

О НЕМАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

В. И. СТОЛБЕЦОВ

(Москва)

В работе рассмотрены некоторые нелинейные эффекты, возникающие при колебаниях жидкости, частично заполняющей прямой круговой цилиндр. Задача о нелинейных колебаниях жидкости в круговом цилиндре рассмотрена в работах [1, 2]. Несколькими иным способом та же задача для произвольных полостей решалась в работах [3, 4].

В предлагаемой работе изучена устойчивость вынужденных колебаний жидкости в цилиндре, когда последний совершает небольшие гармонические колебания в плоскости, проходящей через его ось.

1. Рассматривается движение идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей прямой круговой цилиндр радиуса R_0 . Жидкость находится в поле массовых сил, обладающих потенциалом, градиент которого j коллинеарен продольной оси полости. Введем систему координат $x_1 x_2 x_3$ ось x_1 которой совпадает с осью цилиндра, а оси x_2 и x_3 лежат в плоскости дна цилиндра.

Тогда

$$\mathbf{j} = -j\mathbf{e}_1, \quad j = |j| \quad (1.1)$$

где \mathbf{e}_i — орт оси x_i .

Будем полагать, что в начальный момент времени движение жидкости было безвихревым. Тогда, в соответствии с допущением о потенциальности поля массовых сил, движение жидкости будет обладать потенциалом скоростей φ в любой момент времени [4].

Пусть счетное множество функций φ_{k0} представляет собой совокупность всех решений краевой задачи [1]

$$\Delta \varphi_{k0} = 0 \quad \text{в } Q, \quad \left(\frac{\partial \varphi_{k0}}{\partial \nu} - \frac{\omega_k^2}{j} \varphi_{k0} \right)_{\Sigma_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{k0}}{\partial \nu} \right|_S = 0 \quad (1.2)$$

Здесь ω_k^2 — k -е собственное число задачи (1.2), Q — объем, занятый жидкостью, ограниченный смоченной поверхностью цилиндра S и невозмущенной свободной поверхностью жидкости Σ_0 , ν — орт внешней нормали к поверхностям S , Σ_0 , Σ .

В силу осевой симметрии полости, множество функций φ_{k0} распадается на четыре подмножества функций φ_{0ri} , φ_{0pj} , φ_{0sm} , φ_{0qn} , обладающих свойствами

$$\begin{aligned} \varphi_{0ri}(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_{0ri}(x_1, -x_2, x_3) = -\varphi_{0ri}(x_1, x_2, -x_3) \\ \varphi_{0pj}(x_1, x_2, x_3) &= -\varphi_{0pj}(x_1, -x_2, x_3) = \varphi_{0pj}(x_1, x_2, -x_3) \\ \varphi_{0sm}(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_{0sm}(x_1, -x_2, x_3) = \varphi_{0sm}(x_1, x_2, -x_3) \\ \varphi_{0qn}(x_1, x_2, x_3) &= -\varphi_{0qn}(x_1, -x_2, x_3) = -\varphi_{0qn}(x_1, x_2, -x_3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

($i, j, m, n = 1, 2, 3, \dots$)

Свойствами (1.3) обладает также система функций

$$\psi_{ri} = \frac{\partial \varphi_{0ri}}{\partial x_1} \Big|_{\Sigma_0}, \quad \psi_{pj} = \frac{\partial \varphi_{0pj}}{\partial x_1} \Big|_{\Sigma_0}, \quad \psi_{sm} = \frac{\partial \varphi_{0sm}}{\partial x_1} \Big|_{\Sigma_0}, \quad \psi_{qn} = \frac{\partial \varphi_{0qn}}{\partial x_1} \Big|_{\Sigma_0} \\ (i, j, m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

Из полноты этой системы функций на Σ_0 [4] следует

$$x_{\Sigma} - x_{\Sigma_0} = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \psi_{ri} + \sum_{j=1}^{\infty} p_j \psi_{pj} + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \psi_{sm} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \psi_{qn} \quad (1.4)$$

Здесь x_{Σ} и x_{Σ_0} — абсциссы произвольных точек возмущенной свободной поверхности жидкости Σ и поверхности Σ_0 соответственно; r_i, p_j, s_m, q_n — совокупность параметров, зависящих от времени, определяющих положение поверхности Σ в любой момент времени.

Будем считать, что полость совершает поступательное движение в плоскости $x_1 x_3$ по закону

$$x_3^{\circ} = x_{30} \cos \omega t \quad (1.5)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда ω близко к частоте основного тона колебаний жидкости. Как показывают результаты экспериментов, в этом случае можно пренебречь в (1.4) всеми параметрами q_n и параметрами r_i, p_j ($i, j = 2, 3, 4, \dots$). Кроме того, из всей бесконечной совокупности параметров s_m достаточно учесть лишь конечное число N этих параметров [2]. Благодаря этим упрощениям выражение (1.4) принимает вид

$$x_{\Sigma} - x_{\Sigma_0} = r\psi_r + p\psi_p + \sum_{m=1}^N s_m \psi_{sm}, \quad \begin{array}{l} r = r_1, \quad \psi_r = \psi_{r1} \\ p = p_1, \quad \psi_p = \psi_{p1} \end{array} \quad (1.6)$$

2. Как известно [1], гармоническая в Q функция φ удовлетворяет условиям

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + jx_1 \right]_{\Sigma} = f(t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_s = 0 \quad (2.1)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. На свободной поверхности жидкости Σ должно выполняться кинематическое условие [5]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial t} \quad F = x_1 - r\psi_r - p\psi_p - \sum_{m=1}^N s_m \psi_{sm}, \quad \begin{array}{l} G = \nabla F \\ G = |G| \end{array} \quad (2.2)$$

из которого следует, что функцию φ следует искать в виде

$$\varphi = r\dot{\varphi}_r + p\dot{\varphi}_p + \sum_{m=1}^N s_m \dot{\varphi}_m^0 \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в первое из уравнений (2.2) и сравнивая обе части полученного уравнения, найдем граничные условия для функций φ_r, φ_p и φ_m^0 на Σ

$$\nabla \varphi_r \cdot G = \psi_r, \quad \nabla \varphi_p \cdot G = \psi_p, \quad \nabla \varphi_m^0 \cdot G = \psi_{sm} \quad (2.4)$$

Попытаемся удовлетворить уравнениям (2.4), положив

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \varphi_{0r1} + r\varphi_{r1} + p\varphi_{p1} + r^2\varphi_{r21} + p^2\varphi_{p21} + rp\varphi_{rp1} + \sum_{m=1}^N s_m\varphi_{srm} \\ \varphi_p &= \varphi_{0p1} + r\varphi_{r2} + p\varphi_{p2} + r^2\varphi_{r22} + p^2\varphi_{p22} + rp\varphi_{rp2} + \sum_{m=1}^N s_m\varphi_{spm} \\ \varphi_m^0 &= \varphi_{0sm} + r\varphi_{m1} + p\varphi_{m2} + r^2\varphi_{m11} + p^2\varphi_{m22} + rp\varphi_{m12} + \sum_{m=1}^N s_m\varphi_{smm} \end{aligned}$$

Тогда гармонические в Q функции $\varphi_{r1}, \varphi_{p1}, \dots, \varphi_{smm}$ должны удовлетворять на Σ_0 следующим условиям [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{r1}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}'(\psi_r \nabla \varphi_{0r1}), & \frac{\partial\varphi_{p1}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}'(\psi_p \nabla \varphi_{0r1}) \\ \frac{\partial\varphi_{srm}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}'(\psi_{sm} \nabla \varphi_{0r1}) \\ \frac{\partial\varphi_{r21}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}'\left(\psi_r \nabla \varphi_{r1} + \frac{1}{2} \psi_r^2 \nabla \psi_r\right) \\ \frac{\partial\varphi_{p21}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}'\left(\psi_p \nabla \varphi_{p1} + \frac{1}{2} \psi_p^2 \nabla \psi_p\right) \\ \frac{\partial\varphi_{rp1}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}'(\psi_r \nabla \varphi_{p1} + \psi_p \nabla \varphi_{r1} + \psi_r \psi_p \nabla \psi_r) \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{2.5}$$

где под $\operatorname{div}' A$ понимается следующее:

$$\operatorname{div}'(A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) = \partial A_2 / \partial x_2 + \partial A_3 / \partial x_3$$

На смоченной поверхности полости S , как следует это из (2.1), производные по нормали от всех перечисленных выше функций тождественно обращаются в нуль.

Используя интеграл Лагранжа — Коши и условие постоянства давления на свободной поверхности жидкости Σ , можно получить дифференциальные уравнения, описывающие изменение параметров r, p и s_m во времени [5]

$$r'' + a(r\dot{r}^2)' + b(r\dot{p}^2)' + c(p\dot{r}p)' + dp^2r + er^2r + \tag{2.6}$$

$$+ fr\dot{p}p + \omega_r^2 r + \sum_{m=1}^N [A_{sm}'(r\dot{s}_m)' + B_{sm}'(r\dot{s}_m)' + C_{sm}r\dot{s}_m] = \frac{\lambda_r}{\mu_r} x_2^{\circ\circ}$$

$$p'' + a(p\dot{p}^2)' + b(p\dot{r}^2)' + c(r\dot{r}p)' + dr^2p + ep^2p +$$

$$+ fr\dot{p}r + \omega_p^2 p + \sum_{m=1}^N [A_{sm}(p\dot{s}_m)' + B_{sm}(p\dot{s}_m)' + C_{sm}p\dot{s}_m] = 0 \tag{2.7}$$

$$s_m'' + \omega_{sm}^2 s_m + D_{sm}(r\dot{r})' + E_{sm}(p\dot{p})' + F_{sm}r^2 + G_{sm}p^2 = 0 \tag{2.8}$$

$$\dot{r} = dr/dt, \quad \dot{p} = dp/dt \quad \text{и т. д.}$$

Основные коэффициенты этих уравнений определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\varphi_{r21} + \psi_r \frac{\partial \varphi_{r1}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \psi_r^2 \frac{\partial^2 \varphi_{0r1}}{\partial x_1^2} \right) \psi_r dS \\
 b &= \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\varphi_{p21} + \psi_p \frac{\partial \varphi_{p1}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \psi_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_{0r1}}{\partial x_1^2} \right) \psi_r dS \\
 c &= \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\varphi_{rp2} + \psi_p \frac{\partial \varphi_{r2}}{\partial x_1} + \psi_r \frac{\partial \varphi_{p2}}{\partial x_1} + \psi_r \psi_p \frac{\partial^2 \varphi_{0r1}}{\partial x_1^2} \right) \psi_r dS \\
 d &= \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\nabla \varphi_{0p1} \nabla \varphi_{r2} + \psi_r \nabla \varphi_{0p1} \nabla \frac{\partial \varphi_{0p1}}{\partial x_1} \right) \psi_r dS \\
 e &= \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\nabla \varphi_{0r1} \nabla \varphi_{r1} + \psi_r \nabla \varphi_{0r1} \nabla \frac{\partial \varphi_{0r1}}{\partial x_1} \right) \psi_r dS \\
 f &= \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\nabla \varphi_{0p1} \nabla \varphi_{p1} + \nabla \varphi_{0r1} \nabla \varphi_{r2} + \psi_p \nabla \varphi_{0r1} \nabla \frac{\partial \varphi_{0p1}}{\partial x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \psi_p \nabla \varphi_{0p1} \nabla \frac{\partial \varphi_{0r1}}{\partial x_1} \right) \psi_r dS
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Положив в уравнениях (2.6) и (2.8) $p(t) \equiv 0$, получим уравнения работы [1] для случая плоского поступательного движения полости. Однако учет этих членов необходим при анализе устойчивости вынужденных колебаний жидкости на частотах ω , близких к частоте основного тона колебаний жидкости.

3. Задачу (1.2) для полости в форме прямого кругового цилиндра удобно сформулировать в цилиндрических координатах x_1, ρ, θ

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi_{k0}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_{k0}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{k0}}{\partial x_1^2} &= 0 \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq h \\ \rho \leq R_0 \end{array} \right) \\
 \frac{\partial \varphi_{k0}}{\partial x_1} = \frac{\omega_k^2}{j} \varphi_{k0} \quad (x_1 = h), \quad \frac{\partial \varphi_{k0}}{\partial \rho} = 0 \quad (\rho = R_0), \quad \frac{\partial \varphi_{k0}}{\partial x_1} = 0 \quad (x_1 = 0)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ее ограниченные при $\rho = 0$ решения, как известно [1], имеют вид

$$\begin{aligned}
 \varphi_{0ri} &= Z_{ik}(\rho) f_{ik}(x_1) \sin i\theta \quad (i=1, 3, 5, \dots) \\
 \varphi_{0pj} &= Z_{jk}(\rho) f_{jh}(x_1) \cos j\theta \quad (j=1, 3, 5, \dots) \\
 \varphi_{0sm} &= Z_{mk}(\rho) f_{mh}(x_1) \cos m\theta \quad (m=0, 2, 4, \dots) \\
 \varphi_{0qn} &= Z_{nk}(\rho) f_{nh}(x_1) \sin n\theta \quad (n=1, 3, 5, \dots)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$Z_{ik}(\rho) = J_i(\xi_{ik}\rho') / J_i(\xi_{ik}), \quad f_{ik}(x_1) = R_0 \operatorname{ch}(\xi_{ik}x_1') / \xi_{ik} \operatorname{sh}(\xi_{ik}h')$$

$$x_1' = x_1/R_0, \quad \rho' = \rho/R_0, \quad h' = h/R_0$$

Здесь h — глубина жидкости, $J_i(\xi_{ik}\rho')$ — цилиндрическая функция первого рода i -го порядка, ξ_{ik} — k -й корень уравнения

$$dJ_i(\xi)/d\xi = 0 \tag{3.3}$$

Для вычисления основных нелинейных коэффициентов (2.9) необходимо знать решение краевых задач для функций φ_{r1} , φ_{r2} , φ_{p1} , φ_{p2} [5]. Эти решения могут быть получены в виде разложений Фурье по функциям системы (3.2)

$$\begin{aligned} \varphi_{p1} &= \varphi_{r2} = \sin 2\theta \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k} Z_{2k}(\rho) f_{2k}(x_1) \\ \varphi_{r1} &= \sum_{k=1}^{\infty} [h_{1k} Z_{0k}(\rho) f_{0k}(x_1) + h_{1k}' Z_{2k}(\rho) f_{2k}(x_1) \cos 2\theta] \\ \varphi_{p2} &= \sum_{k=1}^{\infty} [h_{1k} Z_{0k}(\rho) f_{0k}(x_1) - h_{1k}' Z_{2k}(\rho) f_{2k}(x_1) \cos 2\theta] \\ h_{1k} &= \frac{f_{11}(h)}{R_0^2} \int_0^{R_0} F_1(\rho) Z_{0k}(\rho) \rho d\rho \\ h_{2k} &= -h_{1k}' = \frac{f_{11}(h) \xi_{2k}^2}{R_0^2 (\xi_{2k}^2 - 4)} \int_0^{R_0} F_2(\rho) Z_{2k}(\rho) \rho d\rho \\ F_1(\rho) &= \frac{\xi_{11}}{R_0} \frac{Z_{11}(\rho) Z_{11}'(\rho)}{\rho} + \frac{\xi_{11}}{R_0} [Z_{11}(\rho) Z_{11}'(\rho)]' \\ F_2(\rho) &= F_1(\rho) - \frac{2}{\rho^2} Z_{11}^2(\rho), \quad Z_{11}'(\rho) = \frac{1}{J_1(\xi_{11})} \frac{dJ_1(\xi_{11}\rho')}{d(\xi_{11}\rho')} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Имея выражения (3.4), нетрудно выразить основные нелинейные коэффициенты через интегралы от цилиндрических функций. Не будем здесь приводить этих громоздких выражений. Однако сделаем одно замечание. Среди коэффициентов, связывающих параметры r , p и s_m , отличными от нуля будут лишь коэффициенты, которые связывают параметры r и p с теми обобщенными координатами s_m , формы колебаний свободной поверхности которых содержат в качестве множителя $\cos m\theta$ ($m = 0, 2$). Если дополнительно ограничиться учетом лишь первых симметричных гармоник, соответствующих собственным числам ξ_{01} и ξ_{21} [2], то система уравнений (2.6) — (2.8) примет вид

$$\begin{aligned} r'' + a(r'r^2)' + b(r'p^2)' + c(p'r p)' + dp^2r + er^2r + fr'p'p + \omega_0^2r + \\ + A_{s_0}(r's_1)' + B_{s_0}(rs_1)' + C_{s_0}r's_1 - A_{s_2}(r's_2)' - B_{s_2}(rs_2)' - C_{s_2}r's_2 = \\ = -\lambda_r x_3^{00} / \mu \\ p'' + a(p'p^2)' + b(p'r^2)' + c(r'rp)' + dr^2p + ep^2p + \\ + fr'p'r + \omega_0^2p + A_{s_0}(p's_1)' + B_{s_0}(ps_1)' + C_{s_0}p's_1 + A_{s_2}(p's_2)' + \\ + B_{s_2}(ps_2)' + C_{s_2}p's_2 = 0 \\ s_1'' + \omega_{s_1}^2 s_1 + D_{s_0}(r'r)' + D_{s_0}(p'p)' + F_{s_0}r'^2 + F_{s_0}p'^2 = 0 \\ s_2'' + \omega_{s_2}^2 s_2 + D_{s_2}(r'r)' - D_{s_2}(p'p)' + F_{s_2}r'^2 - F_{s_2}p'^2 = 0 \\ (\omega_0^2 = \omega_r^2 = \omega_p^2) \end{aligned}$$

На основе формул (2.9) была составлена программа для определения коэффициентов a , b , c , d , e , f при помощи ЭВМ. Приводим таблицу значений этих коэффициентов, рассчитанных для цилиндра с единичным радиусом.

<i>n</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
0.6	0.9245	-0.1773	1.102	-0.08530	-0.2266	-0.1413
0.7	0.7892	-0.2689	1.058	0.006259	-0.09123	-0.09749
0.8	0.7069	-0.3242	1.031	0.06155	-0.008946	-0.0705
0.9	0.6549	-0.3589	1.014	0.09623	0.04301	-0.05321
1.0	0.6212	-0.3812	1.002	0.1186	0.07669	-0.04187
1.2	0.5842	-0.4056	0.9897	0.1429	0.1138	-0.02917
1.4	0.5673	-0.4165	0.9338	0.1539	0.1306	-0.02330
1.6	0.5595	-0.4216	0.9811	0.1589	0.1384	-0.02053
2.0	0.5541	-0.4250	0.9791	0.1624	0.1438	-0.01859
2.4	0.5529	-0.4258	0.9787	0.1632	0.1451	-0.01815
3.0	0.5525	-0.4260	0.9786	0.1634	0.1454	-0.01803

Числовые значения остальных нелинейных коэффициентов приведены в работе [1].

4. Пусть x_3^0 изменяется по закону (1.5). Хорошего согласования расчетных результатов с результатами эксперимента можно добиться, рассматривая вместо системы уравнений (3.5) упрощенную систему уравнений, которую получим, положив в (3.5) $s_1 = s_2 = 0$. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением уравнений

$$r'' + a(r'r^2)' + b(r'p^2)' + c(p'rp)' + dp^2r + er^2r + fr'p'p + \omega_0^2r = -\lambda_r x_3^{00}/\mu_r \quad (4.1)$$

$$p'' + a(p'p^2)' + b(p'r^2)' + c(r'rp)' + dr^2p + ep^2p + fr'p'r + \omega_0^2p = 0$$

При этом величину отношения x_{30}/R_0 будем считать малой по сравнению с единицей, так что это отношение может быть принято в качестве малого параметра задачи.

Результаты экспериментальных исследований показывают, что при определенных значениях ω и x_{30} форма колебаний, соответствующая параметру p , совсем не возбуждается, а изменение во времени параметра r , в силу малости нелинейных членов в уравнениях (4.1), хорошо описывается формулой

$$r = r_0 \cos \omega t, \quad r_0 \neq 0 \quad (4.2)$$

В этом случае первое уравнение (4.1) имеет вид

$$r'' + a(r'r^2)' + er^2r + \omega_0^2r = \lambda_r x_{30} \omega^2 \cos \omega t / \mu_r \quad (4.3)$$

Его периодическое решение, в котором не учитываются высшие гармоники, может быть получено из соотношений

$$r = r_0 \cos \omega t, \quad \zeta_0 r_0^3 + 4(1 - \Omega_0^2)r_0 + 4\lambda_r x_{30} / \mu_r = 0 \\ \Omega_0 = \omega_0 / \omega, \quad \zeta_0 = a - e \quad (4.4)$$

Выясним условия, при которых второе уравнение (4.1) не может иметь постоянного решения $p \equiv 0$. Отбросив в этом уравнении члены, имеющие порядок p^3 , и положив в нем $r = r_0 \cos \omega t$, приведем его к виду

$$p'' (\alpha + 2\beta \cos 2\omega t) - 2\epsilon p' \sin 2\omega t + p(\gamma - 2\delta \cos 2\omega t) = 0 \quad (4.5)$$

$$4\beta = \mu b, \quad \alpha = 1 + 2\beta, \quad 4\epsilon = \mu\omega(2b + c + f)$$

$$2\gamma = 2\omega_0^2 + d\omega^2\mu, \quad 4\delta = \mu\omega^2(2c + d), \quad \mu = r_0^2$$

Выражение (4.5) представляет собой линейное относительно параметра p дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами.

Известно [6], что в плоскости параметров μ, ω существует бесчисленное множество областей, в которых это уравнение имеет неограниченные решения. Однако согласно постановке задачи $\omega \approx \omega_0$, поэтому практический интерес представляет отыскание лишь основной области неустойчивости уравнения (4.5).

Применяя один из стандартных приемов нахождения границ главной области неустойчивости, получим уравнения кривых, ограничивающих эту область, в виде [5]

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= 1 - \zeta_k \mu - (\zeta_5 - \zeta_k^2) \mu^2 + \dots, & \Omega &= \omega/\omega_0 \quad (k = 1, 2) \\ 4\zeta_1 &= 3b - 3d - c + f, & 4\zeta_2 &= b + c - d - f \\ 4\zeta_3 &= c - d - 3b + 3f, & -4\zeta_4 &= 3b + 3c + d + f, & 8\zeta_5 &= -\zeta_3 \zeta_4 \end{aligned} \quad (4.6)$$

При этом в уравнениях (4.6) не учитываются члены, имеющие относительно μ порядок выше второго. Назовем областью H_1 основную область неустойчивости уравнения (4.5) в плоскости параметров (r_0, Ω^2) . Если точка (r_0, Ω^2) попадает в область H_1 , решения уравнения (4.5) неограниченно возрастают со временем. Для нахождения периодических колебаний, соответствующих состоянию системы в этом случае, необходимо решать совместно уравнения (4.1) и (4.2) с учетом тех нелинейностей, которые были отброшены при получении уравнения (4.5). При этом должно быть учтено взаимное влияние параметров r и p .

Ограничиваясь и в этом случае лишь наименьшими гармониками, периодическое решение уравнений (4.1) будем искать в виде

$$r = r_0 \cos \omega t + A \sin \omega t, \quad p = B \cos \omega t + p_0 \sin \omega t \quad (4.7)$$

Подставим выражения (4.7) в уравнения (4.1). Используя метод медленно изменяющихся амплитуд, произведем усреднение правых частей полученных уравнений. Далее, полагая при отыскании периодических решений системы (4.1) $r_0 = p_0 = A = B = 0$, получим некоторую алгебраическую систему уравнений относительно r_0, p_0, A, B , которая имеет решение

$$\begin{aligned} A = 0, \quad B = 0, \quad p_0^2 &= 4\zeta_6^{-1}(\Omega_0^2 - 1 - \zeta_1 r_0^2) \\ \zeta_9 r_0^3 + (\Omega_0^2 - 1)r_0 - H_0 \zeta_8^{-1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$H_0 = H_{00}(h) x_{30}, \quad H_{00}(h) = 2\xi_{11} \operatorname{th}(\xi_{11} h') / (\xi_{11}^2 - 1)$$

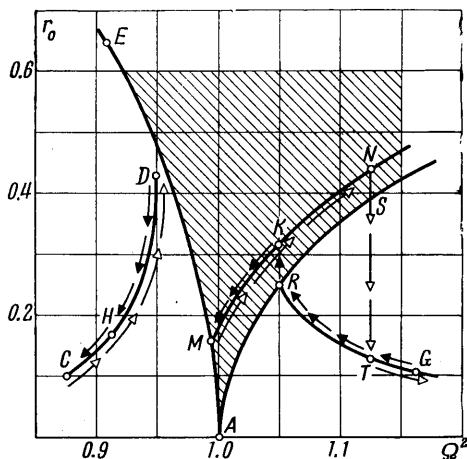
$$\zeta_9 = \zeta_7 / \zeta_8, \quad 4\zeta_6 \zeta_7 = 16\zeta_1^2 - \zeta_6^2, \quad \zeta_8 = 1 - 4\zeta_1 \zeta_6^{-1}$$

Периодическое решение уравнений (4.1) можно было бы искать непосредственно в виде (4.8), так как геометрическая интерпретация этого решения хорошо соответствует наблюдаемой при проведении экспериментальных исследований картине изменения формы свободной поверхности жидкости — «вращению» зеркала жидкости.

Имея решения (4.4) и (4.8), можно определить состояние рассматриваемой механической системы при небольших вариациях параметра ω в окрестности частоты ω_0 .

На фигуре приведена область H_1 (заштрихована) совместно с резонансными кривыми CHD , MKN и RTG . При этом изображенная на фигуре картина изменения параметра r качественно справедлива для уровней заполнения цилиндра, указанных в таблице.

Кривые CHD и RTG соответствуют устойчивым колебаниям жидкости в цилиндре, когда возбуждается лишь параметр r , амплитудное значение которого рассчитано в соответствии с (4.4). На фигуре не изображена неустойчивая ветвь левой резонансной амплитудной кривой, соответствующей нулевому сдвигу фазы между r и x_3^0 . Не изображена также часть правой резонансной кривой, которой соответствует сдвиг фаз между r и x_3^0 , равный π , так как эта часть попадает в область неустойчивости уравнения (4.5) и в этом смысле соответствует неустойчивым колебаниям параметра r .



Кривая MKN соответствует устойчивым колебаниям системы, когда в последней возбуждаются параметры r и p . Значения амплитуд r_0 и p_0 указанных параметров определены в соответствии с формулами (4.8). Задавшись конкретным значением амплитуды колебаний бака x_{30} , будем медленно увеличивать частоту ω от некоторого значения ω_C , соответствующего точке C , до значения ω_D , которому на кривой CHD отвечает точка D . При этом в системе установится режим колебаний, при котором параметр p не возбуждается ($p_0 = 0$). Такой режим будет устойчивым до тех пор, пока частота ω не превышает значения ω_C . Если ω удовлетворяет условию $\omega_C < \omega < \omega_M$ (ω_M соответствует на фигуре точке M), в рассматриваемой механической системе вообще не может быть установившихся колебаний. Если частота ω превысит значение ω_M , то в системе установится режим колебаний, когда отличны от нуля параметры r_0 , p_0 . Этим состояниям системы отвечает на фигуре кривая MKN . При дальнейшем увеличении частоты в некоторой точке N произойдет срыв колебаний, и система перейдет в состояние, которому отвечает возбуждение только одного параметра r . При обратном ходе изменения частоты ω состоянию системы сначала отвечает точки на кривой GTR .

В точке R система скачком переходит в состояние, которому соответствует возбуждение параметров r и p и будет находиться в этом состоянии пока частота ω не сравняется со значением ω_M . Переход системы из одного состояния в другое показан на фигуре различными стрелками. Важной особенностью рассматриваемой механической системы является то обстоятельство, что на частотах $\omega > \omega_R$ система может находиться в одном из двух устойчивых состояний. Решение вопроса о том, в каком состоянии находится система, зависит, по-видимому, от начальных значений амплитуд r_0 и p_0 или от истории системы, что характерно для нелинейных систем.

В заключение отметим, что хорошее согласование результатов, полученных в статье, с результатами, полученными экспериментальным путем, имеет место лишь для глубин жидкости h , больших радиуса цилиндра. При решении задачи для меньших глубин жидкости необходимо рассматривать общую систему уравнений (3.5), т. е. не пренебрегать симметричными формами колебаний жидкости.

Поступило 24 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней, ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
2. Нариманов Г. С. О колебаниях жидкости в подвижных полостях. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 10.
3. Моисеев Н. Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
4. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот ограниченного объема жидкости. ВЦ АН СССР. 1965.
5. Столбецов В. И. О колебаниях жидкости в сосуде, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда. МЖГ, 1967, № 1.
6. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. Изд. иностр. лит., 1953.