

## О ВЛИЯНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Ю. А. ДЕМЬЯНОВ

(Москва)

В работе анализ влияния теплопроводности проводится на примере исследования трех распространенных одномерных течений:

- (1) возникающего при приложении к торцу поршня теплового потока;
- (2) возникающего при отражении ударной волны от теплопроводной стенки;
- (3) возникающего при распаде произвольного разрыва в покоящихся газах (течение в ударной трубке), имеющих различные показатели адиабаты.

В работе [1] показано, что при малых временах (малых числах Рейнольдса) для анализа подобных течений необходимо использовать полные уравнения Навье — Стокса; на основе [1] для этих случаев возможно получение решения в последующие моменты времени (соответствующие умеренным числам Рейнольдса) непосредственным численным интегрированием уравнений Навье — Стокса. Однако с увеличением времени численный анализ становится затруднительным, аналогично задачам стационарного течения вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса  $R_0$ . В этом отношении интерес представляет работа [2], где показано, что с ростом времени влияние эффектов вязкости становится несущественным, зону течения можно разбить, как в задачах взаимодействия, на область, описываемую уравнениями газовой динамики, и область, описываемую упрощенными уравнениями, в которой перепадом давления можно пренебречь.

В работе [2] приведено решение для случая (2) в предположении малости возмущений в потоке за отраженной ударной волной и для случая (3) в предположении равенства коэффициентов адиабаты  $\gamma$  по обе стороны от поверхности разрыва.

Ниже в рамках постановки [2] дано решение для перечисленных случаев течения. Возникающая в случае (1) ударная волна, по мнению автора, служит тем первоначальным скачком уплотнения, за которым далее, в силу наличия скоростей химических реакций в реагирующей газовой смеси, происходит образование детонационной волны [3]. Установлено, что в случае (2) значение давления в первый момент отражения соответствует полученному при нестационарном адиабатическом расширении (или ударном сжатии) газа за падающей ударной волной до температуры стенки, т. е. для реальных случаев меньше статического давления за падающей ударной волной. Если статическая температура потока за падающей ударной волной выше начальной температуры стенки, то отраженная ударная волна в первый момент времени имеет нулевую интенсивность, совпадая с задним фронтом централизованной волны разрежения. В случае (3), в отличие от [2], имеет место трансформация течений во внешних потоках по сравнению с рассчитываемыми по газодинамической теории ударной трубки. Полученные результаты полезны также тем, что позволяют судить, к каким асимптотическим выражениям стремятся численные решения уравнений Навье — Стокса для соответствующих задач.

### § 1. Рассмотрим уравнения Навье — Стокса для одномерных течений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial i}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

Здесь  $u$  — скорость,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $i$  — энтальпия,  $T$  — температура,  $x$  — координата,  $t$  — время. Проведем упрощение этих уравнений, но в отличие от [2], — методом, аналогичным методу Мизеса.

Введем безразмерные функции и переменные

$$\bar{u} = \frac{u - u_w}{u_0} \sqrt{R_0}, \quad \bar{x} = \frac{x - x_w}{u_0 t_0} \sqrt{R_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0},$$

$$u_w = x_w'(t), \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad \bar{i} = \frac{i}{i_0},$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_0 + 2\mu_0} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad R_0 = \frac{\rho_0 u_0^2 t_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}$$

и найдем предельную форму (1.1) при  $R_0 \rightarrow \infty$  в предположении конечности введенных функций и их производных. При этом получим

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x = 0, \quad \partial p / \partial x = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial i}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} \right) = p' + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\lambda + 2\mu}{P} \frac{\partial i}{\partial x} \right), \quad \left( P = \frac{c_p (\lambda + 2\mu)}{k} \right) \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2), (1.3) имеют один и тот же вид как в безразмерных, так и в размерных величинах. В случае идеального газа

$$p = R \rho T, \quad i = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \text{const}$$

уравнения (1.3) можно записать так:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} p \frac{d \ln \rho}{dt} = \frac{p'}{\gamma - 1} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

или, в силу (1.2),

$$\frac{p'}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} p u + \frac{1}{\gamma - 1} p' x + C(t) = k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) можно рассматривать как уравнение для определения скорости после нахождения поля температур из (1.3) (считается, что  $p(t)$  известно из решения задачи для нетеплопроводной области, примыкающей к данной). Сформулируем граничные условия для системы (1.3), (1.4) при решении задачи взаимодействия. Условия на стенке или на поверхности раздела  $x = x_w(t)$  соответственно имеют вид

$$u = x_w'(t), \quad T = T_w(t), \quad \text{или} \quad k \partial T / \partial x = q_w(t) \quad \text{при} \quad x = x_w(t)$$

$$u_1 = u_2 = x_w'(t), \quad T_1 = T_2, \quad k_1 \partial T_1 / \partial x = k_2 \partial T_2 / \partial x \quad \text{при} \quad x = x_w(t)$$

Обозначим через  $x = x_\infty(t)$  уравнение движения фиктивного поршня, вызывающего в области, примыкающей к теплопроводной зоне, такие же возмущения, какие вызывает сама зона.

В связи с малостью теплопроводной зоны значения скорости и температуры на ее границе могут быть представлены в виде

$$u = u_\infty + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_\infty} (x - x_\infty) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_\infty} (x - x_\infty)^2 + \dots$$

$$T = T_\infty + \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_\infty} (x - x_\infty) + \dots$$

где производные берутся от функций внешнего нетеплопроводного потока.

Переходя вновь к введенным выше безразмерным функциям и переменным, будем иметь

$$\bar{u} = \bar{u}_\infty + t_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_\infty} (\bar{x} - \bar{x}_\infty) + \frac{u_0 t_0^2}{2\sqrt{R_0}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_\infty} (\bar{x} - \bar{x}_\infty)^2 + \dots$$

$$\bar{T} = \bar{T}_\infty + \frac{u_0 t_0}{T_0 \sqrt{R_0}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_\infty} (\bar{x} - \bar{x}_\infty) + \dots$$

Следовательно, при  $R_0 \rightarrow \infty$  в качестве условий сопряжения на внешней границе теплопроводной зоны необходимо принять следующие асимптотические:

$$\bar{u} \rightarrow \bar{u}_\infty + t_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_\infty} (\bar{x} - \bar{x}_\infty), \quad \bar{T} \rightarrow \bar{T}_\infty \quad (\bar{x} \rightarrow \infty)$$

Эти условия при переходе к первоначальным функциям и переменным примут вид

$$u \rightarrow u_\infty + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_\infty} (x - x_\infty), \quad T \rightarrow T_\infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

В силу уравнения неразрывности и условия изэнтропичности на линии  $x = x_\infty(t)$ , будем иметь

$$u - u_\infty \rightarrow -\frac{1}{\gamma} \frac{p'}{p} (x - x_\infty) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

Поэтому из соотношения (1.4) при  $x \rightarrow \infty$  вытекает

$$x_\infty' + \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{p} x_\infty + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{C}{p} = 0 \quad (1.5)$$

Для дальнейшего запишем (1.3) в лагранжевых координатах

$$\eta = \int_{x_w}^x \frac{\rho}{\rho^*} dx, \quad \bar{t} = t$$

При этом получим

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} = \frac{p'}{\rho c_p} + \frac{1}{\rho^* c_p} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k_p \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} = \frac{T T_\infty'}{T_\infty} + \frac{k_0 p}{c_p R \rho^{*2}} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

Здесь, в силу принятого линейного закона изменения теплопроводности с температурой  $k_0 = kT^{-1} = \text{const}$ . Вводя безразмерную функцию температуры  $\bar{T} = T/T_\infty$ , последнее уравнение преобразуем к виду

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} = a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2} \quad \xi = \int_0^{\eta} \frac{p}{p^*} dt \quad a_0^2 = \frac{k_0 p^*}{c_p R \rho^{*2}} = \text{const} \quad (1.6)$$

§ 2. Пусть к поверхности поршня  $x = x_w(t)$  применен тепловой поток  $q_w(t)$ . Тогда из соотношений (1.4) и (1.5) получим

$$p x_\infty'^{\circ} + \gamma^{-1} p' x_\infty^{\circ} = -(\gamma - 1) \gamma^{-1} q_w, \quad x_\infty^{\circ} = x_\infty - x_w \quad (2.1)$$

Допустим вначале, что поршень неподвижен и  $q_w = \text{const}$ . Легко видеть, что возникшее при этом течении представляет собой равномерный

поток с параметрами  $x_{\infty}' = \text{const}$ ,  $p = \text{const}$ , причем

$$p x_{\infty}' = -(\gamma - 1) \gamma^{-1} q_w$$

Если первоначально газ покоился и имел параметры  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ , то при  $q_w < 0$  (тепло подводится к газу) возникает ударная волна, бегущая с постоянной скоростью, параметры за которой  $p$  и  $x_{\infty}'$ . При  $q_w > 0$  (тепло отводится от газа) возникает центрированная волна разрежения. Если поршень движется с постоянной скоростью  $x_w'$ , то параметры равномерного потока связаны соотношением

$$p(x_{\infty}' - x_w') = -(\gamma - 1) \gamma^{-1} q_w$$

и, в зависимости от значений  $q_w$  и  $x_w'$ , соответствуют потоку за ударной волной постоянной интенсивности или центрированной волной разрежения.

Можно показать, используя соотношения на сильной ударной волне, что скорость последней пропорциональна корню кубическому из отношения теплового потока к начальной плотности газа. Следовательно, для реагирующей газовой смеси путем подбора начального давления при заданном тепловыделении можно создать ударную волну достаточной интенсивности, чтобы за ней, в соответствии с [3], за счет неравновесного протекания химических реакций возникла детонационная волна. Учет явлений диффузии и горения в примыкающей к поверхности  $x = x_w(t)$  зоне, приведя к количественным коррективам, не изменит этого качественного вывода.

Для произвольных  $q_w(t)$  и  $x_w(t)$ , но не приводящих к появлению скачков уплотнения, определение  $x_{\infty}(t)$  из (2.1) не представляет затруднений ( $p$  и  $x_{\infty}'$  связаны соотношением в изэнтропической волне). В противном случае необходимо численное интегрирование уравнений газовой динамики для нетеплопроводной зоны. Вместе с тем, определение решения до момента образования скачка уплотнения (и этого момента) также не представляет труда.

Рассмотрим, например, случай

$$x_w \equiv 0, \quad q_w = -At^{\alpha}$$

Соотношение (2.1) при этом принимает вид

$$x_{\infty}' \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{x_{\infty}'}{c_0} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} + \frac{x_{\infty} x_{\infty}''}{c_0} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{x_{\infty}'}{c_0} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{q_w}{p_0}$$

отсюда следует, что решение для  $x_{\infty}'$  представимо рядом

$$x_{\infty}' = \sum_{n=1}^{\infty} B_n t^{n\alpha} \quad \left( B_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{A}{p_0} \right) \quad (2.2)$$

Представление (2.2) справедливо и для более общего случая

$$q_w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n t^{n\alpha} \quad x_w' = \sum_{n=1}^{\infty} D_n t^{n\alpha}$$

Если  $q_w = -At^{\alpha}$ ,  $x_w' = Bt^{1/\alpha}$  ( $\alpha < 0$ ), то при малых  $t$  имеет место сильная ударная волна и, как следствие этого [4], — автомодельное течение от фиктивного поршня, движущегося по закону

$$x_{\infty}' = Kt^{1/\alpha}$$

§ 3. Пусть от теплопроводной стенки с начальной температурой  $T_{w0}$  отражается падающая ей параллельно ударная волна, за которой имеет место равномерный и однородный поток с давлением  $p_0$ , температурой  $T_0$  и скоростью  $u_0$ . Допустим вначале, что  $T_{w0} \leq T_0$ , т. е. наиболее реальный случай, ибо значение  $T_{w0}$  должно быть близким к значению температуры покоящегося газа, по которому распространяется ударная волна.

Ввиду малости рассматриваемого интервала времени, стенку можно считать полубесконечным стержнем, а процесс распространения температур в нем описывать линейным уравнением теплопроводности

$$\partial \tau / \partial t = a_w^2 \partial^2 \tau / \partial x^2 \quad (3.1)$$

Индексом  $w$  обозначаются параметры материала стенки, причем

$$\tau = T_{w0} \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Пусть температура стенки в процессе отражения меняется по закону

$$\tau_w = T_{w1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n\beta}$$

Решением (3.1), удовлетворяющим (3.2), в соответствии с [5] будет

$$\tau = T_{w1} f_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n\beta} f_n(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{a_w \sqrt{t}} \quad (3.3)$$

Здесь  $f_n$  удовлетворяют уравнениям

$$f_n'' + \frac{1}{2} \zeta f_n' - n\beta f_n = 0 \quad (3.4)$$

и условиям

$$f_n(0) = 1, \quad f_0(\infty) = \frac{T_{w0}}{T_{w1}}, \quad f_n(\infty) = 0 \text{ при } n \geq 1$$

Поэтому

$$\left( k_w \frac{\partial \tau}{\partial x} \right)_0 = -q_w(t) = \frac{k_w}{a_w \sqrt{t}} \left[ T_{w1} f_0'(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n\beta} f_n'(0) \right] \quad (3.5)$$

Здесь  $q_w(t)$  — тепловой поток от газа в стенку. Так как  $T_{w0}/T_{w1} \leq 1$ , то  $f_0'(0) \leq 0$ . Если допустить  $f_0'(0) \neq 0$ , то  $C(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow 0$ , что, в силу (1.5), приводит к неограниченным значениям скорости фиктивного поршня (в направлении скорости падающей ударной волны) и, как следствие, — к неограниченному охлаждению газа за ударной волной, что невозможно. Поэтому  $f_0'(0) = 0$ , т. е.  $T_{w1} = T_{w0}$ . Но тогда начальное значение  $T_{\infty}(0)$  на внешней границе теплопроводной зоны также равно  $T_{w0}$ , ибо иначе имел бы место тепловой поток от газа в стенку по закону  $q_w \approx t^{-1/2}$ , что противоречит условию теплового баланса.

Следовательно, в первый момент отражения имеет место движение фиктивного поршня со скоростью  $x_{\infty}'(0)$ , определяемой из условия адиабатического охлаждения в волне Римана частиц газа на его поверхности до температуры  $T_{w0}$

$$\frac{T_{w0}}{T_0} = \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_{\infty} - u_0}{c_0} \right]^2, \quad v_{\infty} = x_{\infty}'(0) \quad (3.6)$$

Здесь  $c_0$  — скорость звука. При этом давление отражения равно

$$\frac{p_{\infty}(0)}{p_0} = \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_{\infty} - u_0}{c_0} \right]^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (3.7)$$

Но тогда из (2.4) вытекает постоянство теплового потока в первый момент отражения

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} v_{\infty} p_{\infty}(0) = -C = q_w(0) \quad (3.8)$$

В соответствии с (3.5), первое значение  $N$ , при котором  $b_N$  отлично от нуля, удовлетворяет условию  $N\beta = 1/2$ . При этом

$$b_N = -\frac{a_w q_w(0)}{k_{wf} N'(0)} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{a_w v_{\infty} p_{\infty}(0)}{k_{wf} N'(0)} \quad (3.9)$$

т. е. нагрев стенки происходит по закону

$$\tau_w(t) = T_{w0} - \frac{a_w q_w(0)}{k_{wf} N'(0)} t^{1/2} + \dots$$

Из решения уравнения (1.6) при условиях теплового баланса вытекает, что температура на поверхности эффективного поршня

$$T_{\infty}(t) = T_{w0} (1 + c_1 t^{1/2} + \dots) \quad (3.10)$$

Как следует из дальнейшего, структурные формулы для  $p_{\infty}(t)$  и  $u_{\infty}(t)$  будут аналогичными, а значит,  $\beta = 1/2$ ,  $N = 1$  в соответствии с (1.5). Записав поэтому

$$\bar{T}(0, \xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi^{1/2n}$$

имеем

$$\bar{T} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi^{1/2n} \Phi_n(\zeta), \quad \zeta = \frac{\eta}{a_0 \sqrt{\xi}}, \quad \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right)_0 = \frac{1}{a_0} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi^{1/2(n-1)} \Phi_n'(0)$$

$$\Phi_n'' + 1/2 \zeta \Phi_n' - 1/2 n \Phi_n = 0, \quad \Phi_n(-\infty) = 0, \quad \Phi_n(0) = 1$$

Полагая  $\rho^* = \rho_{\infty}(0)$ ,  $p^* = p_{\infty}(0)$ , при  $n = 1$  получим

$$d_1 = -\frac{a_0 k_w b_1}{a_w k_0 T_{w0}^2}, \quad c_1 = \frac{b_1}{T_{w0}} \left( 1 + \frac{a_0 k_w}{a_w k_0 T_{w0}} \right) \quad (3.11)$$

Здесь учтено, что  $f_1'(0) = -\Phi_1'(0)$ . Как будет показано ниже, уравнение движения фиктивного поршня имеет вид

$$x_{\infty} = v_{\infty} t - a_3 t^{3/2} \quad (3.12)$$

причем значение  $a_3$  также может быть найдено из соотношения для простой волны сжатия, т. е.

$$a_3 = \frac{2c_0 c_1}{3(\gamma-1)} \left( \frac{T_{w0}}{T_0} \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

Уравнение (3.12) указывает, что фиктивный поршень, начав двигаться с постоянной скоростью  $v_{\infty}$ , имеет бесконечное отрицательное ускорение. Следовательно, характеристики семейства  $dx/dt = u - c$ , исходящие из точек кривой  $x = x_{\infty}(t)$ , будут пересекаться уже при  $t = 0$ , давая начало отраженной ударной волне  $x = X(t)$  (см. [6], стр. 342).

Очевидно, при  $t = 0$  направление этого скачка совпадает с направлением заднего фронта центрированной волны Римана (фигура)

$$x = (v_{\infty} - c_{\infty}) t$$

Обозначая индексами  $r$  параметры газа на ударной волне со стороны волны Римана, индексом  $*$  — с противоположной стороны, из уравнения притока тепла (после исключения  $p^*$  и  $\rho^*$  из уравнений количества движения и неразрывности) получим

$$u^* = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_r + \frac{2a_r^2}{(\gamma + 1)(u_r - X')} + \frac{2}{\gamma + 1} X' \quad (3.14)$$

Зададим уравнение для  $X$  в виде

$$X = (v_\infty - c_\infty)t + K_n t^n + \dots \quad (3.15)$$

После проведения соответствующих выкладок получим

$$u^* = v_\infty + \frac{2(2n - 1)}{\gamma + 1} K_n t^{n-1} \quad (3.16)$$

$$p^* = p_w(0) - \frac{2(2n - 1)}{\gamma + 1} \rho_w(0) c_\infty K_n t^{n-1}$$

$$\rho^* = \rho_w(0) - \frac{2(2n - 1)}{\gamma + 1} \frac{\rho_w(0)}{c_\infty} K_n t^{n-1}$$

Отсюда вытекает, что с точностью до следующего члена разложения в ряд по  $t$  уравнения (3.15) энтропия на ударной волне не меняется; остается неизменным и инвариант

$$2(\gamma - 1)^{-1} c^* + u^*$$

Следовательно, в окрестности  $t = 0$  выполняются соотношения для простой волны сжатия, т. е.

$$\frac{x - x_\infty(t_0)}{t - t_0} = \frac{\gamma + 1}{2} u_\infty(t_0) - \frac{\gamma - 1}{2} v_\infty - c_\infty \quad (3.17)$$

где  $t_0$  — произвольное, достаточно малое значение времени.

Учтя, что соотношение (3.17) справедливо и на ударной волне, причем точке  $x_\infty(t_0)$  соответствует на ударной волне точка  $X(t)$ , где  $u^*(t) = u_\infty(t_0)$ , с использованием (3.16) получим

$$n = 2, \quad K_n = -1/8(\gamma + 1)^2 a_s^2 / c_\infty \quad (3.18)$$

Определение последующих членов разложения в (3.15) требует отыскания  $b_2$ ,  $d_2$ ,  $c_2$ , что может быть проведено аналогичным образом. Однако полученные выше разложения уже достаточны для последующего численного решения задачи.

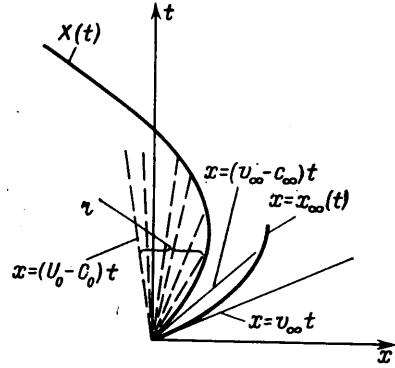
Если  $T_{w0} > T_0$ , то в первый момент вместо центрированной волны Римана возникает отраженный скачок уплотнения такой интенсивности, чтобы  $T_\infty(0) = T_{w0}$ . При  $T_{w0} = T_{00}$  ( $T_{00}$  — значение температуры за отраженным от неподвижной стенки ударной волной, найденное из газодинамических соотношений) имеем  $q_w \equiv 0$ ,  $x_\infty \equiv 0$ ,  $\tau_w \equiv T_{00}$ .

Если  $T_{w0} > T_{00}$ , то имеет место увеличение интенсивности отраженной ударной волны по сравнению со случаем газодинамического отражения, причем  $T_\infty(0) = T_{w0}$ .

§ 4. Рассмотрим задачу о распаде произвольного разрыва в покоящихся газах. Здесь и в дальнейшем индексами 1 и 2 обозначаются параметры соответственно толкающего и толкаемого газов.

Если  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ , то из (2.1), учитывая факт равенства тепловых потоков на поверхности  $x_w(t)$ , получим

$$p(x_{\infty 1} - x_{\infty 2})' + \gamma^{-1} p'(x_{\infty 1} - x_{\infty 2}) = 0$$



Отсюда

$$x_{\infty 1}(t) \equiv x_{\infty 2}(t) \quad (4.1)$$

Значит  $x_{\infty 1}' \equiv x_{\infty 2}'$ , и эффекты теплопроводности в этом случае не оказывают влияния на невязкий поток, который, очевидно, совпадает с рассчитываемым по теории идеальной ударной трубки (или методике, учитывающей немгновенное раскрытие диафрагмы [7] и влияние пограничного слоя на стенках ударной трубки [8]).

При  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  теплопередача на контактной поверхности приводит к возмущениям в невязком потоке. Для рассмотрения этого случая воспользуемся методом малого параметра, за который примем величину

$$\varepsilon = (\gamma_1 - \gamma_2) / \gamma_1 \gamma_2$$

Очевидно, при  $\varepsilon = 0$  к теплопроводной зоне примыкают однородные равномерные потоки с параметрами  $p^\circ, u^\circ, \rho_i^\circ$ ; при малых  $\varepsilon$  возникающие возмущения могут распространиться лишь на эти потоки (до центрированной волны разрежения в толкающем газе и до скачка уплотнения в толкаемом). Положим поэтому в этих областях

$$p_i = p^\circ + \varepsilon \rho_i^\circ p_{i1} + \dots, u_i = u^\circ + \varepsilon u_{i1} + \dots, x_{\infty i} = u^\circ t + \varepsilon x_{i1}. \quad (4.2)$$

Тогда для  $p_{i1}$  и  $u_{i1}$  получим систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial p_{i1}}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial p_{i1}}{\partial x} + c_i^{\circ 2} \frac{\partial u_{i1}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_{i1}}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial u_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial p_{i1}}{\partial x} = 0$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$p_{i1} = 1/2 [\Phi_i(\xi) + \Psi_i(\eta)], \quad u_{i1} = 1/2 c_i^{\circ -1} [\Phi_i(\xi) - \Psi_i(\eta)] \\ \xi = x - (c_i^\circ + u^\circ)t, \quad \eta = x + (c_i^\circ - u^\circ)t$$

В связи с тем, что возмущения толкающего газа носят характер простой волны,  $\Phi_1 \equiv 0$ . Одно из граничных условий на поверхности фиктивных поршней имеет вид  $p_1(x_{\infty 1}) = p_2(x_{\infty 2})$  и, в силу линеаризации,

$$\rho_1^\circ p_{11}(u^\circ t) = \rho_2^\circ p_{21}(u^\circ t) \quad (4.3)$$

Второе граничное условие получается после исключения  $x_w$  из соотношения (2.1) (примененного к обоим газам) и линеаризации

$$p^\circ (x_{11}' - x_{21}') = q_w^\circ(t)$$

Здесь  $q_w^\circ$  — тепловой поток на контактной поверхности, определенный при  $\gamma_1 = \gamma_2$  в соответствии с [2]. Так как  $x_{i1} = u_{i1}(u^\circ t)$ , то

$$u_{11}(u^\circ t) - u_{21}(u^\circ t) = q_w^\circ p^{\circ -1}. \quad (4.4)$$

Соотношение на ударной волне принимает вид

$$p_{21}(U_0 t) = N U_0 u_{21}(U_0 t), \quad N = \text{const}$$

Здесь  $U_0$  — скорость ударной волны при  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Таким образом, для определения  $\Psi_1, \Psi_2, \Phi_2$  получаем систему функциональных уравнений

$$\rho_1^\circ \Psi_1(c_1^\circ t) = \rho_2^\circ [\Phi_2(-c_2^\circ t) + \Psi_2(c_2^\circ t)] \\ - c_1^{\circ -1} \Psi_1(c_1^\circ t) - c_2^{\circ -1} [\Phi_2(-c_2^\circ t) - \Psi_2(c_2^\circ t)] = 2q_w^\circ p^{\circ -1} \\ \Phi_2[(U_0 - u^\circ - c_2^\circ)t] + \Psi_2[(U_0 - u^\circ + c_2^\circ)t] = \\ = N U_0 c_2^{\circ -1} \{\Phi_2[(U_0 - u^\circ - c_2^\circ)t] - \Psi_2[(U_0 - u^\circ + c_2^\circ)t]\}$$



Исключая из первых двух соотношений  $\Psi_1$ , найдем

$$\Phi_2(-x) = \left( \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} + \frac{c_1^\circ}{c_2^\circ} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{c_1^\circ}{c_2^\circ} - \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right) \Psi_2(x) - \frac{2c_1^\circ}{p^\circ} q_w^\circ \left( \frac{x}{c_2^\circ} \right) \right]$$

и третье соотношение запишется так:

$$\begin{aligned} & \left( 1 + N \frac{U_0}{c_2^\circ} \right) \Psi_2[(U_0 - u^\circ + c_2^\circ)t] + \\ & + \left( 1 - N \frac{U_0}{c_2^\circ} \right) \left( \frac{c_1^\circ}{c_2^\circ} - \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right) \left( \frac{c_1^\circ}{c_2^\circ} + \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right)^{-1} \Psi_2[-(U_0 - u^\circ - c_2^\circ)t]. \end{aligned}$$

Так как  $q_w^\circ = Kt^{-1/2}$ , то

$$\begin{aligned} & \Psi_2 = \alpha x^{-1/2} \\ \alpha & \left[ \left( 1 - N \frac{U_0}{c_2^\circ} \right) \left( \frac{c_1^\circ}{c_2^\circ} - \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right) \left( \frac{c_1^\circ}{c_2^\circ} + \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right)^{-1} (c_2^\circ + u^\circ - U_0)^{-1/2} + \right. \\ & \left. + \left( 1 + N \frac{U_0}{c_2^\circ} \right) (U_0 - u^\circ + c_2^\circ)^{-1/2} \right] = \\ & = 2 \frac{c_1^\circ}{p^\circ} K \left( 1 - N \frac{U_0}{c_2^\circ} \right) \left( \frac{c_1^\circ}{c_2^\circ} + \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{U_0 - u^\circ}{c_2^\circ} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Анализ полученного решения (или соотношений (3.3), (3.4)) показывает, что при  $\varepsilon < 0$  в обе стороны от контактной поверхности распространяются волны сжатия, при  $\varepsilon > 0$  — волны разрежения.

Для получения решения при  $\varepsilon \neq 0$  и  $t \rightarrow 0$  необходимо обратиться к рассмотрению исходной нелинейной системы уравнений. Очевидно, при этом имеет место образование сильных ударных волн, распространяющихся как в толкаемый, так и толкающий газы.

Проведя поэтому анализ размерностей, как в [4], найдем

$$\bar{T}_i = f_i \left( \frac{\eta}{a_{0i} \sqrt{\xi}} \right), \quad x_w(t) = At^{2/3}, \quad x_{\infty 1} = B_1 t^{2/3}, \quad x_{\infty 2} = B_2 t^{2/3}$$

Полученные результаты обобщаются на течения с осевой и сферической симметрией.

#### ЛИТЕРАТУРА

Поступило 8 I 1966

1. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. К анализу одномерных нестационарных течений газа с учетом теплопроводности и вязкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
2. Goldsworthy F. A. The structure of a contact region with application to the reflection of a shock from a head-conduction wall. Fluid Mech., 1959, vol. 5.
3. Киреев В. Т. О влиянии неравновесных химических реакций на распад произвольного разрыва. ПМТФ, 1965, № 6.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. Гостехиздат, 1954.
5. Демьянов Ю. А., Омельченко К. Г. К использованию анализа размерностей при решении некоторых задач теплопроводности. ПМТФ, 1961, № 3.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, 1963.
7. Киреев В. Т. О движении ударной волны в ударной трубе при мгновенном раскрытии диафрагмы. Изв. АН СССР, Механика, 1962, № 6.
8. Демьянов Ю. А. Влияние пограничного слоя на характер течения газа в трубе за движущейся ударной волной. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.