

## О НАИВЫГОДНЕЙШЕЙ ФОРМЕ НЕСУЩИХ ТЕЛ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Г. И. МАЙКАПАР

(Москва)

Вариационная задача о форме тела с минимальным сопротивлением при заданной подъемной силе, объеме и других связях в общем случае приводит к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка даже при простейших способах вычисления сопротивления (закон Ньютона и осредненный коэффициент трения). Решение этого уравнения не представляется оправданным, вместо этого предлагается приближенное решение, состоящее из: (а) выбора «схемы», характеризующей несколькими параметрами, которые определяются из решения экстремальной задачи, (б) определения наивыгоднейшей формы поверхностей при выбранной «схеме» при помощи системы обыкновенных уравнений Эйлера. В работе проведено сравнение «схем» тел с минимальным сопротивлением и максимальным качеством и приведены решения нескольких вариационных задач.

В настоящее время уже имеются достаточно полные представления о форме тел с минимальным сопротивлением при нулевой подъемной силе (ненесущих), и известны как приближенные, так и достаточно строгие методы решения соответствующих вариационных задач. Этого никак нельзя сказать о форме несущих тел, требованию к которым многочисленны, существенно различаются для аппаратов различного назначения и вообще не ограничиваются одним режимом полета. Учесть все обязательные требования при решении вариационных задач невозможно, поэтому указанные решения в большинстве случаев дают не ответы, непосредственно пригодные для практики, а предельные оценки.

Естественное стремление использовать для несущих тел привычную для ненесущих тел осесимметричную форму приводит к исследованию осесимметричных тел под углом атаки, осесимметричных тел с косым донным срезом, частям осесимметричных тел, вырезанным плоскостями и т. п. Для того чтобы получить более широкое представление о наивыгоднейших формах несущих тел, следует, очевидно, отказаться от ограничения осесимметричными телами и телами с подобными поперечными сечениями. В случае произвольной экстремальной поверхности, однако, уравнение Эйлера, является уравнением в частных производных второго порядка, и простое решение его затруднительно. Практически имеет смысл решение таких вариационных задач, уравнение Эйлера которых можно свести к системе обыкновенных дифференциальных. Поэтому предлагается следующий метод выбора наивыгоднейших форм: (а) выбирается схема — форма, образуемая набором плоскостей, цилиндрических, конических, сферических поверхностей, определяемая параметрами, которые находятся из решения экстремальной задачи, (б) при принятой «схеме» из решения вариационной задачи находятся образующие поверхности «схемы».

Для вычисления давления воздуха на поверхность тела применяется эмпирический закон Ньютона, дающий в большинстве экстремальных задач результаты, весьма близкие к более строгим методам. Предполагается, что давление может обращаться в нуль только на задней кромке тела. Коэффициент сопротивления трения, осредненный по его поверхности, предполагается не зависящим от формы тела. В случае тела простой формы наиболее нагретой частью его является лобовая, учет требований теплозащиты сводится к выбору соответствующих размеров этой части тела. В общем случае задача формулируется так: найти форму тела минимального сопротивления при заданной подъемной силе, объеме, длине и других условиях. Частному случаю тела с максимальным аэродинамическим качеством соответствует значение множителя Лагранжа  $\lambda = -1/k$ .

Все результаты расчетов, приводимые в работе, имеют целью лишь иллюстрировать метод.

После сдачи работы в печать появилась статья [3], в которой также предлагается метод определения оптимальных параметров.

**1. Тела с минимальным сопротивлением.** Рассмотрим в качестве «схем» пирамиды (фиг. 1), длину будем считать заданной, коэффициенты сопротивления  $C_x$  и подъемной силы  $C_y$  будем считать отнесенными к произве-

дению скоростного напора и квадрата длины, объем — к кубу длины, а линейные размеры — к длине тела. В случае пирамиды *a* (фиг. 1) минимальное сопротивление имеет место для симметричной пирамиды  $\alpha = \beta = \gamma$ ,  $y = z$ , причем в случае оптимального притупления ( $y \neq 0$ ) сопротивление при больших объемах  $v$  существенно меньше (фиг. 2), чем для острой пирамиды ( $y = 0$ ). Форма усеченной пирамиды ( $y, \alpha$ ) не зависит от величины коэффициента трения  $C_F$  (фиг. 3).

Коэффициент сопротивления заостренной пирамиды равен

$$C_x = 4 \left[ C_F \left( \frac{3v}{4} \right)^{1/2} + \frac{(3/4v)^2}{1 + 3/4v} \right] \quad (1.1)$$

Минимальное сопротивление пирамиды *b* (фиг. 1) имеет место в случае симметричного поперечного сечения ( $\theta_1 = \theta_2$ )

$$C_x = 3v \left( \frac{\xi}{1 + \xi} + \frac{C_F}{\sqrt{\xi}} \right), \quad C_F = \frac{2\xi^{3/2}}{(1 + \xi)^2} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{3}{2} v \left( \frac{1 + \sqrt{1 - (4/3\xi/v)^2}}{2\xi} \right)^{1/2} \\ \xi &= 3/4 v \sin 2\theta \end{aligned}$$

При малых значениях  $C_F$

$$\begin{aligned} C_x &\approx 9v C_F^{2/3} / 2^{2/3}, \quad \xi \approx (1/2 C_F)^{2/3} \\ \operatorname{tg} \gamma &\approx 3v / 2\sqrt{\xi}, \quad \operatorname{tg} \alpha \approx (1/2 C_F)^{1/6} \end{aligned} \quad (1.3)$$

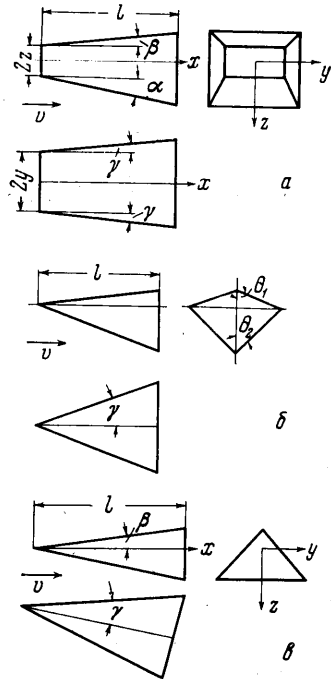
Заметим, что аналогичный результат получается для пирамиды с треугольным поперечным сечением в (фиг. 1)

$$C_x = 3v \sin^2 \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha), \quad C_F = 2 \sin^3 \alpha \cos \alpha \quad (1.4)$$

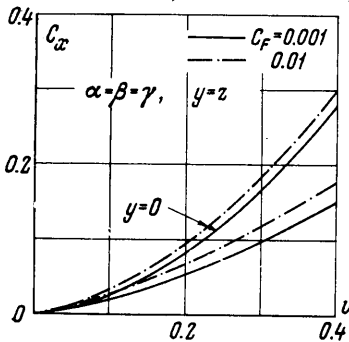
или при малых  $\alpha$

$$C_x \approx 9v C_F^{2/3} / 2^{2/3}, \quad \alpha \approx (1/2 C_F)^{1/6} \quad (1.5)$$

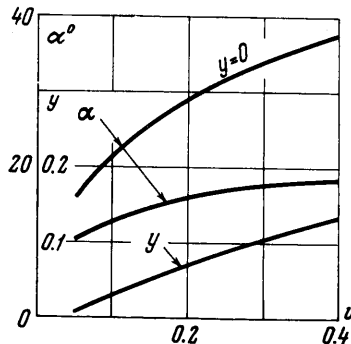
Углы  $\gamma$  в обоих случаях, конечно, различны и увеличиваются с ростом объема  $v$ . Сопротивление пирамиды *b* при  $v > 4/3\xi \approx 4/3(1/2 C_F)^{2/3}$  значительно меньше, чем сопротивление пирамиды *a* (фиг. 4), причем оно суще-



Фиг. 1

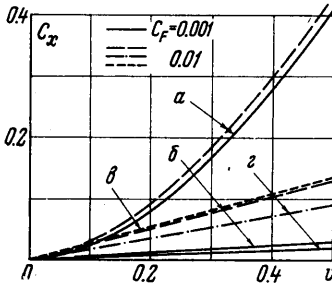


Фиг. 2

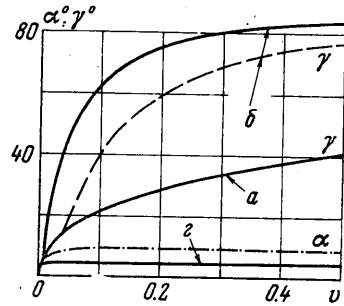


Фиг. 3

ственно зависит от величины  $C_F$ . Угол  $\gamma$  для пирамиды  $b$  с увеличением  $v$  приближается к  $90^\circ$  (фиг. 5). Можно заранее предположить поэтому, что клин конечной ширины  $z = 0$ ,  $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = 0$  будет иметь сопротивление, еще меньшее, чем пирамида  $b$ . Это, действительно, имеет место (фиг. 4), причем угол клина  $\alpha$  зависит от величины  $C_F$  и при не очень малых  $v$  почти не меняется с изменением  $v$  (фиг. 5), а ширина клина  $2y$  растет пропорционально объему. Следует отметить, что для оптимального клина ( $\alpha = \beta$ ,  $z = 0$ ) угол  $\gamma \neq 0$ , но близок к 0. Для пирамид  $b$  и  $c$  волновое сопротивление составляет  $1/3$  общего. Из (1.2) следует, между прочим, что если  $C_F \sim 1/\sqrt{l}$ , то при заданном объеме сопротивление умень-



Фиг. 4



Фиг. 5

шается с увеличением длины тела, предельная оптимальная длина может быть определена только с учетом влияния поперечной кривизны тела на пограничный слой.

**2. Тела с максимальным качеством.** Рассмотрим прежде всего клиновидный профиль ( $2z = 0$ ,  $2y = \infty$ , фиг. 1,  $a$ ), для которого угол  $\xi = \alpha + \beta$ , соответствующий наибольшему качеству, равен

$$\xi = \arctg \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{v} - v \right) - \frac{1}{12(v + C_F)} + \left( \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{v} - v \right) - \frac{1}{12(v + C_F)} \right]^2 + \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{C_F}{C_F + v} \right) \right)^{1/2} \right\} \quad (2.1)$$

Величина качества

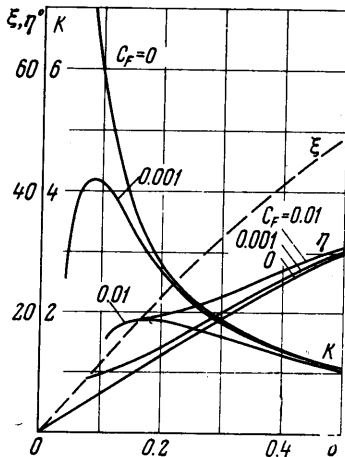
$$K = \left[ \operatorname{ctg} \xi - \frac{1}{v} + \frac{2(v + C_F)}{\sin^2 \xi} \right]^{-1} \times \sqrt{ \left[ 1 - \frac{1}{v^2} + \frac{2}{v} \operatorname{ctg} \xi \right] } \quad (2.2)$$

Относительная площадь сечения (2.3)

$$v = \frac{V}{l^2} = \frac{\sin \xi}{\cos \xi + \cos \eta}, \quad \eta = \alpha - \beta$$

На фиг. 6 приведены характеристики профиля с максимальным качеством; существенно то, что угол  $\beta$  обращается в 0 только при определенных величинах  $v$ , зависящих от  $C_F$ .

Рассмотрим теперь несколько схем, для которых вычисление наилучших параметров легко доводится до конца аналитически.



Фиг. 6

(1) Пирамида с треугольным сечением и плоской верхней поверхностью ( $\theta_1 = 1/2\pi, \theta_2 = 0$  фиг. 1, б),

$$K = \left[ \sqrt{\frac{3v}{\operatorname{tg} \theta} + C_F \left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right)} \left(1 + \frac{2}{3v \sin 2\theta}\right) \right]^{-1} \quad (2.4)$$

Величина угла  $\theta$  определяется из уравнения

$$C_F = \frac{(\frac{3}{2}v \sin 2\theta)^{3/2}}{1 + \cos 2\theta(3 + 2 \sin \theta) + 3v \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (2.5)$$

(2) Пирамида с треугольным сечением и плоской нижней поверхностью ( $\beta = 0$ , фиг. 1, в)

$$K = \left\{ \operatorname{tg} \alpha + C_F \left[ \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sqrt{\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{9v^2 \cos^4 \alpha}} \right] \right\}^{-1} \quad (2.6)$$

Величина угла  $\alpha$  определяется из уравнения

$$C_F = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{ctg}^3 \alpha + \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha / 9v^2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha / 9v^2}} \right]^{-1} \quad (2.7)$$

(3) Пирамида с прямоугольным сечением ( $y = z = \beta = 0$ , фиг. 1, а)

$$K = \left\{ \operatorname{tg} \alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha [1 + (2/3v^{-1} \operatorname{tg} \alpha)^2]} + C_F \left( \frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{2}{3v \cos^2 \alpha} \right) \right\}^{-1} \quad (2.8)$$

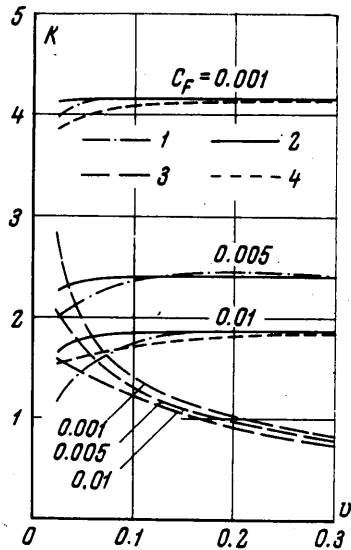
Величина угла  $\alpha$  определяется из уравнения

$$C_F = \frac{1}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 2/3v^{-1} \operatorname{tg} \alpha} \left\{ 1 - \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + (2/3v^{-1} \operatorname{tg} \alpha)^2} \left[ \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin^2 \alpha + (3/2v \cos \alpha)^2} \right] \right\} \quad (2.9)$$

(4) Клин конечной ширины ( $\beta = z = 0$ , фиг. 1, а). В этом случае максимальному качеству соответствует угол  $\gamma = 0$

$$K = \left[ \operatorname{tg} \alpha + C_F \left( \frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{2v \cos^2 \alpha} \right) \right]^{-1}$$

$$C_F = \frac{1}{4 \operatorname{ctg}^2 \alpha - v^{-1} \operatorname{tg} \alpha} \quad (2.10)$$



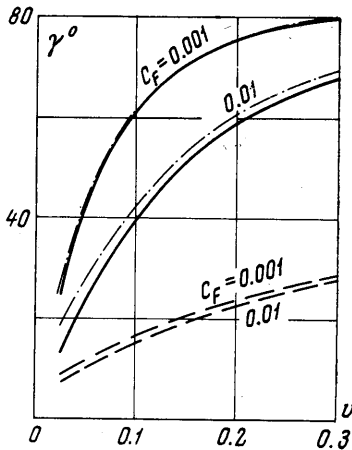
Фиг. 7

Результаты расчетов для этих схем представлены на фиг. 7—9 (обозначения общие). Самое низкое качество имеет пирамида 3, различие в качестве пирамид 1, 2 и клина 4 мало и меньше, чем отличие в величине  $C_x$  (фиг. 4).

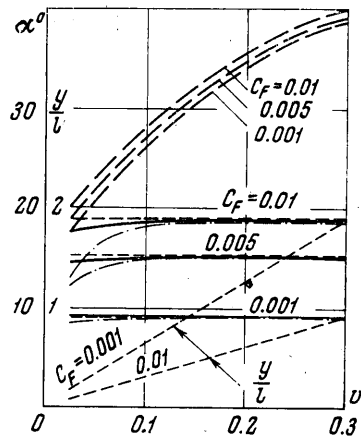
Угол  $\alpha$  для пирамид 1, 2, 4 зависит главным образом от величины  $C_F$  и мало изменяется с изменением объема, увеличение же объема происходит за счет увеличения угла  $\gamma$  или размаха  $2y$  (фиг. 8, 9).

В противоположность этому, углы  $\alpha, \gamma$  для пирамиды 3 слабо зависят от  $C_F$  (фиг. 8, 9). Приведенные примеры показывают, как схема влияет на величину качества и как изменяются оптимальные параметры при выбранной схеме в зависимости от величин  $v, C_F$ .

**3. Тонкое крыло.** Будем считать сначала контур крыла в плане  $x_0(y)$ , и координаты передней кромки  $z_{01}(y)$ ,  $z_{02}(y)$  заданными (для простоты



Фиг. 8



Фиг. 9

рассматриваем цилиндрическую переднюю кромку). Нижняя и верхняя стороны крыла заданы поверхностями  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  (фиг. 10). Будем предполагать, что

$$p_{1,2} = \partial z_{1,2} / \partial x \ll 1$$

$$q_{1,2} = \partial z_{1,2} / \partial y \ll 1$$

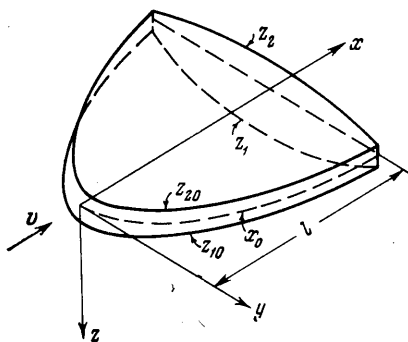
Сопротивление и подъемная сила

$$X = \iint (p_1^3 + p_2^3 + 2C_F) dx dy + \int \frac{z_{10} + z_{20}}{1 + x_0'^2} dy \quad (3.1)$$

$$Y = \iint (p_1^2 - p_2^2) dx dy \quad (3.2)$$

Объем крыла

$$V = \iint (z_1 + z_2) dx dy \quad (3.3)$$



Фиг. 10

Предположим еще, что положение центра давления

$$x_c \iint (p_1^2 - p_2^2) dx dy = \iint (p_1^2 - p_2^2) x dx dy \quad (3.4)$$

совпадает с положением центра тяжести

$$x_c \iint (z_1 + z_2) dx dy = \iint (z_1 + z_2) x dx dy \quad (3.5)$$

Необходимо, следовательно, найти экстремальные поверхности  $z_1$ ,  $z_2$  для функционала

$$J = \iint (p_1^3 + \lambda p_1^2 + \mu z_1 + p_2^2 - \lambda p_2^2 + \mu z_2) dx dy + v \left[ \iint (p_1^2 - p_2^2) x dx dy \iint (z_1 + z_2) dx dy - \iint (p_1^2 - p_2^2) dx dy \iint (z_1 + z_2) x dx dy \right] \quad (3.6)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — множители Лагранжа.

Обычными приемами вариационного исчисления получаем следующие дифференциальные уравнения экстремальных поверхностей:

$$\begin{aligned} \mu + \nu Y(x_c - x) - \frac{\partial}{\partial x} [3p_1^2 + 2\lambda p_1 + 2\nu p_1 V(x - x_c)] &= 0 \\ \mu + \nu Y(x_c - x) - \frac{\partial}{\partial x} [3p_2^2 - 2\lambda p_2 - 2\nu p_2 V(x - x_c)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если считать граничные условия на задней кромке естественными, то на ней должно быть

$$p_1 [3p_1 + 2\lambda + 2\nu V(x - x_c)] = 0, \quad p_2 [3p_2 - 2\lambda - 2\nu V(x - x_c)] = 0 \quad (3.8)$$

Предполагая, что задняя кромка — прямая  $x_1 = l$  и интегрируя (3.6), получим

$$\begin{aligned} 3p_1^2 + 2[\lambda + \nu V(x - x_c)] p_1 &= (l - x) \{ \nu Y [1/2(l + x) - x_c] - \mu \} \\ 3p_2^2 - 2[\lambda + \nu V(x - x_c)] p_2 &= (l - x) \{ \nu Y [1/2(l + x) - x_c] - \mu \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p_1 &= -1/3[\lambda + \nu V(x - x_c)] \pm \\ &\pm \sqrt{1/9[\lambda + \nu V(x - x_c)]^2 + 1/3(l - x) \{ \nu Y [1/2(l + x) - x_c] - \mu \}} \\ p_2 &= 1/3[\lambda + \nu V(x - x_c)] \pm \\ &\pm \sqrt{1/9[\lambda + \nu V(x - x_c)]^2 + 1/3(l - x) \{ \nu Y [1/2(l + x) - x_c] - \mu \}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из формул (3.7), (3.9) очевидно, что нельзя считать одновременно на задней кромке  $p_1 = p_2 = 0$  или

$$3p_1 + 2[\lambda + \nu V(x - x_c)] = 3p_2 - 2[\lambda + \nu V(x - x_c)] = 0$$

Так как при этом наклон одной из поверхностей  $z_1$ ,  $z_2$  будет отрицательным, то примем, что на задней кромке

$$p_1 = -2/3[\lambda + \nu V(l - x_c)], \quad p_2 = 0 \quad (3.11)$$

Из двух знаков перед корнями в (3.10) следует оставить минус. Интегрируя (3.10), получим

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{10} - 1/3(x - x_0) \{ \lambda + \nu V [1/2(x + x_0) - x_c] \} + f(x_0) - f(x) \\ z_2 &= z_{20} + 1/3(x - x_0) \{ \lambda + \nu V [1/2(x + x_0) - x_c] \} + f(x_0) - f(x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$f(x) = 1/2 \sqrt{1/3\nu(1/3\nu V^2 - 1/2Y)} [\xi \sqrt{\xi^2 + A} + A \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + A})]$$

$$\xi = x + B, \quad B = \frac{2/3\nu V(\lambda - \nu V x_c) + \nu Y x_c + \mu}{2\nu(1/3\nu V^2 - 1/2Y)}$$

$$A = \frac{1/3(\lambda\nu V x_c)^2 + i[\nu Y(1/2l - x_c) - \mu]}{\nu(1/3\nu V^2 - 1/2Y)} - \left[ \frac{2/3\nu V(\lambda - \nu V x_c) + \nu Y x_c + \mu}{2\nu(1/3\nu V^2 - 1/2Y)} \right]^2$$

Вследствие наличия связи (3.4) профиль крыла уже не симметричный, в отличие от полученного ранее [1]. Постоянные  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  и величина  $x_c$  определяются из уравнений (3.2) — (3.5), после чего коэффициент сопро-

тивления может быть представлен как интеграл от неизвестных функций  $z_{10}(y)$ ,  $z_{20}(y)$ ,  $x_0(y)$

$$X = \int \frac{(z_{10} + z_{20}) dy}{1 + x_0'^2} + 2C_F \int (l - x_0) dy - \quad (3.13)$$

$$- 2/3 \int \sqrt{1/9[\lambda + vV(x - x_c)]^2 + 1/3(l - x) \{vY[1/2(l+x) - x_c] - \mu\}} \times$$

$$\times \{4/3[\lambda + vV(x - x_c)]^2 + (l - x) \{vY[1/2(l+x) - x_c] - \mu\} dx dy$$

Необходимой связью для выбора  $z_{10}$ ,  $z_{20}$ ,  $x_0$  будет задание максимального теплового потока к передней кромке, который зависит от ее средней кривизны и угла скольжения, вид этой неголономной связи следующий:

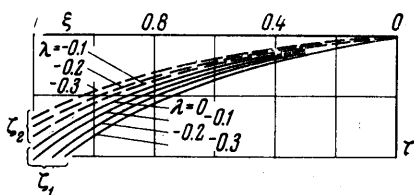
$$\left[ \frac{2}{z_{10} + z_{20}} + \frac{x_0''}{(1 + x_0'^2)^{3/2}} \right] (1 + x_0'^2)^n = \text{const} \quad (3.14)$$

Принципиально вариационная задача может быть доведена до конца, т. е. включая выбор толщины передней кромки и контура крыла.

**4. Профиль крыла.** Рассмотрим задачу о профиле с минимальным сопротивлением

$$C_x = \int_0^1 \left( \frac{z_1'^3}{1 + z_1'^2} + \frac{z_2'^3}{1 + z_2'^2} \right) dx + z_{01} + z_{02} \quad (4.1)$$

при заданной подъемной силе



$$C_y = \int_0^1 \left( \frac{1}{1 + z_2'^2} - \frac{1}{1 + z_1'^2} \right) dx \quad (4.2)$$

и объеме

$$v = \int_0^1 (z_1 + z_2) dx \quad (4.3)$$

Фиг. 11

не делая предположения о его малой толщине. Обычными приемами вариационного исчисления получаем

$$\frac{d}{dx} \frac{z_1'(z_1'^3 + 3z_1' + 2\lambda)}{1 + z_1'^2} = \frac{d}{dx} \frac{z_2'(z_2'^3 + 3z_2' - 2\lambda)}{(1 + z_2'^2)^2} = \mu$$

Интегрируя, имеем

$$\frac{z_1'(z_1'^3 + 3z_1' + 2\lambda)}{(1 + z_1'^2)^2} + C_1 = \frac{z_1'^2 + 2\lambda z_1' - 1}{(1 + z_1'^2)^2} + C_1' =$$

$$= \frac{z_2'(z_2'^3 + 3z_2' - 2\lambda)}{(1 + z_2'^2)^2} + C_2 = \frac{z_2'^2 - 2\lambda z_2' - 1}{(1 + z_2'^2)^3} + C_2' = \mu x \quad (4.4)$$

Будем считать, что граничное условие для  $x = 0$  — это заданная суммарная толщина, т. е.  $z_{10} + z_{20} = d$ , или, что в данном случае то же самое:  $z_{10}$  и  $z_{20}$  заданы, а для  $x = 1$  граничные условия естественные

$$z_1'(z_1'^3 + 2z_1' + 2\lambda) = z_2'(z_2'^3 + 3z_2' - 2\lambda) = 0 \quad (4.5)$$

Чтобы найти  $z_1$ ,  $z_2$ , воспользуемся параметрической формой

$$\mu x = \mu \int \frac{dx}{dz'} z' dz' = \mu x z' - \int \mu x dz'$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\mu z_1 = \frac{2z_1'^3 + \lambda(1 + 3z_1'^2)}{(1 + z_1'^2)^2} + D_1, \quad \mu z_2 = \frac{2z_2'^3 - \lambda(1 + 3z_2'^2)}{(1 + z_2'^2)^2} + D_2 \quad (4.6)$$

Из (4.6) и граничных условий (4.5) получаем  $C_1 = C_2 = \mu$ , следовательно,

$$\frac{z_1'(z_1'^3 + 3z_1' + 2\lambda)}{(1 + z_1'^2)^2} = \frac{z_2'(z_2'^3 + 3z_2' - 2\lambda)}{(1 + z_2'^2)^2} = -\mu(1 - x) = \xi_1$$

и так как

$$z_1' = (\sqrt{\lambda^2 + 1} - \lambda)^{1/3} - (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})^{1/3}, \quad z_2' = 0 \quad \text{при } x = 1$$

то

$$\xi_1 = -\mu(z_{11} - z_1) = \frac{2z_1'^3 + \lambda(1 + 3z_1'^2)}{(1 + z_1'^2)^2} - \frac{2z_{11}'^3 + \lambda(1 + 3z_{11}'^2)}{(1 + z_{11}'^2)^2}$$

$$\xi_2 = -\mu(z_2 - z_{21}) = \lambda + \frac{2z_2'^3 - \lambda(1 + 3z_2'^2)}{(1 + z_2'^2)^2} \quad (4.7)$$

Величины  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $z_{11}$ ,  $z_{21}$  выбираются так, чтобы удовлетворились уравнения (4.2), (4.3). Полученные экстремали представлены на фиг. 11, вообще профили получаются несимметричными.

**5. Половина тела вращения. Будем искать экстремальный контур тела с полукруговыми поперечными сечениями<sup>1</sup>, сопротивление которого**

$$X = \frac{\pi y_0^2}{2} + \pi \int_0^l \left[ \frac{y'^3}{1 + y'^2} + C_F \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) \right] y dx =$$

$$= \frac{\pi y_0^2}{2} + \pi \int_{y_0}^{y_l} \left[ \frac{1}{1 + x'^2} + C_F x' \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) \right] y dy \quad (5.1)$$

Подъемная сила и объем заданы (5.2)

$$Y = 2 \int_0^l \frac{y'^2 y dx}{1 + y'^2} = 2 \int_{y_0}^{y_l} \frac{x' y dy}{1 + x'^2}, \quad V = \frac{\pi}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_{y_0}^{y_l} y^2 x' dy$$

Координату  $y_0$  будем считать заданной в соответствии с ограничением теплового потока в критической точке. Необходимым условием будет также задание длины или максимального диаметра.

В случае заданного максимального диаметра подинтегральная функция функционала  $X + \lambda Y + \mu V$  не зависит от искомой функции  $x(y)$ . Поэтому из уравнения Эйлера получаем

$$\mu y + C_F \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) + \frac{\lambda(1 - x'^2) - 2x'}{(1 + x'^2)^2} = \frac{C}{y} \quad (5.3)$$

<sup>1</sup> В случае тела вращения задание угла атаки, что приближенно эквивалентно заданию подъемной силы, приводит только к новым граничным условиям, а дифференциальное уравнение Эйлера остается тем же, что и для нулевого угла атаки, так как сопротивление равно

$$X = \pi \cos^2 \alpha \left[ y_0^2 + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha (y_l^2 - y_0^2) + (2 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha) \int_{y_0}^{y_l} \frac{y dy}{1 + x'^2} \right]$$



Естественное граничное условие на конце интервала ( $y = y_l$ )

$$\mu y + C_F \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + \frac{\lambda(1 - x'^2) - 2x'}{(1 + x'^2)^2} = 0 \quad (5.4)$$

Из (5.4) следует, что  $C = 0$ , и, значит,

$$\mu y = \frac{2x' - \lambda(1 - x'^2)}{(1 + x'^2)^2} - C_F \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \quad (5.5)$$

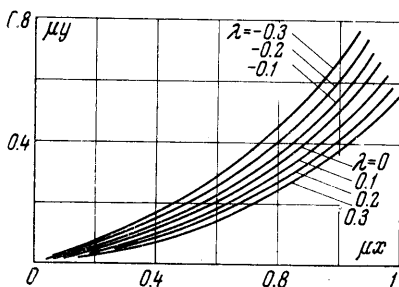
Рассматривая  $x'$  как параметр, из (5.5) получим

$$\mu x = \mu y x' - \int \mu y dx' = \frac{1 + 3x'^2 + 2\lambda x'^3}{(1 + x'^2)^2} \quad (5.6)$$

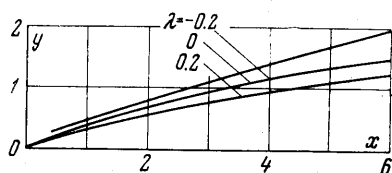
Полученные по формулам (5.5), (5.6) контуры представлены на фиг. 12, наклон и кривизна контура увеличиваются с увеличением подъемной силы.

Перейдем теперь к случаю тела заданной длины; дифференциальное уравнение будет то же (5.3), однако естественное граничное условие будет иное, именно при  $x = l$

$$y'(y'^3 + 3y' + 2\lambda) = 0 \quad (5.7)$$



Фиг. 12



Фиг. 13

Следовательно, постоянная  $C$  уже не будет равна 0. В общем случае уравнение (5.3) можно решить только численно, аналитическое решение в параметрической форме легко найти для случая, соответствующего задаче, решенной Ньютоном:  $\mu = C_F = 0$ , в котором

$$y = \frac{(1 + x'^2)^2}{x' + \lambda(x'^2 - 1)} \quad (5.8)$$

Координату  $x$  определяем, интегрируя по частям

$$x = x'y - \int y dx' = \frac{2x'^3}{3\lambda} - \frac{x'^2}{2\lambda^2} - \frac{(1 + 4\lambda^2)x'(x' - \lambda)}{\lambda^3[x' + \lambda(x'^2 - 1)]} - \frac{\sqrt{1 + 4\lambda^2}(1 + 2\lambda^2)}{2\lambda^4} \ln \frac{2\lambda x' + 1 - \sqrt{1 + 4\lambda^2}}{2\lambda x' + 1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2}} + \frac{1 + 4\lambda^2}{2\lambda^4} \ln(\lambda x'^2 + x' - \lambda) \quad (5.9)$$

Это решение при  $\lambda = 0$  переходит в известное решение Ньютона для тела вращения [2]. В случае пологого тела, когда  $y' \ll 1$ , решение можно предоставить приближенно

$$y = \frac{1}{y'^2(y' + \lambda)}, \quad x = \frac{2}{3\lambda y'^2} - \frac{1}{2\lambda^2 y'^2} - \frac{1}{\lambda^3(y' + \lambda)} + \frac{1}{\lambda^4} \ln \left(1 + \frac{\lambda}{y'}\right) \quad (5.10)$$

Контур, вычисленные по формулам (5.10), представлены на фиг. 13; с увеличением подъемной силы наклон увеличивается и кривизна контура уменьшается.

6. Тела с прямоугольным поперечным сечением. Рассмотрим тело, поверхность которого образована цилиндрическими поверхностями  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$  и  $\pm y(x)$ , причем заданы начальные координаты  $z_{10}$ ,  $z_{20}$ ,  $y_0$ , длина, объем  $V$ , подъемная сила  $Y$

$$V = 2 \int_0^1 y(z_1 + z_2) dx, \quad Y = 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{1 + z_2'^2} - \frac{1}{1 + z_1'^2} \right) y dx \quad (6.1)$$

Сопротивление

$$X = 2 \left\{ y_0(z_{10} + z_{20}) + \int_0^1 \left( \frac{z_1'^3}{1 + z_1'^2} + \frac{z_2'^3}{1 + z_2'^2} + 2C_F \right) y dx + \int_0^1 (z_1 + z_2) \left( \frac{y'^3}{1 + y'^2} + C_F \right) dx \right\} \quad (6.2)$$

должно быть минимальным.

Система уравнений Эйлера получается следующая: (6.4)

$$\frac{d}{dx} \frac{y z_1' (z_1'^3 + 3z_1' + 2\lambda)}{(1 + z_1'^2)^2} = \frac{d}{dx} \frac{y z_2' (z_2'^3 + 3z_2' - 2\lambda)}{(1 + z_2'^2)^2} = \mu y + \frac{y'^3}{1 + y'^2} \quad (6.3)$$

$$\mu(z_1 + z_2) + \frac{z_1'^3 - \lambda}{1 + z_1'^2} + \frac{z_2'^3 + \lambda}{1 + z_2'^2} + 2C_F - \frac{d}{dx} (z_1 + z_2) \frac{y'^3(3 + y'^2)}{(1 + y'^2)^2} = 0$$

естественные граничные условия на конце интервала

$$z_1'(z_1'^3 + 3z_1' + 2\lambda) = z_2'(z_2'^3 + 3z_2' - 2\lambda) = y'^2(3 + y'^2) = 0 \quad (6.5)$$

Так как в подынтегральные функции не входит независимая переменная  $x$ , то легко найти один первый интеграл системы (6.3), (6.4)

$$\mu y(z_1 + z_2) + \left[ 2C_F - \frac{2z_1'^3 + \lambda(1 + 3z_1'^2)}{(1 + z_1'^2)^2} - \frac{2z_2'^3 - \lambda(1 + 3z_2'^2)}{(1 + z_2'^2)^2} \right] + (z_1 + z_2) \left[ C_F - \frac{2y'^3}{(1 + y'^2)^2} \right] = C_1$$

второй первый интеграл следует из (6.3)

$$\begin{aligned} \frac{z_1'(z_1'^3 + 3z_1' + 2\lambda)}{(1 + z_1'^2)^2} - \frac{z_2'(z_2'^3 + 3z_2' - 2\lambda)}{(1 + z_2'^2)^2} &= \\ = \frac{z_1'^2 + 2\lambda z_1' - 1}{(1 + z_1'^2)^2} - \frac{z_2'^2 - 2\lambda z_2' - 1}{(1 + z_2'^2)^2} &= \frac{C_2}{y} \end{aligned}$$

Однако еще один первый интеграл найти не удастся, поэтому проще всего решать систему путем итераций: считая  $y(x)$  заданной, из (6.3) найти  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$ , а затем, считая известными  $z_1(x)$  и  $z_2(x)$ , из (6.4) найти  $y(x)$  и т. д.

#### ЛИТЕРАТУРА

Поступило 24 VI 66

1. Майкапар Г. И. Крыло с максимальным аэродинамическим качеством при гиперзвуковых скоростях. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
2. Гурса Э. Курс математического анализа, т. III, ч. 2. Гостехиздат, 1934.
3. Hankey W., Schroeder L. Optimization of hypersonic lifting bodies. Res. Rev., 1966, vol. 5, No. 5.