

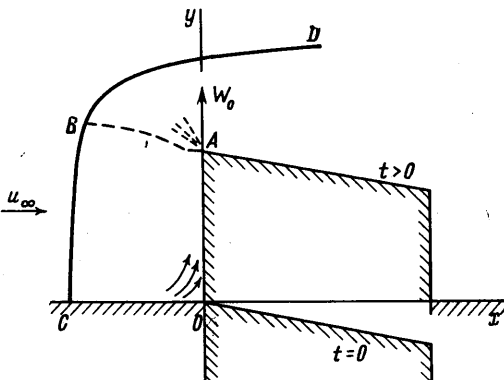
## О ПРОНИКАНИИ ПЛАСТИНКИ В ПОЛУПЛОСКОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА

С. К. БЕТЯЕВ

(Москва)

Рассмотрена двумерная автомодельная задача о равномерном входе профили с плоской носовой частью в полуплоскость однородного потока идеального совершенного газа. Для схемы течения с одной отсоединенной ударной волной и линией параболжности, исходящей из угловой точки тела, получено численное решение задачи в эллиптической области методом интегральных соотношений.

§ 1. Пусть в момент времени  $t = 0$  вершина  $A$  плоской носовой части профиля или пластинки, расположенная в начале прямоугольных координат  $x, y$ , начинает вдвигаться с постоянной скоростью  $w_0$ , направленной по оси  $y$ , в полуплоскость  $y \geq 0$  однородного потока идеального совершенного газа таким образом, что носовая часть профиля остается все время перпендикулярной направлению набегающего на нее потока невозмущенного газа (фиг. 1). В таком случае перед профилем возникнет отсоединенная ударная волна (схематично показанная сплошной линией  $CBD$  на фиг. 1), движущаяся навстречу однородному потоку.



Фиг. 1

Априори следует ожидать, что при достаточно малых значениях  $w_0$  из угловой точки  $A$  будет исходить линия параболжности  $AB$  (фиг. 1) подобно тому, как это происходит при стационарном обтекании тупоносого профиля. В этом случае течение вниз по потоку от точки  $A$  не влияет на решение задачи в эллиптической области  $ABCO$ , поэтому движение газа в этой области будет автомодельным вплоть до момента отделения носовой части профиля от линии  $y = 0$ . Течение будет автомодельным в целом, если катапультируемое тело представляет собой клин. Классификацию автомодельных движений в целом удобнее проводить по виду течения в окрестности угловой точки  $A$ . Можно различить следующие три возможности.

1. В окрестности  $A$  происходит разворот течения по часовой стрелке (фиг. 1).
2. С увеличением скорости катапультирования  $w_0$  точка  $A$  может стать точкой разделения линии тока. Поток уже не будет разворачиваться вокруг точки  $A$ . Ниже будет установлен критерий, позволяющий отличать такую схему течения от схемы 1.
3. Наконец, если поджатие газа кормовой частью профиля значительно, то в окрестности точки  $A$  будет происходить разворот течения против часовой стрелки. При этом существенно изменится расположение поверхностей разрыва.

Если движение неавтомодельно в целом, то один режим обтекания может переходить в другой. Практический интерес представляет схема течения 1, рассматриваемая в настоящей работе.

Так как задача автомодельна, то все величины будут зависеть от двух переменных:  $\alpha = x/u_\infty t$  и  $\beta = y/u_\infty t$ . Обозначим составляющие скоро-

сти по направлению  $x$  и  $y$ , отнесенные к скорости набегающего потока  $u_\infty$ , соответственно через  $u$  и  $v$ ; плотность, отнесенную к плотности невозмущенного газа  $\rho_\infty$ , — через  $\rho$ ; давление, отнесенное к  $\rho_\infty u_\infty^2$ , — через  $p$ . Система газодинамических уравнений в дивергентной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(p + \rho U^2)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho UV}{\partial \beta} &= -3\rho U, & \frac{\partial \rho UV}{\partial \alpha} + \frac{\partial(p + \rho V^2)}{\partial \beta} &= -3\rho V \\ \frac{\partial \rho U}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho V}{\partial \beta} &= -2\rho, & \frac{\partial \rho US}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho VS}{\partial \beta} &= -2\rho \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$U = u - \alpha, \quad V = v - \beta, \quad S = p\rho^{-\gamma}$$

Величины на ударной волне и профиле будем обозначать соответственно нижними индексами 1 и 0. Граничные условия на ударной волне, носовой части профиля и оси симметрии ( $\beta = 0$ ) примут вид

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/c^2 M_\infty^2}, & p_1 &= \frac{2\gamma c^2 M_\infty^2 - (\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)M_\infty^2} \quad \left(M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty}\right) \\ V_1 &= \frac{2c\sigma}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{c^2 M_\infty^2}\right) \frac{1}{(1 + \sigma^2)^{1/2}} - \beta, & \sigma &= \frac{d\alpha_1(\beta)}{d\beta}, \quad a = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2} \\ U_1 &= 1 - \alpha_1(\beta) - \frac{2c}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{c^2 M_\infty^2}\right) \frac{1}{(1 + \sigma^2)^{1/2}}, & c &= \frac{1 - \alpha_1 + \beta\sigma}{(1 + \sigma^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

здесь  $c$  — безразмерная скорость распространения ударной волны;

$$U_0 = 0, \quad V(\alpha, 0) = 0 \quad (1.3)$$

Координата угловой точки

$$\beta^* = k/M_\infty \quad (k = W_0/a_\infty)$$

Уравнения (1.1) формально отличаются от стационарных только наличием правой части. Энтروпийная функция  $S$  постоянна вдоль линии  $L$ , задаваемой уравнением

$$(d\alpha/d\beta)_L = U/V \quad (1.4)$$

Следовательно,

$$S_0 = S(\alpha, 0) = S_1(\alpha_1, 0) \quad (1.5)$$

Вдоль линии  $L$  справедливо также дифференциальное уравнение, представляющее собой аналог уравнения Бернулли. Например, на оси симметрии и на теле справедливы уравнения

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{a^2(\alpha, 0)}{\gamma - 1} + \frac{U^2(\alpha, 0)}{2} \right) = -U(\alpha, 0) \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{d\beta} \left( \frac{a_0^2}{\gamma - 1} + \frac{V_0^2}{2} \right) = -V_0 \quad (1.7)$$

Уравнение линий тока (1.4) имеет особенность при  $U = V = 0$ . Такое условие заведомо выполняется в критической точке  $O$  (фиг. 1). Чтобы исследовать эту особую точку, представим (1.4) в ее окрестности в виде

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial U/\partial \alpha}{\partial V/\partial \beta}$$

При этом учтено, что в окрестности критической точки  $\partial U/\partial \beta = -\partial V/\partial \alpha = 0$ . В принятой схеме течения производная  $\partial U/\partial \alpha < 0$ , по-

этому тип особенности будет зависеть от знака производной  $\partial V / \partial \beta$ . При  $\partial V / \partial \beta > 0$  особая точка будет седлом, а при  $\partial V / \partial \beta < 0$  — узлом (ср. [1]). Схеме течения I должна соответствовать особая точка типа седла. Разрушение такого режима происходит при  $\partial V / \partial \beta = 0$ . При  $\partial V / \partial \beta < 0$  энтропия на профиле не равна энтропии на оси симметрии.

§ 2. Чтобы оценить распределение давления на носовой части профиля, ограничимся рассмотрением первого приближения метода интегральных соотношений, который в общей форме был предложен А. А. Дородницыным [2] и применен к решению газодинамических задач О. М. Белоцерковским [3] и впоследствии — другими авторами.

В первом приближении метода можно использовать два точных уравнения (1.5) и (1.7), а остальные два уравнения получить, например, из первого и третьего уравнений системы (1.1); если проинтегрировать их по  $\alpha$  вдоль линии  $\beta = \text{const}$  от поверхности профиля до ударной волны, линейно аппроксимируя на этом участке подынтегральные функции. Система полученных таким образом уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \sigma, & \sigma' &= M, & \rho_0' &= -V_0 \frac{\rho_0 + N}{a_0^2 - V_0^2} & V_0' &= \frac{V_0^2 + N a_0^2 / \rho_0}{a_0^2 - V_0^2} & (2.1) \\ M &= \frac{1}{\alpha_1} \left( \frac{\partial \rho_1 U_1 V_1}{\partial \sigma} \right)^{-1} [2(p_0 - p_1) - 2\rho_1 U_1^2 - 2\rho_1 U_1 \alpha_1 + \sigma \rho_1 V_1 (U_1 + \alpha_1)] \\ N &= \frac{d\rho_0 V_0}{d\beta} = \frac{1}{\alpha_1} (\sigma \rho_1 V_1 - \sigma \rho_0 V_0 - 2\rho_1 U_1) - 2\rho_0 - \rho_1 - M \frac{\partial \rho_1 V_1}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

Частные производные по  $\sigma$  находятся из условий на ударной волне (1.2). Граничные условия при  $\beta = 0$  будут следующими:

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= 0, & V_0(0) &= 0. \\ \rho_0(0) &= \rho_1(0) \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\rho_1(0) U_1(0)}{p_1(0)} [U_1(0) - \alpha_1(0)] \right\}^{1/(\gamma-1)} & (2.2) \end{aligned}$$

Последнее условие получено из уравнения (1.6) интегрированием его от скачка до профиля с линейной аппроксимацией функции  $U(\alpha, 0)$ .

При интегрировании полученной системы уравнений (2.1) с условиями (2.2) единственным неизвестным параметром остается  $\alpha_1(0)$ . Он должен выбираться из дополнительного условия при  $\beta > 0$ . Чтобы вывести это условие, рассмотрим течение в окрестности точки  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \beta^*$ . Из уравнений (1.1) можно заключить, что в непосредственной окрестности этой точки реализуется течение типа Прандтля — Майера. Скорость потока в этой точке относительно движущегося профиля не должна быть меньше скорости звука<sup>1</sup>, т. е.

$$V_0(\beta^*) = v_0(\beta^*) - k/M_\infty \geq a_0(\beta^*)$$

С другой стороны, скорость  $V_0$  должна достигать скорости звука только в угловой точке профиля, так как в другой точке не может быть бесконечного ускорения потока, согласно последнему уравнению системы (2.1) имеющего место в общем случае при  $V_0^2 = a_0^2$ . Таким образом, естественным дополнительным условием будет

$$V_0^2(\beta^* = k/M_\infty) = \gamma p_0(\beta^*) / \rho_0(\beta^*) \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> Для уравнений (1.1) именно равенство  $U^2 + V^2 = a^2$  определяет линию параболы. Действительно, каждая точка  $\alpha, \beta$  движется с безразмерной скоростью  $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$  в физической плоскости  $xy$ . Поэтому возмущения будут локализованы, если скорость газа относительно данной точки будет больше скорости звука, хотя скорость газа в лабораторной системе координат  $(u^2 + v^2)^{1/2}$  может быть и меньше скорости звука.

Отметим, что при решении задачи о стационарном обтекании тела с угловой точкой методом интегральных соотношений также используется условие равенства скорости газа и скорости звука в угловой точке [4]<sup>1</sup>.

§ 3. Уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3) решались на ЭВМ методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом для различных значений  $M_\infty$  и  $k$  при  $\gamma = 1.405$ . Параметр  $\alpha_1(0)$  подбирался таким, чтобы вычисленное значение  $\beta^* M_\infty$  совпадало с заданным значением величины  $k$ . Стрельба по параметру проводилась методом Ньютона. Значения  $\alpha_1(0)$  выбирались в определенных пределах, а именно

$$\alpha_1(0) \geq \frac{1}{4}(3 - \gamma) - [1/16(\gamma + 1)^2 + 1/M_\infty^2]^{1/2} \quad (3.1)$$

Такая область изменения  $\alpha_1(0)$  получена из четвертого условия (1.2) в предположении, что скорость  $u_1$  за ударной волной положительна. Равенство в (3.1) достигается в предельном случае  $k \rightarrow \infty$ .

Однако принятой схеме течения отвечает не вся указанная область изменения параметра  $\alpha_1(0)$ . Предельное значение  $\alpha_1(0)$  в первом приближении метода интегральных соотношений находилось из условия  $N|_{\beta=0} = 0$ . При значениях  $M_\infty > 3$  предельная граница  $\alpha_1(0)$  незначительно отличается от  $-0.1$ . При значениях  $\alpha_1(0)$ , больших предельного,  $N|_{\beta=0} > 0$ , следовательно, критическая особая точка уравнения (1.4) является седлом.

На фиг. 2—4 представлены зависимости  $p_0(\beta)$ ,  $V_0(\beta)$  и  $\alpha^\circ(\beta)$ , где  $\alpha^\circ(\beta) = |\alpha_1|/\beta^*$  соответственно при  $M_\infty = 3, 5$  и  $10$  для различных значений  $k$ . Значения  $k$  выдерживались с точностью до 0.01%.

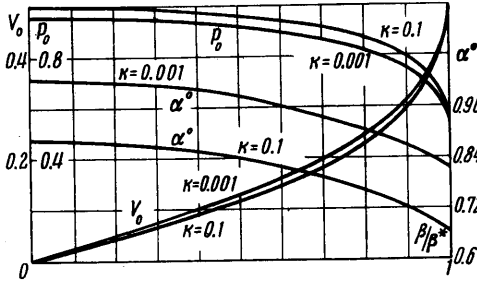
Качественно кривые ведут себя так же, как и в случае стационарного обтекания тупоносого профиля. Давление с ростом  $\beta$  падает, скорость  $V_0$  возрастает, расстояние между ударной волной и профилем уменьшается. С ростом параметра  $k$  давление возрастает, скорость убывает.

В предельном случае  $k = 0$  решение стремится к стационарному. В этом легко убедиться,

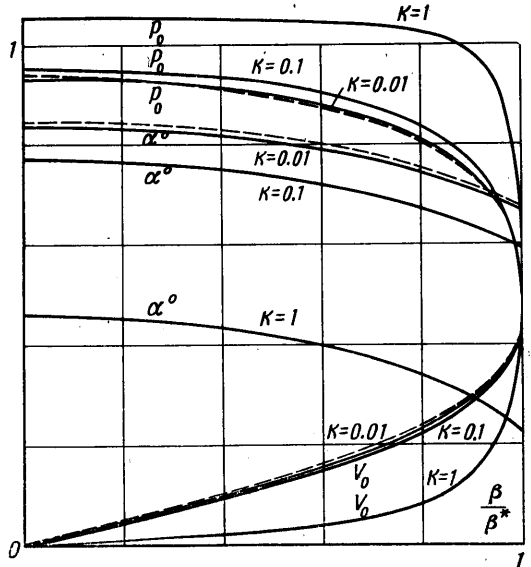
если в систему (1.1) и условия (1.2) ввести новые переменные  $\alpha_2 = \alpha/k$  и  $\beta_2 = \beta/k$  и устремить  $k$  к нулю. При  $k < 0.01$  функции отличаются от соответствующих стационарных менее чем на 2%. На фиг. 3 штриховой линией показано стационарное решение при  $\gamma = 1.4$  и  $M_\infty = 5$ , взятое из работы [3]. Распределение давления при малых значениях скорости катапультирования  $k$  слабо зависит от числа  $M_\infty$ . С увеличением числа  $M_\infty$  при постоянном значении  $k$  скорость движения ударной волны

<sup>1</sup> Если носовая часть профиля проникает в невозмущенный поток не перпендикулярно его направлению, а под некоторым углом  $\theta_0$ , меньшим критического, т. е.  $\alpha_0 = \beta \operatorname{ctg} \theta_0$ , то возможно сверхзвуковое течение с присоединенным скачком уплотнения и постоянными значениями  $p, \rho, u, v$  перед косым срезом профиля вплоть до некоторой линии, исходящей из угловой точки, за которой течение будет переходить в нестационарное.

<sup>2</sup> В принципе первое приближение метода интегральных соотношений в рассматриваемом случае, так же как и в стационарном, применимо для  $M_\infty > M^* \approx 2.4$ . По-видимому, что связано с увеличением аппроксимационной ошибки при малых  $M_\infty$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

уменьшается. На фиг. 5 приведена зависимость коэффициента лобового сопротивления

$$C_x(k) = \frac{2}{\beta^*} \int_0^{\beta^*} p_0 d\beta$$

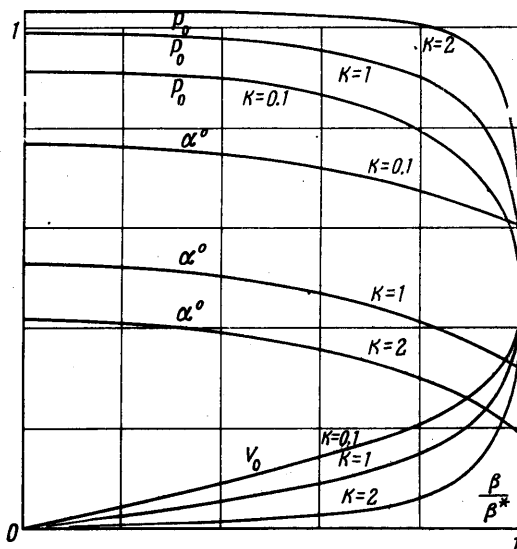
при различных значениях  $M_\infty$ . Видно, что с ростом  $k$  коэффициент  $C_x$  увеличивается. Увеличивается и значение безразмерного изгибающего момента (фиг. 6)

$$m(k) = \frac{2}{\beta^{*2}} \int_0^{\beta^*} \beta p_0 d\beta$$

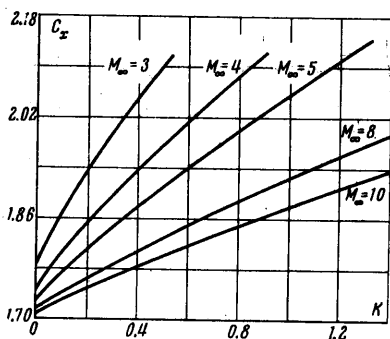
С увеличением  $M_\infty$  функции  $C_x(k)$  и  $m(k)$  возрастают медленнее.

§ 4. Чтобы определить донное давление за катапультируемым телом, необходимо решать неавтономную задачу о движении газа. Однако при инженерных расчетах донным давлением можно пренебречь по сравнению с давлением на переднюю поверхность тела. Так, если в момент  $t = 0$  мгновенно ( $k \rightarrow \infty$ ) перегородит однородный поток плоской пластинкой, то за ней будет развиваться течение разрежения (волна Римана). При этом давление на пластинку

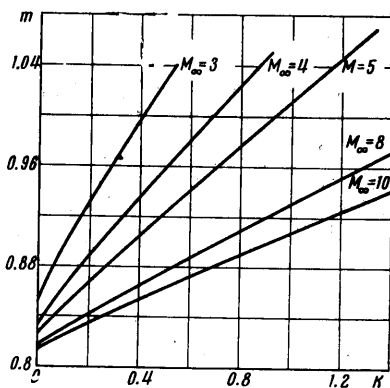
$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left( \frac{2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M_\infty \right)^{2\gamma/(\gamma - 1)} \quad \left( M_\infty \leq \frac{2}{\gamma - 1} \right)$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

При  $M_\infty \geq 2 / (\gamma - 1)$  вблизи пластинки образуется зона вакуума, донное давление равно нулю.

Автор благодарит А. Н. Минайлоса за ценное обсуждение работы.

Поступило 2 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ferri A. Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack. Naca Report, 1951, No. 1045.
2. Дородницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых задач аэродинамики. Тр. III Всесоюз. матем. съезда. Изд-во АН СССР, т. 2, 1956; т. 3, 1958.
3. Белоцерковский О. М. Обтекание произвольного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
4. Chubb D. L. Solution to the Flow about a Two-Dimensional Flat Plate at Infinite Mach Number. Princeton, 1959, July, 17.
5. Базжин А. П. К расчету обтекания сверхзвуковым потоком газа плоской пластинки с неприсоединенным скачком уплотнения. Инж. ж., 1963, т. 3, № 2.