

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА НЕПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КАНАЛА

Л. Ф. ЛОБАНОВА

(Москва)

Задача о течении в пограничном слое на непроводящей стенке рассматривалась в работах [1-3]. При этом либо принимались предположения об автомодельности задачи [1], либо решение находилось в виде разложений по степеням малого параметра [2, 3]. Цель этих предположений — сведение уравнений пограничного слоя к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В настоящей работе задача решается без упомянутых предположений. Получено распределение по длине канала коэффициентов сопротивления трения и теплообмена на стенке канала и исследована зависимость этих коэффициентов от параметра нагрузки.

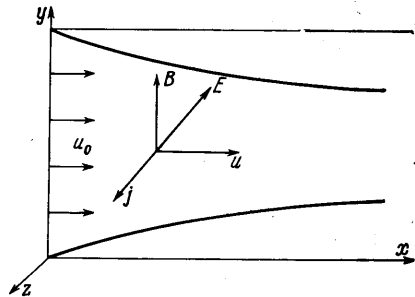
1. Схема канала представлена на фиг. 1. Предположим, что число Рейнольдса мало и токи Холла отсутствуют. Электрическое и магнитное поля в ядре потока примем постоянными по всей длине канала. Вследствие малости числа Рейнольдса можно считать эти поля в области пограничного слоя равными их значениям в ядре потока [4].

Пренебрегая влиянием пограничного слоя на течение в ядре потока, рассматриваем это течение как одномерное, без учета вязкости и теплопроводности. Такое течение описывается уравнениями

$$\rho_{\infty} u_{\infty} = \text{const}, \quad p_{\infty} = R \rho_{\infty} T_{\infty} \quad (1.1)$$

$$\rho_{\infty} u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} = - \frac{dp_{\infty}}{dx} + \sigma_{\infty} (E - u_{\infty} B) B$$

$$\rho_{\infty} u_{\infty} \left(c_p \frac{dT_{\infty}}{dx} + u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} \right) = \\ = \sigma_{\infty} (E - u_{\infty} B) E$$



Фиг. 1

Здесь и далее индексом ∞ обозначаются параметры ядра потока, индексом $*$ — параметры торможения, индексом 0 — параметры газа во входном сечении канала, индексом w — значения величин на стенке канала.

Систему уравнений (1.1) можно переписать в виде

$$\frac{du_{\infty}}{dx} = - S_* M_0 \sqrt{T_0} j_{\infty} \frac{k(\gamma - 1) - \gamma u_{\infty}}{p_{\infty} - M_0^2 \rho_0 u_{\infty}} \\ p_{\infty} = \gamma(\gamma - 1) M_0^2 p_0 \frac{c + 1/2 u_{\infty}^2 - k u_{\infty}}{k(\gamma - 1) - \gamma u_{\infty}} \quad (1.2)$$

$$T_{\infty} = \frac{p_{\infty} u_{\infty}}{\rho_0}, \quad j_{\infty} = \sigma_{\infty} (u_{\infty} - k), \quad c = k \left(1 + \frac{1}{\gamma M_0^2} \right) - 0.5 - \frac{1}{(\gamma - 1) M_0^2}$$

В системе (1.2) все величины безразмерные. Переход к безразмерным переменным задается формулами

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{L}, \quad u_\infty = \frac{u_\infty}{u_0}, \quad \rho_\infty = \frac{\rho_\infty}{\rho_*}, \quad T_\infty = \frac{T_\infty}{T_*}, \quad p_\infty = \frac{p_\infty}{p_*} \\ \sigma_\infty &= \frac{\sigma(T_\infty)}{\sigma(T_*)}, \quad j_\infty = \frac{j_\infty}{\sigma(T_*)Bu_0}, \quad T_0 = \frac{T_0}{T_*}, \quad p_0 = \frac{p_0}{p_*} \\ \rho_0 &= \frac{\rho_0}{\rho_*}, \quad k = \frac{E}{u_0B}, \quad S_* = \frac{\sigma(T_*)B^2L}{\rho_*\sqrt{\gamma RT_*}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь k — параметр электрической нагрузки, S_* — параметр магнито-гидродинамического взаимодействия, γ — отношение теплоемкостей, L — длина канала, M — число Маха.

Считая, что течение до входа в канал адиабатическое, получим

$$T_0 = [1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_0^2]^{-1}, \quad p_0 = T_0^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho_0 = T_0^{1/(\gamma-1)} \quad (1.4)$$

Проводимость газа будем предполагать функцией температуры [1]

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \exp[-\tau(T_1/T - 1)], \quad \tau = 7.5 \quad (1.5)$$

Задача расчета течения в ядре потока, таким образом, сводится к интегрированию первого уравнения системы (1.2) в интервале $x(0, 1)$. Одно граничное условие для решения этого уравнения следует из определения безразмерной скорости, т. е.

$$u_\infty = 1 \text{ при } x = 0 \quad (1.6)$$

Другое граничное условие зададим так, чтобы течение в канале происходило без скачков. Следовательно, надо потребовать, чтобы число Маха удовлетворяло соотношению

$$M = 1 \text{ при } x = 1 \quad (1.7)$$

Если скорость на входе в канал дозвуковая, то при одновременном выполнении условий (1.6) и (1.7) число Маха в начальном сечении M_0 нельзя считать заданным, и поэтому условие (1.7) удовлетворялось подбором числа M_0 при фиксированных значениях параметра k и S_* .

Если же скорость на входе в канал сверхзвуковая, то параметры входного сечения необходимо считать не зависящими от условия на выходе из канала, и поэтому для удовлетворения граничного условия при $x = 1$ будем подбирать параметр взаимодействия S .

В этом случае естественно при переходе к безразмерным переменным термодинамические функции отнести к параметрам газа на входе в канал. Поэтому положим

$$S = \frac{\sigma(T_0)B^2L}{\rho_0u_0}, \quad \sigma_\infty = \frac{\sigma(T_\infty)}{\sigma(T_0)}, \quad T_\infty = \frac{T_\infty}{T_0}, \quad p_\infty = \frac{p_\infty}{p_0}, \quad \rho_\infty = \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \quad (1.8)$$

Для расчета следует в системе (1.2) учесть, что

$$S_* = SM_0, \quad T_0 = p_0 = \rho_0 = 1 \quad (1.9)$$

Зависимость числа M_0 для дозвукового потока и числа S для сверхзвукового потока от параметра нагрузки k , обеспечивающая выполнение условия (1.7), приведена в работе [5].

Система (1.2) решалась методом Рунге — Кутты. Полученные функции u_∞ , T_∞ , p_∞ использовались в качестве асимптотических значений для характеристик течения в пограничном слое.

2. Течение в пограничном слое, если учесть сделанные ранее предположения, описывается уравнениями [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - jB \\ \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{j^2}{\sigma} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Будем считать, что коэффициент вязкости μ — линейная функция температуры, а теплоемкость c_p и число Прандтля P — постоянные. Следовательно, и коэффициент теплопроводности $\lambda = c_p \mu / P$ линейно зависит от температуры.

Примем также, что давление не меняется поперек пограничного слоя ($p = p_\infty$) и выполняется уравнение состояния совершенного газа

$$p = R \rho T \quad (2.2)$$

Граничные условия для системы (2.1) следующие:

на стенке

$$u = v = 0, \quad T = T_w \quad (y = 0)$$

на внешней границе пограничного слоя

$$u = u_\infty, \quad T = T_\infty \quad (y \rightarrow \infty)$$

Произведем замену переменных в уравнениях (2.1). Новые переменные определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{L} \int_0^x \frac{T_\infty}{T_0} dx, \quad \eta = \frac{\sqrt{u_\infty/\nu_0 L} y}{\sqrt{\xi}}, \quad u = \frac{u}{u_\infty}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (2.3) \\ \rho u &= \frac{\rho_\infty u_\infty}{\sqrt{u_0/\nu_0 L}} \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{\xi} \psi), \quad \rho v = -\frac{\rho_\infty u_\infty}{\sqrt{u_0/\nu_0 L}} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\xi} \psi), \quad \nu_0 = \frac{\mu(T_0)}{\rho_0} \end{aligned}$$

Система уравнений (2.1) в новых переменных, с учетом (1.2) и (1.3), примет вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \xi \left(u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\psi}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \xi F(\xi, \eta, u, \theta) \\ \xi \left(u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - \frac{\psi}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{1}{P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + a(\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \xi Q(\xi, \eta, u, \theta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

В формулах (2.4)

$$F(\xi, \eta, u, \theta) = \left(\frac{1}{\rho} - u^2 \right) \frac{1}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} + \frac{S_* \sqrt{T_0} \sigma_\infty}{M_0 \rho_0 T_\infty u_\infty \rho} [(u_\infty - k) - \sigma(u u_\infty - k)] \quad (2.5)$$

$$Q(\xi, \eta, u, \theta) = \frac{(1 - \theta) u T_w}{(T_\infty - T_w) T_\infty} \frac{dT_\infty}{d\xi} + \frac{(\gamma - 1) S_* M_0 \sigma_\infty T_0^{3/2}}{(T_\infty - T_w) \rho_0 T_\infty \rho} \times$$

$$\times [\sigma(u u_\infty - k)^2 - (u_\infty - k)^2], \quad a(\xi) = \frac{(\gamma - 1) M_0^2 T_0 u_\infty^2}{(T_\infty - T_w)}$$

$$\rho = \left[\theta \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right) + \frac{T_w}{T_\infty} \right]^{-1}, \quad \sigma = \exp \frac{-\tau(\rho - 1)}{T_\infty}$$

Граничные условия переходят в соотношения

$$\psi = u = \theta = 0 \quad (\eta = 0), \quad u = \theta = 1 \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (2.6)$$

В качестве начальных условий (т. е. значений функций u , θ , ψ при некотором $\xi = \xi_0$) было взято решение уравнений (2.4) при $\xi = 0$ (решение задачи Блазиуса).

3. Система уравнений (2.4) решалась методом прогонки по конечно-разностной схеме, предложенной в работах [6, 7]. Расчеты проводились на ЭВМ «М-20» при следующих числовых значениях параметров:

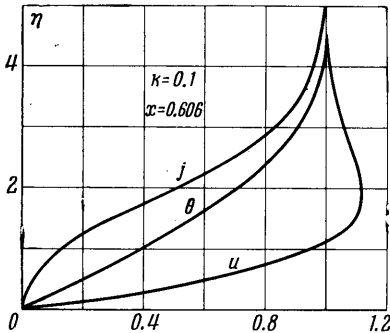
$$\gamma = 1.4, \quad T_w = 2/3 T_0, \quad P = 0.72, \quad \Delta \xi = 0.01, \quad \Delta \eta = 0.05$$

для дозвуковых течений

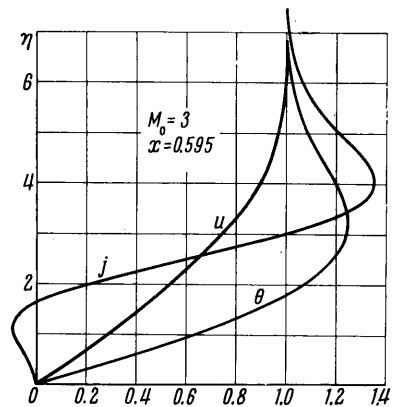
$$S_* = 1, \quad k = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.99$$

для сверхзвукового течения

$$S = 0.1, \quad M_0 = 3, \quad k = 0.4$$



Фиг. 2



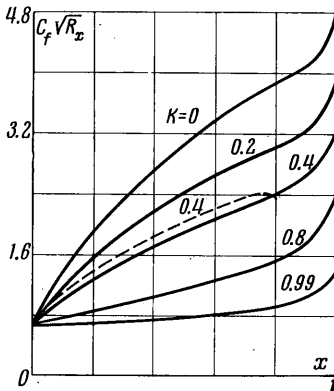
Фиг. 3

Результатами расчетов будут получение профилей температуры, скорости, плотности электрического тока в пограничном слое и вычисление значений коэффициентов сопротивления трения и теплообмена на непроводящей стенке.

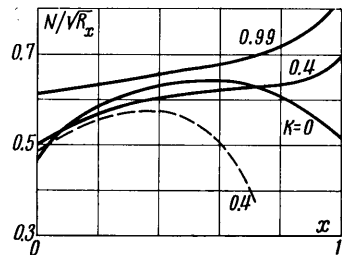
Характерные профили приведены на фиг. 2—3.

Заметим, что в дозвуковом потоке скорость, а в сверхзвуковом температура и ток — немонотонные функции параметра η . Причем явление «заброса» скорости

особенно характерно для больших токов в ядре, т. е. для малых значений параметра k . Вблизи стенки есть область течения, где направление тока противоположно направлению тока в ядре. Как показывают расчеты, токи в



Фиг. 4



Фиг. 5

этой области малы по сравнению с токами в ядре потока, а ширина области значительно меньше ширины пограничного слоя.

Трение и теплообмен на стенке характеризуются коэффициентом сопротивления и числом Нуссельта, которые определяются по формулам

$$c_f = \frac{\mu_w (\partial u / \partial y)_w}{1/2 \rho_\infty u_\infty^2} = \frac{2}{\sqrt{R_x}} \left(\frac{T_\infty}{T_0} \frac{x}{\xi} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}, \quad R_x = \frac{u_\infty \rho_\infty x}{\mu(T_\infty)} \quad (3.1)$$

$$N = \frac{x (\partial T / \partial y)_w}{T_\infty - T_w} = \sqrt{R_x} \frac{T_\infty}{T_w} \left(\frac{T_\infty}{T_0} \frac{x}{\xi} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

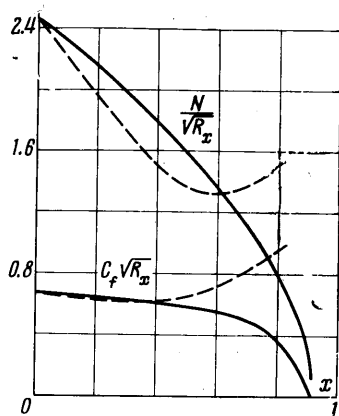
Здесь R_x — число Рейнольдса, подсчитанное по текущим параметрам в ядре потока.

На фиг. 4, 5 представлены функции $c_f \sqrt{R_x}$ и $N / \sqrt{R_x}$ для дозвукового потока при различных параметрах нагрузки k . Можно заметить, что коэффициент сопротивления довольно сильно растет с увеличением x , а число Нуссельта остается почти постоянным по всей длине канала и слабо меняется в зависимости от параметра нагрузки.

Резкое изменение функций $c_f \sqrt{R_x}$ и $N / \sqrt{R_x}$ вблизи точки $x = 1$ объясняется тем, что вблизи этой точки в ядре потока скорость резко возрастает и другие характеристики течения также сильно меняются.

В сверхзвуковом потоке и $c_f \sqrt{R_x}$ и $N / \sqrt{R_x}$ падают по длине канала (фиг. 6), при $x = 0.908$ происходит отрыв пограничного слоя, что связано с ростом давления в ядре потока (а значит, и в пограничном слое).

На фиг. 4–6 пунктиром изображены графики функций $c_f \sqrt{R_x}$ и $N / \sqrt{R_x}$, которые соответствуют локально-автомодельному решению системы уравнений (2.4). Это решение получается тем же методом прогонки, но в уравнениях (2.4) производные $\partial u / \partial \xi$, $\partial \theta / \partial \xi$, $\partial \psi / \partial \xi$ полагаются равными нулю. Можно заметить, что локально-автомодельное решение совпадает с неавтомодельным только в начальном участке канала.



Фиг. 6

Поступило 9 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Hale F. J., Kerrebrock J. L. Insulator Boundary Layers in Magnetohydrodynamic Channels. AIAA Journal, 1964, vol. 2, № 3 (русс. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 3).
2. Генкин А. Л., Бененсон Э. Б. Пограничный слой на непроводящей стенке магнитогидродинамического канала. Докл. на V Рижском совещании по магнитной гидродинамике, 1966.
3. Аполлонский С. М. О расчете пограничного слоя на изоляторных стенках в канале МГД-генератора при учете тока Холла. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 4.
4. Любимов Г. А. К постановке задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
5. Пасконов В. М., Якубенко А. Е. Расчет пограничного слоя на электропроводящей стенке плоского канала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
6. Брайловская Ю. И., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. «Вычислительные методы и программирование». Изд. Моск. ун-та, 1962.
7. Пасконов В. М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя. Сб. «Численные методы в газовой динамике». Изд. Моск. ун-та, 1963, № 2.