соотношения учитывалось, что  $\Omega_i^2$  и  $\omega_i^2$  отличаются на величину  $O(\Delta h)$ .

Формулу (1.19) можно представить в несколько ином виде. Пусть  $\Omega_i^*$  — частота колебаний в полости, образованная областью  $\tau$  и прямым цилиндром высотой  $\Delta h$ , основанием которого служит свободная поверхность  $\Sigma$ .

Легко показать, что имеет место следующее равенство:

$$\Omega_i^2 = (\Omega_i^*)^2 J_1(R_1, R_2) / J_1(R_1 + \Delta R_1, R_2 + \Delta R_2) \quad (1.20)$$

Для вычисления  $\Omega_i$  необходимо знать вид функции  $\Phi_i(r, x)$ . Удовлетворительные результаты можно получить, если задать эту функцию приближенно. Функцию  $\Phi_i(r, x)$  можно разложить в ряд

$$\Phi_i(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(r) \left[ A_n \exp \frac{\lambda_n x}{R_1} \right] + A_{-n} \exp \left( \frac{-\lambda_n x}{R_1} \right) \quad (1.21)$$

Здесь  $A_n$  и  $A_{-n}$  — постоянные, а функции  $Z_n(r)$  удовлетворяют уравнению Бесселя

$$r^2 \frac{d^2 Z_n}{dr^2} + r \frac{dZ_n}{dr} + \left( \frac{\lambda_n^2}{R_1^2} r^2 - 1 \right) Z_n = 0 \quad (1.22)$$

В выражении (1.21) функции  $Z_n$  будем выбирать так, чтобы для приближенного описания функции  $\Phi_i(r, x)$  можно было ограничиться только одним членом ряда; например,

$$\Phi_i(r, x) \approx Z_1(r) [A_1 \exp(\lambda_1 x / R_1) + A_{-1} \exp(-\lambda_1 x / R_1)] \quad (1.23)$$

В этом случае для  $\Omega_1^2$  имеем

$$\Omega_1^2 = (\omega_1^2 + g\lambda_1^2\Delta hR_1^{-2}) / (1 + \omega_1^2\Delta hg^{-1}) \quad (1.24)$$

Если известно значение  $\lambda_1^2$  в зависимости от конфигурации полости и уровня ее заполнения, то формулу (1.24) можно непосредственно использовать для расчета частот колебаний. Примеры подобных расчетов будут приведены ниже. Остановимся на выборе вида функций  $Z_1(r)$  для различных полостей.

Особенно просто это делается для цилиндра. В этом случае

$$Z_1(r) = I_1(\lambda_1 r / R) \quad (\lambda_1 = 1.84) \quad (1.25)$$

Здесь  $I_1(\lambda_1 r / R)$  — функция Бесселя первого рода и первого порядка.

Для концентрического цилиндра

$$Z_1(r) = \alpha I_1(\lambda_1 r / R_1) + \beta N_1(\lambda_1 r / R_1) \quad (1.26)$$

Здесь  $N(\lambda_1 r / R_1)$  — функция Бесселя первого порядка второго рода. Величина  $\lambda_1$  меняется [6] в зависимости от отношения  $\delta = R_2 / R_1$ ; постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  выбираются таким образом, что  $Z_1(R_1) = 1$ .

Пусть имеется теперь произвольная односвязная полость вращения. В точке пересечения свободной поверхности со стенкой должны выполняться условия

$$-\omega^2 \Phi_1 + g \partial \Phi_1 / \partial x = 0, \quad \partial \Phi_1 / \partial r = \partial \Phi_1 / \partial x \operatorname{tg} \alpha \quad (1.27)$$

Исключая  $\partial \Phi_1 / \partial x$ , получим

$$\partial \Phi_1 / \partial r = \omega_1^2 g^{-1} \Phi_1 \operatorname{tg} \alpha \quad (1.28)$$

По-видимому, наилучшим образом функцию  $\Phi_1$  можно аппроксимировать одной функцией  $Z_1(r)$ , если  $Z_1(r) = I_1(\lambda_1 r / R)$ , а  $\lambda_1$  находится из соотношения

$$\Lambda(\lambda_1) = \lambda_1 I_1'(\lambda_1) / I_1(\lambda_1) = \omega_1^2 g^{-1} R_1 \operatorname{tg} \alpha \quad (1.29)$$

При известных  $\omega_1^2$ ,  $R_1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  величина  $\lambda_1$  может быть найдена графически. На фиг. 2 приведена зависимость  $\Lambda$  от  $\lambda_1$ .

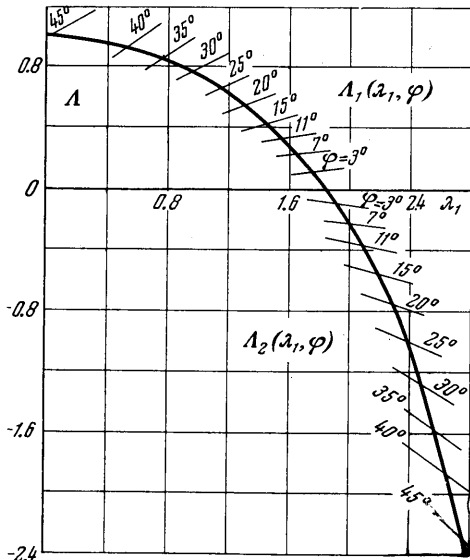
Для полостей сложных форм, где  $\lambda_1$  меняется с уровнем заполнения, вместо формулы (1.19) удобнее воспользоваться формулой (1.20).

Частота колебаний  $\Omega_1^*$  при наличии цилиндрической вставки величиной  $\Delta h$  легко вычисляется по формуле (1.19).

Отношение двух интегралов, входящих в формулу (1.20), можно вычислить следующим образом:

$$\frac{J_1(R_1, R_2)}{J_1(R_1 + \Delta R_1, R_2 + \Delta R_2)} = \left[ 1 + \frac{1}{K} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \delta Z_1(\delta \lambda_1) \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) \right]^{-1} \quad (1.30)$$

$$R_1^2 K = \int_{R_2}^{R_1} Z_1^2 \left( \frac{\lambda_1 r}{R} \right) r dr$$



Фиг. 2

Следовательно, формула для  $\Omega_1^2$ , аналогичная (1.20), имеет следующий вид:

$$\Omega_1^2 = \frac{\omega_1^2 + \lambda_1^2 g \Delta h R_1^{-2}}{(1 + \omega_1^2 \Delta h g^{-1})} \left[ 1 + \frac{1}{K} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \delta Z_1^2(\delta \lambda_1) \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) \right]^{-1} \quad (1.31)$$

Для односвязной области формула (1.31) может быть упрощена

$$\Omega_1^2 = \frac{\omega_1^2 + \lambda_1^2 g \Delta h R_1^{-2}}{1 + \omega_1^2 \Delta h g^{-1}} \left[ 1 - 2 \frac{\Delta R_1}{R_1} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 1} \right]^{-1} \quad (1.32)$$

Из каждого соотношения (1.24), (1.31), (1.32) можно получить соответствующее дифференциальное уравнение для частоты колебаний, полагая  $d\omega_1^2 / dh = (\Omega_1^2 - \omega_1^2) / \Delta h$  и учитывая, что  $\Omega_1^2$  и  $\omega_1^2$  отличаются на величины порядка  $O(\Delta h)$ . Например, для формулы (1.32) соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d\omega_1^2}{dh} = -\frac{\omega_1^4}{g} - 2 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 1} \frac{\omega_1^2}{R_1} \frac{dR_1}{dh} + \frac{\lambda_1^2 g}{R_1^2} \quad (1.33)$$

Характерной особенностью уравнения (1.33) является то, что  $\lambda_1$  — постоянная величина.

Аналогичные дифференциальные уравнения, которые получаются из соотношений (1.24) и (1.31), содержат  $\lambda_1$ , которые являются функцией  $h$ . Решение уравнения (1.33) полностью определяется, если  $\omega_1^2$  задано для какого-либо уровня. Это значение  $\omega_1^2$ , особенно для небольших уровней, обычно либо известно, либо может быть легко получено из других соображений.

2. Формулы (1.24), (1.31), (1.32) и дифференциальное уравнение (1.33) приближенные; поэтому для оценки точности получаемых решений интересно сравнить их с результатами более строгих теоретических расчетов и результатами эксперимента. Ниже это сравнение приводится для полостей различной формы.

1. *Цилиндр с произвольным днищем.* Форма полости приведена на фиг. 3. Дифференциальное уравнение (1.34) в рассматриваемом случае для цилиндрической части имеет вид

$$d\omega_1^2 / dh = -\omega_1^4 / g + \lambda_1^2 g / R_1^2 \quad (2.1)$$

Задачу для днища считаем решенной, и частота колебаний для случая, когда жидкость заполняет днище, известна

$$\omega_1^2 |_{h=0} = \omega_{10}^2 \quad (2.2)$$

Это равенство является начальным условием при решении задачи Коши для уравнения (2.1). Уравнение (2.1) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{g} \frac{d\omega_1^2}{(\lambda_1/R_1 + \omega_1^2/g)} + \frac{1}{g} \frac{d\omega_1^2}{(\lambda_1/R_1 - \omega_1^2/g)} = 2 \frac{\lambda_1}{R_1} dh$$

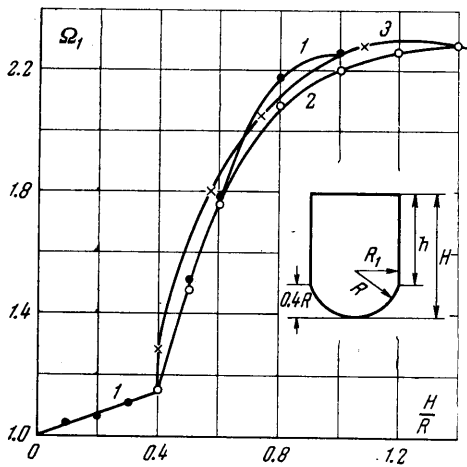
и легко найти его решение при начальном условии (2.2)

$$\omega_1^2 = \frac{\lambda_1 g}{R_1} \frac{\omega_{10}^2 + \lambda_1 g R_1^{-1} \operatorname{th} \lambda_1 h / R_1}{\lambda_1 g R_1^{-1} + \omega_{10}^2 \operatorname{th} \lambda_1 h / R_1} \quad (2.3)$$

Легко видеть, что в формуле (2.3) выполняются предельные переходы:

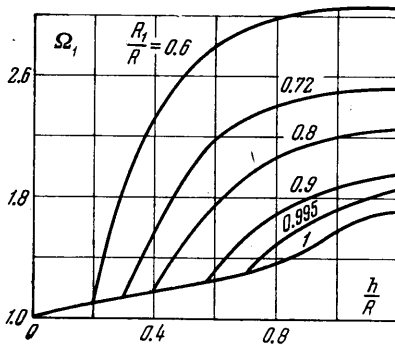
$$h = 0, \quad \omega_1^2 = \omega_{10}^2;$$

$$h \rightarrow \infty, \quad \omega_1^2 \rightarrow \lambda_1 g / R_1 \quad (2.4)$$

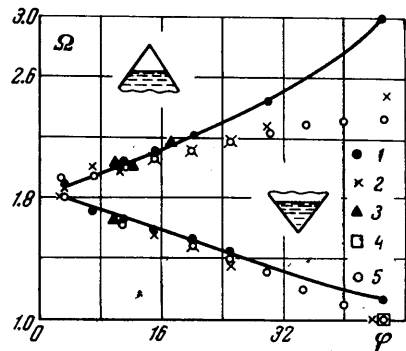


Фиг. 3

Здесь  $\lambda_1 g / R_1$  — квадрат частоты колебаний жидкости в бесконечно глубоком цилиндрическом сосуде.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 3 приведены результаты расчета  $\Omega_1 = \omega_1^2 R g^{-1}$  по формуле (2.3) (кривая 2) для цилиндрического сосуда со сферическим днищем ( $R_1/R = 0.8$ ). На этом

же графике приведены результаты расчета вариационным методом 1 и результаты эксперимента 3. Следует отметить хорошее совпадение результатов, полученных тремя различными методами.

На фиг. 4 приведены результаты расчета частоты колебаний в цилиндрическом сосуде при различных отношениях  $R_1/R$ .

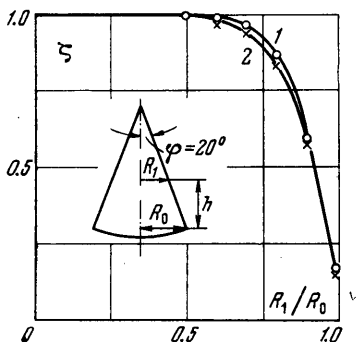
2. Конические полости (фиг. 5). Рассмотрим колебания жидкости в прямой и перевернутой конических полостях. Для конических полостей величина  $\omega_1^2 R_1/g = \text{const}$ . Поэтому уравнение (1.34) преобразуем к виду

$$R_1 \frac{d}{dh} \left( \frac{\omega_1^2 R_1}{g} \right) = - \left( \frac{\omega_1^2 R_1}{g} \right)^2 - \frac{\lambda_1^2 + 1}{\lambda_1^2 - 1} \frac{R_1 \omega_1^2}{g} \frac{dR_1}{dh} + \lambda_1^2 \quad (2.5)$$

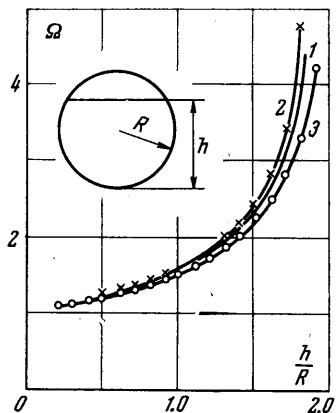
Для прямой конической полости  $dR_1/dh = -\text{tg } \varphi$ , где  $\varphi$  — угол полураствора конуса. Для перевернутой полости  $dR_1/dh = \text{tg } \varphi$ . Обозначая через  $\omega_+^2$  параметр  $\omega_1^2 R_1/g$  для прямой конической полости, а через  $\omega_-^2$  — соответствующий параметр для перевернутой полости; из уравнения (2.5) имеем соответственно

$$\omega_{\pm}^2 = \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^2 + 1}{\lambda_1^2 - 1} \text{tg } \varphi + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\lambda_1^2 + 1}{\lambda_1^2 - 1} \right)^2 \text{tg}^2 \varphi + \lambda_1^2 \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

На фиг. 5 приведены результаты расчета по этим формулам 1 и их сравнение с результатами расчета вариационным методом 2 и данными [7] эксперимента 3 для различных углов  $\varphi$ . Для небольших углов  $\varphi$  результаты практически совпадают. Для достаточно больших углов полураствора (порядка  $45^\circ$ ) имеем расхождение порядка 8%.



Фиг. 6



Фиг. 7

Следует отметить, что для перевернутой конической полости при  $\varphi = 45^\circ$  точное решение [8] дает  $\omega_- = 1$  (точка 4) вместо  $\omega_- = 1.07$  в случае приближенного решения (2.7).

Для определения частот колебаний в конических полостях можно воспользоваться другим приближенным методом. Дифференциальное уравнение для частоты колебаний, соответствующее формуле (1.24), имеет вид (2.1). Величина  $\lambda_1$  зависит от  $\varphi$  и определяется соотношением (1.29). Для конических полостей можно из (2.1) получить уравнение

$$- \left( \frac{\omega_1^2 R_1}{g} \right)^2 + \frac{dR_1}{dh} \frac{\omega_1^2 R_1}{g} + \lambda_1^2 = 0 \quad (2.7)$$

Отсюда для прямого (+) и перевернутого (−) конуса имеем соответственно

$$\omega_{\pm}^2 = \mp \frac{1}{2} \text{tg } \varphi + \sqrt{\frac{1}{4} \text{tg}^2 \varphi + \lambda_1^2} \quad (2.8)$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega_-^2 \text{tg } \varphi = \Lambda_1(\lambda_1, \varphi), \quad -\omega_+^2 \text{tg } \varphi = \Lambda_2(\lambda_1, \varphi)$$

Комбинируя выражения (2.6) и (1.29), получим следующие уравнения для определения  $\lambda_1$ :

$$\Lambda(\lambda_1) = \Lambda_1(\lambda_1, \varphi), \quad \Lambda(\lambda_1) = \Lambda_2(\lambda_1, \varphi) \quad (2.9)$$

Графическое решение этих уравнений приведено на фиг. 2, а результаты вычислений  $\omega_+^2$  и  $\omega_-^2$  — на фиг. 5 (светлые точки). В рассматриваемом случае получает-

ся более полное совпадение с вариационным методом. Для перевернутого конуса при  $\varphi = 45^\circ$  имеется совпадение с точным решением  $\omega_- = 1$ .

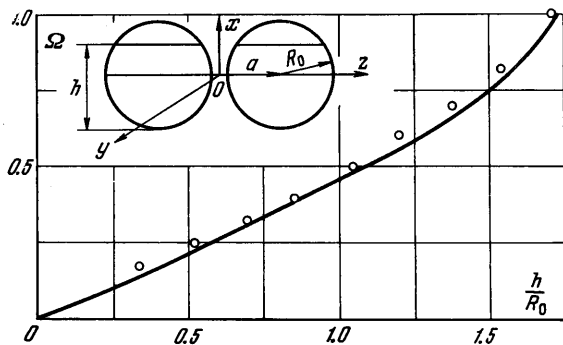
Уравнение (2.5) можно проинтегрировать для конической полости с произвольным дном радиусом  $R_0$ , частота колебаний жидкости в котором равна  $\omega_0$ . Для прямого и перевернутого конуса имеем соответственно

$$\frac{\omega_1^2 R_1 g^{-1} \pm \omega_+^2}{\omega_1^2 R_1 g^{-1} \mp \omega_-^2} = \frac{\omega_0^2 R_0 g^{-1} + \omega_+^2}{\omega_0^2 R_0 g^{-1} - \omega_-^2} \left( 1 - \frac{h}{R_0} \operatorname{tg} \varphi \right)^\Delta \quad \left( \Delta = \frac{-(\omega_+^2 + \omega_-^2)}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \quad (2.10)$$

На фиг. 6 приведено сравнение результатов расчета  $\zeta = \omega_1^2 R_1 / g \omega_-^2$  по формуле (2.10) (кривая 2) и вариационным методом [7] (1) — для конуса со сферическим дном.

3. *Сферическая полость.* Решение уравнений (1.33) и (1.24) совместно с (1.29) для данной полости приведены на фиг. 7, (кривые 2 и 3), где для сравнения приводятся также результаты расчета вариационным методом (1), которые хорошо согласуются с экспериментом [4]. Наибольшая разница в решениях имеет место при больших уровнях заполнения. Решения уравнения (1.33) дают завышенные значения, а расчет по формуле (1.24) — заниженные значения, по сравнению с вариационным методом. Для уровня заполнения  $h/R = 1.8$  имеем разницу в значении частот порядка 10%.

4. *Тороидальная полость.* Результаты расчета  $\Omega = \omega_1^2 a g^{-1}$  по формуле (1.32) и их сравнение с результатами эксперимента представлены на фиг. 8. Следует от-



Фиг. 8

метить хорошее совпадение между приведенными результатами. Приведенные сравнения результатов расчета по приближенным формулам с результатами расчета вариационным методом и результатами эксперимента показывают, что предлагаемая методика расчета обеспечивает необходимую для технических приложений точность.

Поступило 3 XII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lawrence H. R., Wang C. I., R. V. Reddy variational solution of fuel sloshing modes. Jet propuls. 1958, № 11.
2. Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью. ВЦ АН СССР, 1962.
3. Петров А. А., Попов Ю. П., Пухначев Ю. В. Вычисление собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах вариационным методом. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 5.
4. Рабинович Б. И., Докучаев Л. В., Полякова З. М. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями частично заполненными жидкостью. Космические исследования, 1965, т. 3, вып. 2.
5. Петров А. А. Приближенный метод расчета собственных колебаний жидкости в сосудах произвольной формы и потенциалов Жуковского этих сосудов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 5.
6. Охотимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
7. Докучаев Л. В. К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
8. Левин Е. Колебания жидкости в прямолинейном коническом сосуде. Ракетн. техн. и космонавтика, 1963, № 6.