

## О ВЛИЯНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ТЕЧЕНИЕ В ОБЛАСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

В. К. ВЕРТУШКИН, В. Н. ЖИГУЛЕВ

(Москва)

Рассмотрим задачу гиперзвукового обтекания затупленного тела с учетом лучистого переноса энергии. В отсутствие поглощения излучения в сжатом слое даже для малых оптических толщин газа, как известно [1], получаются физически неверные решения, так как энтальпия газа в критической точке на теле становится равной нулю. Это происходит потому, что элемент газа на нулевой линии тока полностью высвечивает свою энергию. Естественно, что противоречие, возникающее при отсутствии поглощения, должно быть разрешено внутри самой схемы излучения и не устраняется, вообще говоря, при введении дополнительных физических ограничений.

В работах [2, 3] на простейшей одномерной модели изучается течение излучающего газа в окрестности критической точки. При определенных предположениях такое течение описывается одним интегро-дифференциальным уравнением. Однако сделанный в этих работах учет поглощения газа путем разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора в окрестности ее местного значения не дает возможности получить физически верное решение на теле. В настоящей работе приводятся исследования этого уравнения.

При составлении уравнения, описывающего течение излучающего газа в окрестности критической точки, используются следующие предположения [2, 3]: толщина сжатого слоя много меньше радиуса кривизны тела, статическое давление намного превышает скоростной напор и практически постоянно, энтальпия газа за гиперзвуковой ударной волной много больше его кинетической энергии. В этом случае сжатый слой газа в окрестности критической точки можно рассматривать в виде плоского слоя с линейным профилем скорости. Полагая, что излучение поглощается только в сжатом слое с постоянным коэффициентом поглощения  $k$ , получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\rho u \frac{dh}{dz} = -\pi k \left[ 4B - 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_{\omega}^{\omega_0} B \exp \frac{\omega - \xi}{\cos \theta} d\xi \right\} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta - \right. \\ \left. - 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{\omega} B \exp \frac{\xi - \omega}{\cos \theta} d\xi \right\} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \right], \quad B = \sigma T^4 \quad (1)$$

В этом уравнении интегрирование по углам сводится к введению интегро-экспоненциальной функции первого порядка [4]

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \exp(-x\xi) \xi^{-n} d\xi$$

Это даст

$$\rho u \frac{dh}{dz} = -\pi k \left[ 4B - 2 \int_{\omega}^{\omega_0} BE_1(\xi - \omega) d\xi - 2 \int_0^{\omega} BE_1(\omega - \xi) d\xi \right] \quad (2)$$

Здесь  $\rho$ ,  $u$ ,  $h$  — плотность, скорость и энтальпия;  $\omega$  — оптическая толщина  $\omega = kz$ ;  $z$  — координата,  $z = 0$  соответствует волне,  $z = z_0$  — телу.

Введем уравнение состояния

$$P = \rho h(\kappa - 1) / \kappa$$

Здесь  $P$  — давление,  $\kappa$  — отношение энтальпии реального газа к его внутренней энергии. Интегро-дифференциальное уравнение (2) вместе с уравнением состояния описывает течение излучающего газа в критической точке. Вводим безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P / P_s, & \bar{T} &= T / T_s \\ \bar{B} &= T^4 / T_s^4, & \bar{u} &= z_0 - z / z_0 \\ W &= 2\lambda \sigma T_s^4 (\kappa - 1) / u_s P_s \kappa \end{aligned}$$

Здесь индекс  $s$  относится к значениям параметров непосредственно за ударной волной.

Тогда уравнение (2) перепишем, опуская черточки, следующим образом:

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 T} \frac{dT}{d\omega} = -W \left[ 2B - \int_0^{\omega_0} BE_1(\omega - \xi) d\xi - \int_{\omega}^{\omega_0} BE_1(\xi - \omega) d\xi \right] \quad (3)$$

Домножив числитель и знаменатель левой части уравнения (3) на  $4T^3$ , получим уравнение

$$\frac{dB}{d\omega} = -\frac{4W\omega_0 B}{\omega_0 - \omega} \left[ 2B - \int_0^{\omega_0} BE_1(\omega - \xi) d\xi - \int_{\omega}^{\omega_0} BE_1(\xi - \omega) d\xi \right] \quad (4)$$

Будем искать асимптотическое решение уравнения (4) при  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Произведем при этом условия оценку интегралов. Исходя из свойств интегро-экспоненциальной функции [4], при  $x \rightarrow 0$  функция  $E_1(x) \rightarrow \infty$  как  $|\ln x|$  и оценка интегралов будет следующей:

$$\int_0^{\omega_0} BE_1(\omega - \xi) d\xi + \int_{\omega}^{\omega_0} BE_1(\xi - \omega) d\xi \approx 1 \cdot \omega_0 |\ln \omega_0|$$

С учетом этой оценки асимптотический вид уравнения (4) при  $\omega_0 \rightarrow 0$  будет

$$\frac{dB}{d\omega} = -\frac{8W\omega_0 B}{\omega_0 - \omega} \left[ B - \frac{1}{2} \omega_0 |\ln \omega_0| \right] \quad (5)$$

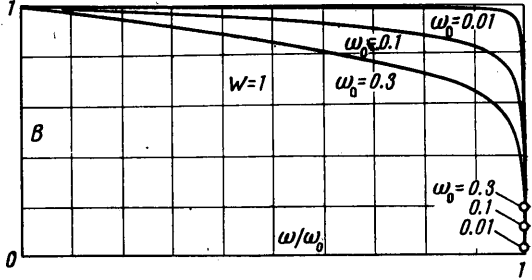
Последнее уравнение можно проинтегрировать методом разделения переменных. Интеграл уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{\omega_0 |\ln \omega_0|}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\omega_0 |\ln \omega_0|}{2} \right) \left( \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \right)^{\Omega} \right]^{-1} \\ &\left( \Omega = \frac{W\omega_0^2 |\ln \omega_0|}{2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим это решение. Имеем

$$B = 1 \text{ при } \omega = 0, \quad B = \frac{1}{2} \omega_0 |\ln \omega_0| \text{ при } \omega = \omega_0$$

При стремлении  $\omega_0$  к нулю функция  $B$  стремится к единице всюду, кроме точки  $\omega = \omega_0$ , где  $B$  стремится к нулю. Асимптотическое решение (6) показывает, что учет поглощения излучения приводит к конечной температуре газа на стенке в критической точке  $T \sim (\omega_0 |\ln \omega_0|)^{1/4}$ ; с уменьшением оптической толщины слоя газа она стремится к нулю.



Зависимости  $B$  от  $\omega$  для различных  $\omega_0$  приведены на фигуре. Численное решение уравнения (4) было получено следующим образом. Учитывая, что  $E_1(x)$  при  $x = 0$  обращается в бесконечность порядка  $\ln x$ , выражение в квадратных скобках уравнения (4) можно преобразовать так:

$$2B(\omega) - \int_0^{\omega} B(\xi) E_1(\omega - \xi) d\xi - \int_{\omega}^{\omega+\delta} B(\xi) E_1(\xi - \omega) d\xi = 2B(\omega) - \int_0^{\omega-\delta} B(\xi) E_1(\omega - \xi) d\xi - \\ - \int_{\omega+\delta}^{\omega} B(\xi) E_1(\xi - \omega) d\xi - \int_{\omega-\delta}^{\omega} B(\xi) E_1(\omega - \xi) d\xi - \int_{\omega}^{\omega+\delta} B(\xi) E_1(\xi - \omega) d\xi$$

выделив особенность в два последние интеграла. Для любого  $\delta \ll \omega$  эти два интеграла можно проинтегрировать по теореме о среднем, воспользовавшись свойствами интегро-экспоненциальных функций [4]

$$\int_{\omega-\delta}^{\omega} B(\xi) E_1(\omega - \xi) d\xi + \int_{\omega}^{\omega+\delta} B(\xi) E_1(\xi - \omega) d\xi = 2B(\omega)[1 - E_2(\delta)]$$

После проделанных преобразований имеем уравнение

$$\frac{dB}{d\omega} = - \frac{4W\omega_0 B}{\omega_0 - \omega} \left[ 2B(\omega) E_2(\delta) - \int_0^{\omega-\delta} B E_1(\omega - \xi) d\xi - \int_{\omega+\delta}^{\omega} B E_1(\xi - \omega) d\xi \right] \quad (7)$$

удобное для численного интегрирования.

Была составлена программа для решения на быстродействующей вычислительной машине уравнения (7) методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения бралось либо асимптотическое решение (6), либо  $B = \text{const}$ . Интегро-экспоненциальные функции вычислялись при помощи рядов с точностью до седьмого знака. Интегралы брались по формуле Симпсона. Интегрирование уравнения (7) проводилось при помощи стандартной программы Рунге-Кутты. Так как знаменатель в правой части уравнения (7) обращается в нуль при  $\omega = \omega_0$ , то интегрирование уравнения (7) велось до  $\omega = \omega_0 - \Delta$ , где  $\Delta$  для простоты счета бралось равным  $\delta$  и составляло  $(10^{-4} - 10^{-6})\omega_0$ . Значение решения в точке  $\omega = \omega_0$  находилось из условия равенства нулю числителя правой части уравнения (7).

Приведем результаты вычисления  $B$  для некоторых значений  $\Omega = \omega / \omega_0$  при различных значениях  $\omega_0$ . Для  $\Omega = 0.5, 0.9, 0.95, 0.995, 1$  вычисленная при  $W = 1$  функция  $B$  равна соответственно 0.9984, 0.9940, 0.9916, 0.9826, 0.00365 при  $\omega_0 = 0.001$ ;  $B = 0.9865, 0.9551, 0.9417, 0.8207, 0.02458$  при  $\omega_0 = 0.01$  и  $B = 0.8799, 0.6104, 0.5097, 0.1911, 0.1070$  при  $\omega_0 = 0.1$ . Варьирование по  $\delta$  в указанном диапазоне приводит к расхождению в четвертом знаке конечного результата.

Для сравнения приведем значения функции  $B$ , вычисленные по формуле (6) для тех же значений  $\Omega$ :  $B = 0.9993, 0.9977, 0.9997, 0.9931, 0.00345$  при  $\omega_0 = 0.001$ ;  $B = 0.9932, 0.9780, 0.9716, 0.9175, 0.02302$  при  $\omega_0 = 0.01$ ;  $B = 0.9432, 0.8377, 0.8027, 0.7158, 0.1151$  при  $\omega_0 = 0.1$ . Видно, что для маленького  $\omega_0 = 0.001$  численное и асимптотическое решения практически совпадают.

Полученные асимптотическое и численное решения позволили уловить истинный характер энергетического равновесия частицы излучающего и поглощающего газа на нулевой линии тока; в этом случае частица газа излучает столько энергии, сколько поглощает со всего объема излучающего газа. Указанное энергетическое равновесие может быть названо равновесием «в среднем», в отличие от полного термодинамического равновесия, которое имеет место в критической точке в других физических условиях, например, в случае течения неравновесного газа. Этот тип равновесия будет общим для излучения и выполняется не только для серого газа, но и для произвольной зависимости коэффициента поглощения от свойств газа и частоты.

Поступило 30 VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В., Мурзинов И. Н. Влияние излучения на течение в окрестности критической точки тупого тела. ПМТФ, 1961, № 2.
2. Goulard R. Preliminary Estimates of Radiative Transfer Effects on Detached Shock Layers. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 3.
3. Thomas P. Q. Transparency Assumption in Hypersonic Radiative Gas Dynamics. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 8.
4. Пангурова В. И. Таблицы интегро-экспоненциальной функции. ВЦ АН СССР, 1959.