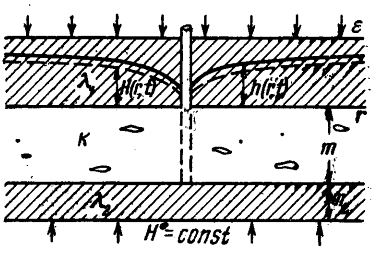
6. Юрисов В. А. Метагармоническое семейство слоев. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Крупской, 1964, т. 142, Тр. каф. теор. физ., вып. 5.
7. Салехов Г. С. К определению давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. Изв. Казанск. фил. АН СССР. сер. физ.-матем. и техн. наук, 1956, вып. № 9.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел (перев. с англ.). Изд-во «Наука», 1964.
9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. II (перев. с англ.). Изд. иностр. лит., 1949.
10. Таблицы интегральной показательной функции, матем. таблицы, Ин-т точн. механ. и вычисл. техн. АН СССР, 1964.

О ПОНИЖЕНИИ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В ПОКРОВНОЙ ТОЛЩЕ ДВУСЛОЙНОГО ПЛАСТА, СОЗДАВАЕМОМ ОТКАЧКОЙ ИЗ НИЖЕЛЕЖАЩЕГО НАПОРНОГО ГОРИЗОНТА

А. БЕГМАТОВ *(Ташкент)*

Задачу притока к скважине в двуслойном пласте с непроницаемой подошвой при жестком режиме рассматривал В. М. Шестаков [1], а при упругом режиме — Ф. М. Бочевер [2]. В этих работах предполагается, что коэффициент фильтрации верхней толщи, в которой имеется свободная поверхность, намного меньше нижнего основного пласта и что откачка ведется из последнего. Тогда, следуя Н. Н. Веригину, пренебрегается горизонтальными скоростями в верхнем слое.

Ниже эта задача рассматривается при более общей постановке, причем, наряду с точным решением линеаризованной системы уравнений, дается приближенное выражение для определения понижений в верхнем слое, имеющих место при малых и больших значениях времени t.



Фиг. 1

При сделанных выше предположениях для определения ординаты свободной поверхности $h(r,t)$ в покровной толще и пьезометрического напора $H(r,t)$ нижнего пласта (фиг. 1) имеем систему

$$\mu_+ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\lambda_1}{h}(H-h)+\varepsilon$$

$$\mu_- = \frac{\partial H}{\partial t} = km\Delta H - \frac{\lambda_1}{h}(H-h) - \frac{\lambda_2}{m_2}(H-H^0)$$

$$\mu_- = \gamma m\beta \qquad \left(\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right), \tag{1}$$

Здесь μ_+ — коэффициент водоотдачи верхнего слоя; λ_1, λ_2, k — коэффициенты фильтрации соответствующих пластов; β — коэффициент упругоемкости по В. Н. Щелкачеву [3]; γ — удельный вес; ε — постоянная интенсивность инфильтрации; m и m_2 — мощности напорного пласта и нижележащей прослойки соответственно.

Для линеаризации системы (1), прибегнем к осреднению множителя $1/h$ перед $(H-h)$. Так, полагая $1/h \approx 1/m_1$, вместо (1) имеем

$$\partial h/\partial t = b_1(H-h)+q, \qquad \partial H/\partial t = \varkappa\Delta H - \beta_1(H-h) - \beta_2(H-H^0) \tag{2}$$

$$b_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_+ m_1}, \quad \beta_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_- m_1}, \quad \beta_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_- m_2}, \quad \varkappa = \frac{km}{\mu_-}, \quad q = \frac{\varepsilon}{\mu_+}$$

Здесь m_1 — некоторое постоянное среднее значение $h(r,t)$. Решим эту систему при следующих начальных и граничных условиях:

$$h(r,0) = h_0, \quad H(r,0) = H_0, \quad 2\pi km(r\partial H/\partial r)_{r=0} = Q = \mathrm{const} \tag{3}$$

$$h(r,t) < \infty, \qquad H(r,t) < \infty \quad \text{при } r \to \infty$$

Применяя преобразование Лапласа к системе (2), нетрудно получить (4)

$$U=\frac{b_1}{p+b_1}\left[-\frac{Q}{2\pi km}\frac{1}{p}K_0(\omega r)+\frac{A_0}{\omega^2}\right]+\frac{q+ph_0}{p(p+b_1)},\qquad V=-\frac{Q}{2\pi km}K_0(\omega r)+\frac{A_0}{\omega^2}$$

$$U(r,p)=Lh=\int_0^\infty h\exp(-pt)\,dt,\qquad V(r,p)=LH=\int_0^\infty H\exp(-pt)\,dt$$

$$\omega^2=\frac{p^2+p(b_1+\beta_1+\beta_2)+b_1\beta_2}{\varkappa(p+b_1)},\qquad A_0=\frac{1}{\varkappa}\left[H_0+\frac{\beta_1(q+ph_0)+(p+b_1)\beta_2H_0}{p(p+b_1)}\right]$$

Здесь K_0 — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента.

Согласно общим правилам операционного исчисления, находим

$$R=2L^{-1}\left[\frac{K_0(\omega r)}{p(p+b_1)}\right]=\int_0^\infty J_0\left(r\sqrt{\frac{\lambda(p_1-p_2-\lambda(b_1+p_2)}{\varkappa(1+\lambda)}}\right)\times$$

$$\times\left[1-\exp\left(-\frac{\lambda b_1-p_1}{1+\lambda}t\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda b_1-p_1}-\int_{-p_2}^\infty J_0\left(r\sqrt{\frac{(\lambda+p_2)(\lambda+p_1)}{\varkappa(\lambda-b_1)}}\right)\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda(\lambda-b_1)}d\lambda \qquad (5)$$

Здесь J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; p_1, p_2 — корни квадратного уравнения

$$p^2+p(b_1+\beta_1+\beta_2)+b_1\beta_2=0,\qquad p_1<0,\qquad p_2<0,\qquad |p_1|<|p_2|$$

Далее, пользуясь таблицами преобразования Лапласа, получим

$$S(r,t)=h_0-h(r,t)=\frac{b_1Q}{4\pi km}R-b_1A+h_0-q/b_1$$

$$A=\frac{e^{p_1t}}{p_1-p_2}\left[H_0+\frac{\beta_2H^\circ}{p_1}+\frac{\beta_1(h_0+q/p_1)}{p_1+b_1}\right]+$$

$$+\frac{e^{p_2t}}{p_2-p_1}\left[H_0+\frac{\beta_2H^\circ}{p_2}+\frac{\beta_1(h_0-q/p_2)}{b_1+p_2}\right]+\frac{q+b_2H^\circ}{b_1b_2},\qquad b_2=\frac{\lambda_2}{m_2\mu_+} \qquad (6)$$

Здесь, как и далее, выражения для пьезометрического напора опускаются.

Из (4), используя предельное соотношение [4]

$$\lim pV(r,p)=h(r,\infty)\qquad \text{при } p\to 0$$

имеем следующее выражение для наибольшего понижения:

$$S(r,\infty)=h_0-h(r,\infty)=\frac{Q}{2\pi km}K_0\left(r\sqrt{\frac{\beta_2}{\varkappa}}\right)-H^\circ-\frac{q}{b_0}+h_0\qquad\left(b_0=\frac{b_1b_2}{b_1+b_2}\right) \qquad (7)$$

Следовательно, понижение уровня грунтовых вод в верхней толще двуслойного пласта, создаваемого откачкой из нижележащего напорного горизонта при упругом режиме и с учетом перетекания снизу, определяется по формуле (6). При этом предельное положение указанного понижения, соответствующее $t=\infty$, имеет вид (7).

В случае непроницаемой подошвы напорного пласта, аналогично (6), получим

$$S_1=\frac{b_1Q}{4\pi km}R_1+\frac{b_1}{b_3}\left(h_0-H_0-\frac{q}{b_3}\right)(1-e^{-b_3t})-\frac{\varepsilon t}{\mu} \qquad (8)$$

$$R_1=\frac{1}{b_1}\int_0^\infty J_0\left(r\sqrt{\frac{\lambda[b_1+\beta_1(1+\lambda)]}{\varkappa(1+\lambda)}}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\lambda}{1+\lambda}b_1t\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda}-$$

$$-\int_{b_3}^\infty J_0\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{\lambda-b_3}{\lambda-b_1}}\right)\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda(\lambda-b_1)}d\lambda,\qquad b_3=b_1+\beta_1,\qquad \mu=\mu_-+\mu_+$$

Если пренебречь упругими свойствами воды и пласта, т. е. положить $\mu_- = 0$, то нетрудно получить выражение для понижений в верхнем слое при наличии и отсутствии перетекания снизу соответственно:

$$S_2 = \frac{b_1 Q}{2\pi k m} R_2 - \left(H^\circ - h_0 - \frac{q}{b_0}\right)(1 - e^{-b_0 t}) \qquad (\lambda_2 \neq 0) \tag{9}$$

$$S_3 = \frac{b_1 Q}{2\pi k m} R_3 - qt \qquad (\lambda_2 = 0) \tag{10}$$

$$R_2 = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\left[1 - \exp\left(-\frac{b_0 + b_1\lambda^2}{1+\lambda^2} t\right)\right]\frac{\lambda a\lambda}{b_0 + b_1\lambda^2} \tag{11}$$

$$R_3 = \frac{1}{b_1} F(\xi, \theta), \qquad F(\xi,\theta) = \int_0^\infty J_0(\nu\xi)\left[1 - \exp\left(-\frac{\nu^2}{1+\nu^2/\theta}\right)\right]\frac{a\nu}{\nu} \tag{12}$$

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{at}}, \qquad \theta = b_1 t, \qquad a = \frac{km}{\mu_+}, \qquad \rho = r\left(\frac{b_1 + b_2}{a}\right)^{1/2}.$$

Значения функции $F(\xi, \theta)$ даны в виде таблицы и графиков в работах [1, 5]. Отметим, что при $q = 0$ уравнение (10) совпадает с решением аналогичной задачи [1] без учета инфильтрации.

Значения интегралов R, R_1, R_2 можно вычислить только численным интегрированием. Во многих случаях наиболее важно определение понижения в начальный период эксплуатации скважин (при определении параметров пласта) и после длительных откачек (в задачах дренажа и оценки запасов подземных вод). Поэтому представляет интерес получение более простых и в то же время достаточно точных для практических расчетов выражений для понижений уровня грунтовых вод при малых и больших значениях времени t.

Рассмотрим подробно метод получения приближенных выражений для одного частного случая, а именно, для случая притока к скважине без учета упругой водоотдачи напорного пласта ($\mu_-^\circ = 0$) и когда последний имеет непроницаемый водоупор ($\lambda_2 = 0$). Точное решение этой задачи при сделанных предположениях имеет вид (10). При этом, как следует из (5),

$$LR_3 = \lim LR = \frac{1}{p(p+b_1)} K_0\left(r\sqrt{\frac{b_1 p}{a(p+b_1)}}\right) \qquad \begin{pmatrix}\lambda_2 \to 0\\ \mu_- \to 0\end{pmatrix} \tag{13}$$

Как известно, большим значениям времени t соответствуют малые значения параметра p преобразования Лапласа, и наоборот. Воспользуемся этим свойством.

Для $b_1 / p < 0.25$, $\rho_1 = r\sqrt{b_1 / a} < 0.1 - 0.2$ можно положить

$$K_0\left(r\sqrt{\frac{b_1 p}{a(p+b_1)}}\right) = K_0\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{1 + b_1/p}}\right) \approx K_0(\rho_1)$$

Следовательно, для значений времени t, удовлетворяющих неравенству

$$\theta = b_1 t < 0.25 \qquad \text{при} \quad \rho_1 < 0.1 - 0.2$$

$$R_3 \approx R_{3\text{п}} = \frac{1}{b_1} K_0(\rho_1) L^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+b_1}\right) = \frac{1 - e^{-\theta}}{b_1} K_0(\rho_1) \tag{14}$$

Здесь через $R_{i\text{п}}$ обозначены приближенные значения R_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда при условии (14) получим

$$F(\xi, \theta) \approx [1 - e^{-\theta}] K_0(\rho_1)$$

Для $p / b_1 < 0.1 - 0.2$, $r\sqrt{p} / a < 0.1 - 0.5$, т. е. для значений r и t, при которых $\theta > 5 - 10$, $\xi < 0.1 - 0.5$, можно написать

$$K_0\left(r\sqrt{\frac{b_1 p}{a(p+b_1)}}\right) = K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a(1+p/b_1)}}\right) \approx K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$$

С другой стороны, при $p / b_1 < 0.1 - 0.2$

$$\frac{1}{p+b_1} \approx \frac{1}{b_1}\left[1-\frac{p}{b_1}+\left(\frac{p}{b_1}\right)^2\right].$$

Следовательно, согласно (12), имеем

$$LR_3 \approx LR_{3\text{п}} = \frac{1}{b_1 p}\left[1-\frac{p}{b_1}+\left(\frac{p}{b_1}\right)^2\right]K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$$

Отсюда можно найти

$$F \approx -\frac{1}{2}\left[\mathrm{Ei}(-u)+\frac{1}{\theta}\left(1+\frac{1-u}{\theta}\right)e^{-u}\right], \quad \mathrm{Ei}(-u) = -\int_u^\infty \frac{e^{-\nu}}{\nu}d\nu, \quad u = \frac{r^2}{4at} \tag{16}$$

Аналогично рассмотренному, нетрудно получить

$$b_1 R_{1n} = W(u_1, r/B_2) - e^{-\theta}W(u_1, r/B_1) \quad \text{при } \theta < 0.25, \quad r\sqrt{b_3/\varkappa} < 0.1\text{—}0.2$$

$$b_1 R_{1n} = F(\xi_0, \theta) \quad \text{при } b_3 t > 5-10, \quad \xi_0 < 0.1 - 0.5 \tag{17}$$

$$b_1 R_{1n} = -{}^1\!/_2\{\mathrm{Ei}(-u_0) + \theta^{-1}[1+(1-u_0)/\theta]\,e^{-u_0} \quad \text{при } \theta > 5-10, \ \xi_0 < 0.1 - 0.5$$

$$b_1 R_{2\text{п}} = \begin{cases} [1-e^{-\theta}]K_0(\rho) & \text{при } \theta < 0.25,\ \rho < 0.1\text{—}0.2 \\ {}^1\!/_2\,\{W(u, r/B) - \theta^{-1}[1+(1-u-b_2 t)\theta^{-1}]\,e^{-u-b_2 t}\} & \text{при } \theta > 5\text{—}10,\ \rho < 0.1\text{—}0.5 \end{cases} \tag{18}$$

$$W\left(u, \frac{r}{B}\right) = \int_u^\infty \exp\left[-\nu - \left(\frac{r}{2B}\right)^2\frac{1}{\nu}\right]\frac{d\nu}{v}$$

Последний интеграл, табулированный Хантушем [6, 7],

$$u_0 = \frac{r^2}{4a_0 t}, \quad u_1 = \frac{r^2}{4\varkappa t}, \quad a_0 = \frac{km}{\mu_- + \mu_+} = \frac{km}{\mu}, \quad \xi_0 = \frac{r}{\sqrt{a_0 t}}$$

$$B = \sqrt{a/b_2}, \quad B_1 = \sqrt{\varkappa/b_1}, \quad B_2 = \sqrt{\varkappa/b_3}, \quad \rho = r\sqrt{(b_1+b_2)/a} \tag{19}$$

Если $q = 0$, $h_0 = H_0$, то из второй формулы (17) и (8) имеем

$$S = \frac{Q}{2\pi km}F(\xi_0, \theta)$$

Здесь $F(\xi_0, \theta)$ — интеграл (11), причем в a_0 входит коэффициент водоотдачи μ_+ верхнего слоя и коэффициент упругой водоотдачи напорного пласта μ_-, учитывающий упругие свойства воды и породы. Обычно $\mu_+ \gg \mu_-$, поэтому величину a_0 можно

	ρ	$0{,}433\cdot10^{-2}$	$0{,}433\cdot10^{-1}$	$0{,}866\cdot10^{-1}$	$1{,}722\cdot10^{-1}$	$2{,}6\cdot10^{-1}$
$\theta=0.04$	R_2	0.2183	0.1280	0.1011	0.0744	0.0593
	$R_{2\text{п}}$	0.2179	0.1277	0.1005	0.0733	0.0574
$\theta=0.4$	R_2	1.862	1.103	0.876	0.652	0.524
	$R_{2\text{п}}$	1.833	1.073	0.845	0.616	0.483

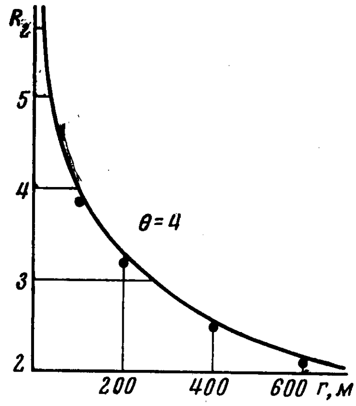
назвать коэффициентом квазипьезопроводности. Следовательно, при упругом режиме для значений времени $b_3 t > 5$—10 на некоторой круговой площади понижение будет происходить так же, как при жестком режиме с коэффициентом квазипьезопроводности a_0. При этом зона квазижесткого режима возрастает с увеличением времени, ибо

$$\xi_0 = r/\sqrt{a_0 t} < 0.1\text{—}0.5$$

При определенных ограничениях на r и t можно пренебречь последними слагаемыми в (16), а также в последних формулах (17) и (18). Тогда понижения для соответствующих случаев будут иметь вид

$$S_3 = -\frac{Q}{4\pi km}\mathrm{Ei}(-u), \quad S_1 = \frac{Q}{4\pi km}W\left(u, \frac{r}{b}\right)$$

$$S_2 = -\frac{Q}{4\pi km}\mathrm{Ei}(-u_0)$$



Фиг. 2

Отсюда следует, что после длительных откачек или вблизи скважины понижение в верхней толще при сделанных допущениях происходит так же, как в однослойном пласте.

Было проведено сравнение значений интеграла (11), вычисленных на ЭВМ (М-20) СО АН СССР и по приближенным формулам (18). Откуда следует, что $R_{2п}$ дает достаточную для практических расчетов точность даже при $\theta = 0.4$ (таблица) и $\theta = 4$ (фиг. 2) соответственно для малых и больших значений времени. Сравнение значений $F(\xi, \theta)$ по формуле (15) и по [1, 5] дает также удовлетворительную точность.

Поступило 10 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестаков В. М. Неустановившаяся фильтрация в двухслойной среде. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
2. Бочевер Ф. М. К расчету скважин в неглубоких напорных водоносных пластах артезианских бассейнов. Тр. Ин-та Водгео, гидрогеология, 1964, вып. 6.
3. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е. Физматгиз, 1958.
5. Рафаил Н. Гидрогеологический анализ водозаборов подземных вод в условиях двухслойной среды. Вестн. Моск. ун-та, 1965, № 2.
6. Hantush M. S. Analysis of the date from pumping tests in leaky aquifers. Trans. Amer. Geophys. Union., 1956, vol. 37.
7. Сб. «Вопросы гидрогеологических расчетов» (под ред. Бочевера Ф. М. и Шестакова В. М.), Изд. «Мир», 1964.