

## О ПОСТРОЕНИИ ПОТОКА ЖИДКОСТИ, ОБТЕКАЮЩЕГО ТВЕРДОЕ ТЕЛО С ВОЗДУШНОЙ ПРОСЛОЙКОЙ

М. В. ТРЕТЬЯКОВ

(Севастополь)

Известно, что сопротивление трения при движении тела в жидкости может быть уменьшено путем изменения физических характеристик жидкости у поверхности тела и, в частности, путем создания искусственных воздушных каверн на поверхности тела.

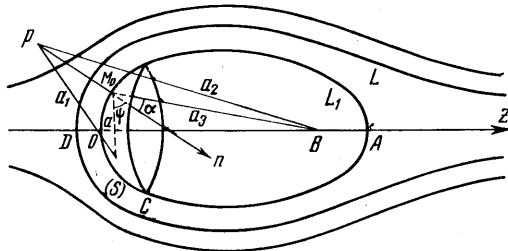
В работах [1-3] рассмотрен вопрос о величине выигрыша в сопротивлении при наличии у стенки прослойки жидкости с другими физическими константами.

В работах [4, 5] приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований по вопросу определения параметров искусственных воздушных каверн, создаваемых на нижней поверхности горизонтальной стенки с целью снижения сопротивления.

Ниже делается попытка построения пространственного потока идеальной жидкости, обтекающего твердое тело, целиком охваченное воздушной каверной.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $S$  — незамкнутая гладкая, в смысле Ляпунова, поверхность, полученная вращением дуги  $OC$  вокруг оси  $z$  цилиндрических осей координат  $z, r, \theta$  с началом в точке  $O$  (фиг. 1).

Разместим на этой поверхности слой источников интенсивности  $m(M)$  идеальной жидкости плотности  $\rho$ , а в точке  $B$  оси  $z$ , на расстоянии  $h$  от начала, поместим сток интенсивности  $Q$ .



Фиг. 1

Если теперь на поверхность  $(S)$  направим поступательный поток идеальной жидкости той же плотности со скоростью  $v_\infty$ , направленной по оси  $z$  в положительную ее сторону, то потенциал скоростей возникающего при этом течения запишется так:

$$\Phi(P) = v_\infty z - \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \frac{m(M)}{a_1} dF + \frac{Q}{4\pi a_2} \quad (1.1)$$

Известно, что входящий сюда интеграл есть потенциал простого слоя с плотностью  $m(M)$ .

Направим нормаль поверхности  $(S)$  в сторону положительного направления оси  $z$  и будем искать функцию  $m(M)$  интенсивности слоя источников так, чтобы на поверхности  $(S)$  выполнялось следующее граничное условие:

$$(\partial\Phi/\partial n)_- = \sigma(\partial\Phi/\partial n)_+ \quad (1.2)$$

Здесь  $\sigma$  — некоторая заданная постоянная величина, а  $(\partial\Phi/\partial n)_-$  и  $(\partial\Phi/\partial n)_+$  — предельные значения нормальных составляющих скорости рассматриваемого потока в точках поверхности  $(S)$ .

Принимая во внимание данные в работе [6] формулы для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя, распределенного по незамкнутой поверхности, из (1.1) дифференцированием найдем выражения предельных значений нормальных составляющих скорости излучаемого потока в точке  $M_0$ , а подставляя их в граничное условие (1.2), получим интегральное уравнение

$$m(M_0) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{(S)} m(M) \frac{\cos \psi}{a^2} dF + 2\lambda v_\infty \cos \beta_0 + \frac{\lambda Q \cos \alpha}{2\pi a_3^2} \quad (1.3)$$

$$\left( \lambda = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right)$$

Здесь  $\beta_0$  — угол между нормалью в точке  $M_0$  и осью  $z$ . Решение этого интегрального уравнения даст функцию  $m(M_0)$  интенсивности слоя источников, соответствующего данному значению постоянного коэффициента  $\sigma$ .

Предельные значения нормальных составляющих скорости потока в точках поверхности через функцию интенсивности  $m(M_0)$  слоя, с учетом уравнения (1.3),

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_\pm = \frac{1 \pm \lambda}{2\lambda} m(M_0) \quad (1.4)$$

Перепад давления в точках поверхности, на основании уравнения Бернулли и (1.4),

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \lambda^{-1} m^2(M_0) \quad (1.5)$$

Пусть теперь  $-1 < \sigma < 0$ . Согласно (1.4) нормальная составляющая  $(\partial \Phi / \partial n)_-$  будет направлена против  $v_\infty$ , и, следовательно, на оси  $z$  перед поверхностью  $(S)$  будет существовать критическая точка  $D$ , в которой скорость потока равна нулю. Координата  $z_0$  этой точки определится из условия  $(\partial \Phi / \partial z) = 0$  при  $z = z_0$ , и через эту точку пройдет поверхность тока  $L$ , отделяющая набегающий внешний поток от внутреннего потока, создаваемого слоем источников. Уравнение этой поверхности тока  $L$  будет

$$\int_{(z_0, 0)}^{(z, r)} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) dz - \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dr = 0$$

Выберем интенсивность  $Q$  стока в точке  $B$  так, чтобы вся жидкость, вытекающая из слоя источников в положительную сторону нормали поверхности  $(S)$ , отсасывалась этим стоком, т. е. чтобы

$$\iint_{(S)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_+ = Q \quad (1.6)$$

Теперь заменим слой источников жидкости с плотностью  $\rho$  слоем источников некоторой другой жидкости с плотностью  $\rho_1$ , но интенсивность излучения этого слоя и мощность стока в точке  $B$  подберем так, чтобы граница раздела  $L$  внешнего и внутреннего потоков не изменилась. Тогда потенциал внешнего потока выразится той же формулой (1.1). Как внешний, так и внутренний потоки — потенциальные и безвихревые. Поэтому, учитывая, что давления обеих потоков в точке  $D$  равны, можно показать [6], что потенциал скоростей внутреннего потока

$$\Phi_1(p) = k \Phi(p) \quad (k = \sqrt{\rho / \rho_1} = \text{const}) \quad (1.7)$$

Основные величины внутреннего потока

$$v_{\infty 1} = kv_{\infty}, \quad m_1(M) = km(M), \quad Q_1 = kQ \quad (1.8)$$

При этом условии (1.6) для внутреннего потока останется в силе, и, следовательно, на оси  $z$  будет существовать критическая точка  $A$ , скорость потока в которой будет равна нулю. Координата  $z_1$  этой точки определится из условия  $(\partial\Phi/\partial z) = 0$  при  $z = z_1$ , и через эту точку пройдет поверхность тока  $L_1$ , уравнение которой

$$\int_{(z_1, 0)}^{(z, r)} \left( r \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} \right) dz - \left( r \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right) dr = 0 \quad (1.9)$$

Эта поверхность вместе с поверхностью  $(S)$  образует замкнутую поверхность вращения. Заменяя эту поверхность тока  $L_1$  твердой стенкой, получим картину обтекания твердого тела вращения, передний конец которого имеет форму поверхности  $(S)$ , и из каждой точки этой поверхности вытекает жидкость с плотностью  $\rho_1$  с нормальной составляющей скорости течения  $(\partial\Phi_1/\partial n)$  и секундным расходом этого истекающего потока

$$\int_{(S)} \int \left( \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \right) dF = N_1 \quad (1.10)$$

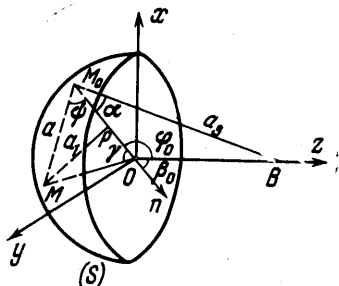
Этот поток жидкости плотности  $\rho_1$  и создает прослойку между поверхностью тела и нулевой поверхностью тока  $L$  внешнего потока жидкости с плотностью  $\rho$ . В частности, жидкость с плотностью  $\rho_1$  может быть воздухом.

Случай  $\sigma = -1$  физически быть не может, так как при наличии набегающего потока мощность источников слоя в этом случае должна быть бесконечно большой. Кроме того, прослойка из жидкости плотности  $\rho_1$  на теле должна быть достаточно тонкой. Поэтому коэффициент  $\sigma$  должен удовлетворять условию  $-1 \ll \sigma < 0$ , что обеспечивает единственность решения основного уравнения (1.3).

**2. Решение задачи для полусферы.** Пусть поверхность  $(S)$  — полусфера радиуса  $R$  (фиг. 2). Возьмем начало осей в центре полусферы  $O$ , а расстояние  $OB$  обозначим через  $h$ . Тогда непосредственно из чертежа (фиг. 2) будем иметь

$$\frac{\cos \alpha}{a^2} = \frac{1 - b \cos \varphi_0}{R^2(1 + b^2 - 2b \cos \varphi_0)^{3/2}}$$

$$\left( b = \frac{h}{R} \right)$$



Фиг. 2

Перейдем теперь к сферическим координатам

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi$$

Учитывая симметричность потока относительно оси  $z$ , равенство  $\cos \varphi = a/2R$  и выражения для  $dF$  и  $a$  через  $R$ , получим, что основное уравнение (1.3) для данного случая имеет вид

$$m(\varphi_0) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int \int_{(S)} m(\varphi) \frac{dF}{a} - 2\lambda v_{\infty} \cos \varphi_0 + \frac{\lambda Q}{2\pi} \frac{1 - b \cos \varphi_0}{R^2(1 + b^2 - 2b \cos \varphi_0)^{3/2}} \quad (2.1)$$

Здесь интегрирование ведется по полусфере ( $S$ ) единичного радиуса. Будем считать, что фиг. 2 есть полусфера единичного радиуса.

Если расстояние от точки  $P$ , лежащей на радиусе  $OM_0$ , до центра  $O$  обозначим через  $\eta$ , расстояние  $PM$  — через  $a_1$ , а угол между  $OP$  и  $OM$  — через  $\gamma$ , то, как известно [7], имеет место разложение

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\eta \cos \gamma + \eta^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n X_n(\cos \gamma). \quad (2.2)$$

Здесь  $X_n(\cos \gamma)$  — полином Лежандра степени  $n$ . Так как  $\eta < 1$ , то ряд (2.2) сходится равномерно. Умножая (2.2) на  $m(\varphi)$  и интегрируя по полусфере единичного радиуса, получим

$$\iint_{(S)} \frac{m(\varphi)}{a_1} dF = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \iint_{(S)} m(\varphi) X_n(\cos \gamma) dF \quad (2.3)$$

Но  $\cos \gamma = \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos(\theta - \theta_0)$ , и на основании теоремы о сложении полиномов Лежандра будем иметь

$$X_n(\cos \gamma) = X_n(\cos \varphi) X_n(\cos \varphi_0) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} X_n^m(\cos \varphi) X_n^m(\cos \varphi_0) \cos m(\theta - \theta_0) \quad (2.4)$$

Здесь  $X_n^m(\cos \varphi)$  — присоединенная функция Лежандра. Подставляя (2.4) в (2.3), проделав соответствующие вычисления и переходя к пределу, когда точка  $P$  по радиусу стремится в точку  $M_0$  (при этом  $\eta \rightarrow 1$ ), получим

$$\iint_{(S)} \frac{m(\varphi)}{a} dF = -2\pi \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\cos \varphi_0) \int_{1/2\pi}^{\pi} m(\varphi) X_n(\cos \varphi) d(\cos \varphi)$$

Здесь справа стоит сходящийся ряд. Таким образом, после преобразований уравнение (2.1) запишется так:

$$m(\varphi_0) = \frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\cos \varphi_0) \int_{1/2\pi}^{\pi} m(\varphi) X_n(\cos \varphi) d(\cos \varphi) - 2\lambda v_{\infty} \cos \varphi_0 + \frac{\lambda Q(1 - b \cos \varphi_0)}{2\pi R^2(1 + b^2 - 2b \cos \varphi_0)^{3/2}} \quad (2.5)$$

Это есть интегральное уравнение с вырожденным ядром. Так как величина

$$a_n = \int_{1/2\pi}^{\pi} m(\varphi) X_n(\cos \varphi) d(\cos \varphi)$$

постоянна, то, приближенное решение уравнения (2.5) выразится суммой

$$m(\varphi_0) = \frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^N a_n X_n(\cos \varphi_0) - 2\lambda v_{\infty} \cos \varphi_0 + \frac{\lambda Q(1 - b \cos \varphi_0)}{2\pi R^2(1 + b^2 - 2b \cos \varphi_0)^{3/2}} \quad (2.6)$$

Для определения коэффициентов  $a_n$ , как известно, нужно решить соответствующую систему  $N$  линейных уравнений с  $N$  неизвестными.

Практически для конкретных значений входящих в уравнение (2.5) параметров соответствующая система алгебраических уравнений может быть решена на ЭВМ.

Для частного случая, когда  $b = h/R = 1$ , ряд (2.6) быстро сходится, и получающаяся при этом система уравнений хорошо решается методом итераций, если взять за нулевую итерацию решение соответствующей системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Поступило 12 XI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федяевский К. К. Уменьшение сопротивления трения путем изменения физических констант жидкости у стенки. Изв. АН СССР, ОТН, 1943, № 9.
2. Лойцянский Л. Г. Об изменении сопротивления тел путем заполнения пограничного слоя жидкостью с другими физическими константами. ПММ, 1942, т. 6, вып. 1.
3. Спэрроу, Джонсон, Эккерет. Двухфазный пограничный слой и снижение полного сопротивления пластины. Прикл. механ. Тр. амер. об-ва инж.-механиков, сер. E, 1962, т. 29, № 2.
4. Бутузов А. А. О предельных параметрах искусственной каверны, образуемой на нижней поверхности горизонтальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
5. Старобинский В. Б. Отрывное обтекание тонкого клина потоком жидкости конечной глубины. Тр. Ленингр. ин-та водного транспорта, 1965, т. 6, вып. 81.
6. Третьяков М. В. О совместном течении идеальных жидкостей разных плотностей в теории обтекания проницаемых поверхностей. ПМТФ, 1963, № 2.
7. Гурса Э. Курс математического анализа. Гостехиздат, 1933, т. 3, ч. 1, стр. 220.