

ПРИТОК К СКВАЖИНАМ В ПЛАСТЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ И МОЩНОСТЬЮ

И. А. ЧАРНЫЙ (Москва)

1. Постановка задачи. Одномерные задачи напорной фильтрации несжимаемой или малосжимаемой упругой жидкости в пласте, параметры которого зависят от одной координаты, сравнительно хорошо исследованы [1, 2]. Значительно менее изучены двумерные задачи, в частности, задачи притока к скважинам в пласте, проницаемость и мощность которого меняются вдоль площади, т. е. являются в общем случае функцией двух координат.

Двумерные задачи сводятся к решению линейных уравнений эллиптического или параболического типа с переменными коэффициентами вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad \left(\sigma = \sigma(x, y) = \frac{kh}{\mu} \right) \quad (1.1)$$

$$A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial p}{\partial t} \quad \left(A = A(x, y) = \frac{K}{mh} \right) \quad (1.2)$$

Здесь x, y — декартовы координаты; p — давление; t — время; k, h, μ — проницаемость, мощность, вязкость; K — приведенный модуль объемного сжатия упругой жидкости в упругой пористой среде, m — пористость.

Интегрированию уравнения (1.1) при частных видах зависимости $\sigma(x, y)$ посвящены исследования О. В. Голубевой и ее учеников [3-5], Г. С. Салехова [7] и др.

В настоящей работе предложен метод расчета притока к одной или группе скважин, в окрестности которых функцию $\sigma(x, y)$ можно аппроксимировать гармонической функцией.

2. Замена задачи о притоке к скважине в неоднородном пласте задачей притока к кольцевой нити стоков или источников в однородном неограниченном пространстве. Введем новые независимые переменные $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ и пусть $\zeta = \xi + i\eta = \zeta(x + iy)$ — функция комплексного переменного $z = x + iy$.

Выберем $\xi = \sigma$. Рассмотрим сначала уравнение (1.1), которое в новых переменных примет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2.1)$$

соответствующий осесимметричной фильтрации в однородной среде.

При этом, разумеется, $\xi = \sigma \geq 0$, т. е. ξ, η могут рассматриваться не только как координаты вспомогательной плоскости, но и как цилиндрические координаты $\xi = r, \eta = z$.

Пусть на исходной плоскости течения xy в точке x_0, y_0 находится источник с дебитом Q . Согласно закону Дарси

$$Q = - \oint_{(l)} \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} dl = - \oint_{(l)} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} dl \quad (2.2)$$

интеграл берется по исчезающе малому контуру l , окружающему точку x_0, y_0 ; $\partial p / \partial n, dl$ — производная давления по внешней нормали и элемент длины контура.

Пусть ξ_0, η_0 — координаты плоскости ζ , соответствующие x_0, y_0 , причем $d\zeta / dz$ в этой точке предполагается конечной. Тогда контур (l) плоскости z конформно отобразится в контур (λ) плоскости ζ и будет иметь место соотношение $(\partial p / \partial n) dl = (\partial p / \partial v) d\lambda$, где dv и $d\lambda$ — элементы нормали и длины дуги контура (λ) , окружающего точку ξ_0, η_0 .

Учитывая (1.1) и условие $\sigma = \xi$, формулу (2.2) ввиду малости размеров контура можно представить теперь в виде

$$Q = - \oint_{(\lambda)} \xi \frac{\partial p}{\partial v} d\lambda = \frac{1}{2\pi} 2\pi \xi_0 \oint_{(\lambda)} \frac{\partial p}{\partial v} d\lambda = \frac{Q_{\xi_0}}{2\pi} \quad (2.3)$$

где, как нетрудно видеть, Q_{ξ_0} — дебит кольцевого источника радиуса ξ_0 в виде круговой нити в пространстве с цилиндрическими координатами $\xi = r, \eta = z$.

Рассмотрим сначала случай, когда скважина расположена в той области основной плоскости xy , которая посредством функции $\zeta(x + iy) = \sigma(x, y) + i\eta(x, y)$ однозначно отображается на правую полуплоскость ζ , или, что то же, на все пространство $0 \leq \sigma \leq \infty, -\infty < \eta < \infty, \sigma = \xi = r, \eta = z$.

Например, для функции

$$\zeta(x + iy) = \frac{1}{x + iy}, \quad \xi = \sigma = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

такой областью будет правая полуплоскость xu . Для функции

$$\zeta(x + iy) = (x + iy)^2, \quad \xi = \sigma = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy$$

область между биссектрисами прямых углов в первом и четвертом квадрантах плоскости xu . Будем считать, что линия $\sigma = 0$ — линия тока.

Исходная задача свелась, таким образом, к задаче теории потенциала в однородной среде для линии источников в виде круговой нити радиуса $r_0 = \xi_0$ с равномерно распределенной интенсивностью дебита $q_{\xi\eta}$.

Пусть круговая нить расположена в плоскости $\eta = z = 0$. Потенциал, т. е. давление, определяемое элементом длины нити $r_0 d\varphi$ в любой точке M с координатами $r = \xi$, $\eta = z$, определяется формулой [1]

$$dp = \frac{q_{\xi\eta} r_0 d\varphi}{4\pi R}, \quad R = [(r - r_0 \cos \varphi)^2 + r_0^2 \sin^2 \varphi + z^2]^{1/2} \quad (2.4)$$

Здесь R — расстояние от элемента до точки M , φ — угол, составляемый радиусом-вектором элемента с плоскостью, проходящей через ось $\eta = z$ и точку $r = \xi$, $\eta = z$. Потенциал, вызванный действием всей нити, очевидно, равен

$$p[\xi(x, y), \eta(x, y)] = p(r, z) = \frac{q_{\xi\eta} r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(r - r_0 \cos \varphi)^2 + r_0^2 \sin^2 \varphi + z^2}} \quad (2.5)$$

Учитывая (2.3), имеем

$$q_{\xi\eta} = Q_{\xi\eta} / 2\pi r_0 = Q / r_0$$

Отсюда

$$p(r, z) = \frac{Q}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{r_0^2 + r^2 + z^2 - 2r_0 r \cos \varphi}} \quad (2.6)$$

После интегрирования получаем, полагая давление на бесконечности нулю

$$p(r, z) = \frac{Q}{\pi} [z^2 + (r_0 + r)^2]^{-1/2} K(\Lambda), \quad \Lambda = 2 \left[\frac{r_0 r}{z^2 + (r_0 + r)^2} \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

Здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле Λ .

Поскольку $r = \xi(x, y) = \sigma(x, y)$, $z = \eta(x, y)$, тем самым решена задача о распределении давления в окрестности скважины с дебитом Q на исходной плоскости.

Формула (2.7), таким образом, соответствует постоянному давлению на бесконечности в пространстве $\xi = \sigma = r$, $\eta = z$, принимаемом за нуль. В зависимости от вида функции $\zeta(x + iy)$ тем самым определена точка нулевого давления исходной плоскости xu .

Формулу (2.7) можно представить еще несколько другим образом, вводя расстояние ρ от точки $\xi = r$, $\eta = z$ до кольцевой нити

$$\rho^2 = (r - r_0)^2 + z^2, \quad \Lambda = \left(\frac{r/r_0}{\rho^2/4r_0^2 + r/r_0} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

$$p(\rho, r) = \frac{Q}{2\pi r_0} \left(\frac{\rho^2}{4r_0^2} + \frac{r}{r_0} \right)^{-1/2} K(\Lambda) \quad (2.9)$$

Вблизи нити $\rho \rightarrow 0$, $r \rightarrow r_0$ и модуль эллиптического интеграла стремится к единице. Введя дополнительный модуль

$$k'^2 = 1 - \frac{4r_0 r}{\rho^2 + 4r_0 r} = \frac{\rho^2}{\rho^2 + 4r_0 r}, \quad k' = \rho(\rho^2 + 4r_0 r)^{-1/2}$$

и, пользуясь формулой для значений модуля вблизи единицы

$$K(k) \approx \ln(4/k'), \quad k \rightarrow 1$$

получим вместо (2.9)

$$p(\rho, r) \approx \frac{Q}{2\pi r_0} \ln \frac{8r_0}{\rho}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad r \rightarrow r_0 \quad (2.10)$$

Для больших значений ρ давление, согласно (2.9), меняется приблизительно по закону $1/\rho$.

Пусть радиус скважины на основной плоскости xy мал и равен r° .

Согласно сказанному выше, скважине малого радиуса плоскости xy будет соответствовать в пространстве $\xi = r, \eta = z$ поверхность тора также с достаточно малым радиусом ρ° его поперечного сечения. В силу конформности отображения, связь между r°, ρ° имеет вид

$$\rho^\circ = r^\circ \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{x_0, y_0} \quad (2.11)$$

Согласно (2.10), получаем для давления на стенке скважины

$$p^\circ = \frac{Q}{2\pi r_0} \ln \frac{8r_0}{r^\circ \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{x_0, y_0}} = \frac{Q}{2\pi \sigma_0} \ln \frac{8\sigma_0}{r^\circ \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{x_0, y_0}} \quad (2.12)$$

Отметим, что модуль производной $\left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{x_0, y_0}$ можно трактовать как абсолютную величину скорости фиктивного потока с комплексным потенциалом $\zeta = \xi + i\eta = \sigma + i\eta$.

Имея карту изолиний $\sigma = \text{const}$, величину этой фиктивной скорости можно легко найти графически из соотношения

$$\left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{x_0, y_0} \approx \Delta\sigma / \Delta n$$

Здесь Δn — направление нормали к линии $\sigma = \text{const}$ в месте расположения скважины.

Из (2.12) следует, что дебит скважины в основном определяется параметрами пласта в месте ее нахождения.

Полученные результаты легко обобщаются на случай интерференции группы n скважин, расположенных в точках x_i, y_i ($i = 1, \dots, n$) точно так же, как это делается для пласта с постоянными параметрами, только логарифмический потенциал должен быть заменен другой функцией влияния источника в виде эллиптического интеграла (2.7) или (2.9), в котором вместо z следует подставить $z - z_i = \eta - \eta_i$, где $\eta_i = \eta(x_i, y_i)$.

Связь между забойными давлениями p_i° и дебитами Q_i будет определяться системой алгебраических уравнений первой степени.

Для забойного давления p_j° получим, суммируя давления, вызванные действием остальных скважин, согласно (2.9), (2.12),

$$p_j^\circ = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\sigma_i} \left(\frac{\rho_{ij}^2}{4\sigma_i^2} + \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \right)^{-1/2} K(\Lambda_{ij}) + \frac{Q_j}{2\pi \sigma_j} \ln \frac{8\sigma_j}{r_j^\circ \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{r_j^\circ}} \quad (2.13)$$

$$\rho_{ij}^2 = (\sigma_i - \sigma_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2; \quad \Lambda_{ij} = \left(\frac{\sigma_j/\sigma_i}{\rho_{ij}^2/4\sigma_i^2 + \sigma_j/\sigma_i} \right)^{1/2} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.14)$$

Здесь штрих означает, что при суммировании опускается член $i = j$.

Проекция скорости фильтрации, вызванные действием одной скважины, можно найти из формул

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.16)$$

Производные $\partial p / \partial \xi, \partial p / \partial \eta$ определяются из (2.7), откуда после вычислений получаем

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (r_0 + r)^2}} \left\{ K - \left[1 + \frac{2r(r_0 - r)}{z^2 + (r_0 - r)^2} \right] E \right\} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{Q}{\pi} \frac{z}{z^2 + (r_0 - r)^2} \frac{E}{\sqrt{z^2 + (r_0 + r)^2}} \quad (2.18)$$

Здесь K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода при модуле Λ , согласно (2.7) или (2.8). Если в пласте действует несколько скважин, проекции скорости, вызванные каждой скважиной, алгебраически суммируются.

3. Схема расчета для более общего случая. Выше была рассмотрена задача о притоке к скважинам в неограниченном пласте, в котором параметр $\sigma = kh/\mu$, обычно называемый параметром проводимости, — гармоническая функция координат. Это предположение является, конечно, ограничением, однако не столь существенным, как это могло бы показаться с первого взгляда, поскольку, согласно (2.12), связь между дебитом и давлением определяется, в основном, параметрами пласта в месте нахождения скважины, производная $|d^k/dz|_{x_0, i}$ входит в формулу (2.12) под знаком логарифма. Более точно это утверждение справедливо тогда, когда скважина расположена в области монотонно изменяющегося значения параметра σ , аппроксимируемого гармонической функцией, и на границах этой области значение давления, определяемое по формуле (2.9), значительно меньше забойного давления на скважине, которое дается формулой (2.12). Изменение же σ в достаточно малой окрестности вокруг скважины или группы близко расположенных скважин обычно всегда можно с нужной для практики точностью аппроксимировать гармонической функцией.

Укажем метод решения для случая ограниченной области пласта, на границах которой заданы давление или скорость фильтрации. В пространстве $\sigma = \xi = r, \eta = z$ области течения исходной плоскости xy соответствует некоторое тело вращения вокруг оси $\eta = z$, внутри которого расположены круговые нити источников, соответствующие скважинам на плоскости xy . В зависимости от вида граничных условий, а также от вида функции $\zeta(x + iy) = \sigma(x, y) + i\eta(x, y)$ задача сведется к задаче Дирихле, к задаче Неймана или к смешанной задаче для этого тела вращения. Решение такого вида задач проще всего искать в виде суммы

$$p(r, z) = p_1(r, z) + p_2(r, z) \quad (3.1)$$

где p_1 — определяется для неограниченного пространства суммированием по числу скважин формул (2.7) (разумеется, с заменой z на $z - z_i$, z_i — ордината i -й круговой нити), а $p_2(r, z)$ — регулярная функция. По известным граничным условиям для $p(r, z)$ и виду $p_1(r, z)$ составляют граничные условия для регулярной функции $p_2(r, z)$. Функция $p_2(r, z)$ может быть найдена известными методами [1, 8], в частности, путем сведения задачи к решению интегрального уравнения для надлежащей подобранной интенсивности источников, распределенных вдоль оси $\eta = z$ [4].

4. Нестационарный приток к скважине. Рассмотрим теперь случай нестационарной фильтрации, описываемый уравнением (1.2). Та же замена переменных $\xi(x, y), \eta(x, y), \xi + i\eta = \zeta(x + iy)$ приводит (1.2) к линейному уравнению параболического типа с переменными коэффициентами

$$\left\{ A\xi \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.1)$$

Ограничимся случаем одной скважины, пущенной с постоянным дебитом в первоначально невозмущенном пласте.

Для рассматриваемых задач, преследующих в основном практические цели, можно отметить следующее обстоятельство.

При установившемся течении, как упоминалось выше, связь между забойным давлением и дебитом определяется в основном параметрами пласта в месте проходки скважины. Очевидно, при пуске скважины, когда давление в окрестности скважины еще не дошло до установившегося состояния, влияние отдаленных от скважины зон пласта будет меньше, чем при установившемся течении. Это дает основание в первом приближении принять множитель в фигурных скобках в (4.1) постоянным и определять его по значениям параметров A и σ в точке с координатами центра скважины x_0, y_0 ,

$$A\xi \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] = A(x_0, y_0) \xi(x_0, y_0) \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right]_{x_0, y_0} = \kappa = \text{const} \quad (4.2)$$

Заметим, что квадратная скобка в (4.2) представляет собой квадрат модуля скорости фиктивного потока с потенциалом $\xi = \sigma$ и по карте изолиний $\sigma = \text{const}$ приближенно может быть заменена величиной $(\Delta\sigma/\Delta n)^2$, Δn — направление нормали к $\sigma = \text{const}$.

Заметим так же, что построение семейства $\eta = \text{const}$, т. е. линий тока фиктивного потока с потенциалом σ , заданным графически линиями $\sigma = \text{const}$, можно произвести проведением нормалей к кривым $\sigma = \text{const}$ таким образом, чтобы расход фиктивного потока в любом сечении между парой ближайших линий $\eta = \text{const}$ был постоянным.

Таким образом, приходим к задаче интегрирования уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности κ

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.3)$$

Согласно (2.3), скважине в плоскости xy с дебитом Q в пространстве $\xi = r$, $\eta = z$ соответствует круговая нить источников с дебитом $Q_{\xi\eta} = 2\pi Q$.

Приходим, таким образом, к рассмотренной выше в п. 2, 3 задаче, но уже для уравнения теплопроводности (4.3).

Решение аналогичной тепловой задачи для случая круговой нити, из которой мгновенно выделяется тепло, приведено в [8]. Применяя формулу Дюамеля для той же тепловой задачи при непрерывно действующем источнике с дебитом $Q_{\xi\eta}$, получим

$$T(r, z) = \frac{Q_{\xi\eta}}{\rho c 8\pi^{3/2} \kappa^{3/2}} \int_0^t \exp \left[-\frac{r_0^2 + r^2 + z^2}{4\kappa(t-\tau)} \right] I_0 \left[\frac{r_0 r}{2\kappa(t-\tau)} \right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \quad (4.4)$$

Здесь $T(r, z)$ — температура; r_0 — радиус кольцевой нити, непрерывно выделяющей тепло, расположенной в плоскости $\eta = z = 0$; I_0 — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента; ρ , c — плотность и теплоемкость. В теории теплопроводности, как известно, $\kappa = \lambda / \rho c$, где λ — коэффициент теплопроводности.

Для уравнения (4.3), если под p подразумевать температуру, проекции вектора теплового потока в пространстве $\xi = r$, $\eta = z$ должны вычисляться для значения $\lambda = 1$, что соответствует $\rho c = 1 / \kappa$. При этом, согласно формуле (4.4), которую перепишем уже для нашей фильтрационной задачи, получим, учитывая (2.3),

$$\begin{aligned} p(r, z) &= \frac{Q_{\xi\eta}}{8\pi^{3/2} \kappa^{3/2}} \int_0^t \exp \left(-\frac{r_0^2 + r^2 + z^2}{4\kappa\tau} \right) I_0 \left(\frac{r_0 r}{2\kappa\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} = \\ &= \frac{Q}{4\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \exp \left(-\frac{r_0^2 + r^2 + z^2}{4\kappa\tau} \right) I_0 \left(\frac{r_0 r}{2\kappa\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Заменой

$$1/2 r_0 r / \kappa \tau = u^2 \quad (4.6)$$

формула (4.5) приводится к виду

$$p(r, z) = (Q / 2\pi\sigma_0) \Phi \quad (4.7)$$

где, учитывая (4.2) и (1.3), безразмерная функция Φ имеет вид

$$\Phi = \sqrt{2\pi\sigma_0} / \sigma \Psi(\varphi, \beta) \quad (4.8)$$

$$\Psi(\varphi, \beta) = \int_{\varphi}^{\infty} \exp[-(1+\beta)u^2] I_0(u^2) du \quad (4.9)$$

$$\varphi = \left\{ \frac{\sigma\sigma_0}{2\kappa t} \left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1} \right\}^{1/2}; \quad \beta = \frac{(\sigma - \sigma_0)^2 + \eta^2(x, y)}{2\sigma_0\sigma} \quad (4.10)$$

$$\sigma_0 = \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma = \sigma(xy), \quad \kappa_0 = \kappa(x_0, y_0) = (kK / m\mu)_{x_0, y_0} \quad (4.11)$$

Здесь κ — коэффициент пьезопроводности в месте проводки скважины.

Квадратная скобка в (4.10) — квадрат модуля скорости фиктивного потока с потенциалом σ , который можно, как указывалось выше, найти по карте изолиний $\sigma = \text{const}$,

$$[(\partial\sigma / \partial x)^2 + (\partial\sigma / \partial y)^2] \approx (\Delta\sigma / \Delta n)^2 \quad (4.12)$$

Здесь n — направление нормали к $\sigma = \text{const}$.

Интеграл (4.9) в общем случае может быть определен только численно. Для облегчения вычисления можно пользоваться таблицами произведения $e^{-x} I_0(x)$, приведенными в [9].

При $\varphi \geq 3$ можно воспользоваться асимптотическим представлением $I_0(x) \approx (2\pi x)^{-1/2} e^x$, что дает

$$\Psi(\varphi, \beta) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\beta\varphi^2}^{\infty} \frac{\exp(-v)}{v} dv = \frac{-\text{Ei}(-\beta\varphi^2)}{2\sqrt{2\pi}} \quad \text{при } \varphi \geq 3, \quad (4.13)$$

Таблицы $-\text{Ei}(-x)$ приведены, например, в [10].

При $\varphi \leq 3$ интеграл (4.9) можно представить в виде

$$\int_{\varphi}^{\infty} = \int_{\varphi}^3 + \int_3^{\infty} \quad (4.14)$$

Первый интеграл в (4.14) вычисляется без затруднений при помощи таблиц функций e^{-x} и $I_0(x)$. Второй может быть определен по формуле (4.13).

Заметим, что параметр β , согласно (4.10), вблизи скважины имеет следующее значение:

$$\beta = \frac{(\sigma - \sigma_0)^2 + \eta^2}{2\sigma_0\sigma} = \frac{(r - r_0)^2 + z^2}{2r_0r} = \frac{\rho^2}{2r_0r} \quad (4.15)$$

Здесь ρ — расстояние в пространстве $\xi = \sigma = r, \eta = z$ от точки r, z до круговой нити источников. Как указывалось выше, для скважины достаточно малого радиуса r^0 основной плоскости xy имеет место соотношение

$$\rho = r^0 \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{x_0, y_0} = r^0 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}_{x_0, y_0} \approx r^0 \left(\frac{\Delta \sigma}{\Delta n} \right)_{x_0, y_0} \quad (4.16)$$

Таким образом, при вычислении изменения забойного давления, согласно (4.15) и (4.10), где полагаем $\sigma = \sigma_0$, для β и φ можно пользоваться формулами

$$\beta = \frac{r^{02}}{2\sigma_0^2} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right]_{x_0, y_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{r^0}{\sigma_0} \left| \frac{d\xi}{dz} \right| \right]_{x_0, y_0}^2 \quad (4.17)$$

$$\varphi = \left\{ \frac{\sigma_0^2}{2\kappa t} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right]_{x_0, y_0}^{-1} \right\}^{1/2} \quad (4.18)$$

$$\beta\varphi^2 = \frac{r^{02}}{4\kappa t} = \frac{r^{02}}{4\kappa(x_0, y_0)t} \quad (4.19)$$

$$\Phi = \sqrt{2\pi} \Psi(\varphi, \beta) \quad (4.20)$$

$$\Phi = \Phi(\beta, \varphi) \rightarrow \Phi(\beta) = \sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} \exp-(1 + \beta)u^2 I_0(u^2) du = \sqrt{2\pi} \Psi(0, \beta), \quad t \rightarrow \infty \quad (4.21)$$

Интересно сравнить формулы (4.21) и (2.12), так как, вообще говоря, забойное давление пущенной с постоянным дебитом скважины должно стремиться к пределу, соответствующему стационарному течению. При этом следует помнить, что формула (4.21) получена интегрированием приближенного уравнения (4.3), в котором коэффициент κ был принят постоянным, в то время как в действительности он переменный.

Учитывая (4.17), представим формулу (2.12) в виде

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \frac{p^0}{Q/2\pi\sigma_0} = \ln \frac{8\sigma_0}{r^0 \left| d\xi/dz \right|_{x_0, y_0}} = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sigma_0}{r^0 \left| d\xi/dz \right|_{x_0, y_0}} \right]^2 = \\ &= \ln 8 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\beta} + 1.73 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Сравним теперь формулы (4.22) и (4.21) для малых значений β , имея в виду (4.13) и (4.14) для малых $\beta \ll 1$

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{2\pi} \int_0^3 e^{-\beta u^2} e^{-u^2} I_0(u^2) du + \sqrt{2\pi} \int_3^\infty e^{-(1+\beta)u^2} I_0(u^2) du \approx \\ &\approx \sqrt{2\pi} \left[\left(1 - \frac{9\beta}{2}\right) \int_0^3 e^{-u^2} I_0(u^2) du + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{9\beta}^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv \right] = \\ &= \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{9\beta}{2}\right) \int_0^3 e^{-u^2} I_0(u^2) du + \frac{1}{2} \int_{9\beta}^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv \end{aligned}$$

Грубое графическое вычисление первого интеграла дает значение ~ 1.2 ; отсюда, пользуясь представлением для малых x , имеем

$$\begin{aligned} -\text{Ei}(-x) &\approx \ln \frac{1}{x} - 0.577, & \Phi &\approx \sqrt{2\pi} (1 - 4.5\beta) \cdot 1.2 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{9\beta} - 0.577 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} \ln 9 - \frac{0.577}{2} + 3.01(1 - 4.5\beta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\beta} + 1.626 - 13.5\beta \quad (4.23) \end{aligned}$$

Величина β , как видно из (4.17), зависит от степени изменения параметра проводимости $\sigma = kh/\mu$ вдоль площади.

Пусть, например, $r^0 = 0.1$ м, $k_0 = 1$ дарси, $h_0 = h = 10$ м = 1000 см, $\mu = 1$ сн (вода). В этом случае, согласно (1.3), имеем $\sigma_0 = 10$ дарси·м/сн.

Пусть, далее, в направлении быстрейшего изменения σ на расстоянии 100 м от скважины параметр σ соответственно равен

$$15 \frac{\text{дарси} \cdot \text{м}}{\text{сн}}, \quad 5 \frac{\text{дарси} \cdot \text{м}}{\text{сн}}, \quad \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{x_0, y_0} \approx \frac{\Delta\sigma}{\Delta n} = \frac{5 \text{ дарси} \cdot \text{м}}{100 \text{ см} \cdot \text{м}}$$

Для этого примера

$$\begin{aligned} \frac{r^0}{\sigma_0} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{x_0, y_0} &= \frac{0.1 \cdot 0.05}{10} = 5 \cdot 10^{-4}, & \beta &= \frac{25 \cdot 10^{-8}}{2} = 12.5 \cdot 10^{-8} \\ \frac{1}{\beta} &= 8 \cdot 10^6, & \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\beta} &= 7.94 \end{aligned}$$

По формуле (4.23) имеем $\Phi^* \approx 7.94 + 1.626 - 13.5 \cdot 12.5 \cdot 10^{-8} = 9.57$; это достаточно близко к установившемуся значению $\Phi^* = 9.67$, которое получается по формуле (4.22).

5. Метод определения параметров пласта по карте изобар. Укажем в заключение один из возможных способов определения параметра проводимости $\sigma(x, y)$ и $A(x, y)$ по карте изобар, известной на данный момент неустановившегося (в общем случае) или установившегося течения¹.

Согласно уравнениям (1.1) или (1.2), можно поставить задачу определения $\sigma(x, y)$ и $A(x, y)$, предполагая давления $p(x, y, t)$ или $p(x, y)$ известными. Эта задача, как сводящаяся к уравнению первого порядка относительно σ , естественно, более простая, нежели рассмотренные выше.

Уравнение (1.2) можно представить в виде

$$A \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial t} - A\sigma \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (5.1)$$

чему соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A \partial p / \partial x} = \frac{dy}{A \partial p / \partial y} = \frac{d\sigma}{\partial p / \partial t - A\sigma \nabla^2 p} \quad (5.2)$$

¹ Основное содержание этого параграфа было сообщено на семинаре по подземной гидрогазодинамике во Всесоюзном н.-и. нефтегазовом ин-те (ВНИИ) осенью 1965 г.

Первое уравнение (5.2) можно представить в виде

$$\frac{dx}{A \partial p / \partial x} = \frac{dy}{A \partial p / \partial y} = \frac{dn}{A \operatorname{grad} p} = \frac{ds}{A \partial p / \partial s} \quad (5.3)$$

Здесь dn — направление вектора $\operatorname{grad} p$, s — произвольное направление. Из (5.2) и (5.3) получаем

$$\frac{d\sigma}{\partial p / \partial t - A \sigma \nabla^2 p} = \frac{ds}{A \partial p / \partial s}, \quad \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\nabla^2 p}{\partial p / \partial s} \sigma = \frac{\partial p / \partial t}{A \partial p / \partial s} \quad (5.4)$$

Так как по условию $p(s, t)$ считается известным, то (5.4) — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для $\sigma(s)$, решение которого имеет вид

$$\sigma = \sigma(s) = \exp \left[- \int_{s_0}^s \frac{\nabla^2 p}{\partial p / \partial s} ds \right] \left\{ \int_{s_0}^s \frac{\partial p / \partial t}{A \partial p / \partial s} \exp \left[\int_{s_0}^s \frac{\nabla^2 p}{\partial p / \partial s} ds \right] ds + \sigma_0 \right\} \quad (5.5)$$

Здесь σ_0 — значение в точке s_0 .

Если $A = A(s)$ известно, то из (5.5) можно найти $\sigma(s)$ непосредственно.

Уменьшение погрешности, возникающей при вычислении $\nabla^2 p$ по карте изобар, может быть уменьшено, если представить, как предложено В. И. Мароном, $\nabla^2 p$ в виде

$$\nabla^2 p = \operatorname{div} \operatorname{grad} p \approx \frac{1}{\Delta f} \oint \operatorname{grad} p \, dl \cos \varphi \quad (5.6)$$

Здесь Δf — площадь элементарной ячейки сетки течения, числитель в (5.6) — поток вектора — градиента давления через замкнутый контур, образованный сторонами ячейки. При установившемся течении, что проверяется сравнением карт изобар на разные даты, формула (5.5) соответственно упрощается.

При нашем рассмотрении считается, что параметры σ и A не должны зависеть от времени. Это обстоятельство позволяет поступить еще следующим образом: дифференцируя (5.4) по t , получим, замечая, что $\partial^2 \sigma / \partial s \partial t = 0$,

$$A \sigma = \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p / \partial t}{\partial p / \partial s} \right) \left/ \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\nabla^2 p}{\partial p / \partial s} \right) \right.$$

или

$$A \sigma = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial s} \right) \left/ \left(\frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 p - \nabla^2 p \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial s} \right) \right. \quad (5.7)$$

После того как параметр $A \sigma$ найден из (5.7), $\sigma(s)$ можно найти, вернувшись к (5.4), которое можно представить в виде

$$A \sigma \frac{d \ln \sigma}{ds} + A \sigma \frac{\nabla^2 p}{\partial p / \partial s} = \frac{\partial p / \partial t}{\partial p / \partial s} \quad (5.8)$$

Разумеется, чем надежнее построена карта изобар, тем точнее будет определение σ и A указанным выше методом.

Контролем может служить степень постоянства значений σ и A , вычисленных для различных моментов времени t .

Поступило 17 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в однородной пористой среде (перев. с англ.). Гостоптехиздат, 1949.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
3. Голубева О. В. О комплексном потенциале и комплексной скорости течений в искривленных пленках переменной толщины. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Крупской, 1959, т. 75, Тр. каф. теор. физ., вып. 4.
4. Быстров К. Н. О течениях в искривленных слоях с изотермическим законом изменения толщины. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Крупской, 1959, т. 75, Тр. каф. теор. физ., вып. 4.
5. Быстров К. Н. О двумерных установившихся течениях жидкости в слое с экспоненциально изменяющейся толщиной, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Крупской, 1959, т. 75, Тр. каф. теор. физ., вып. 4.

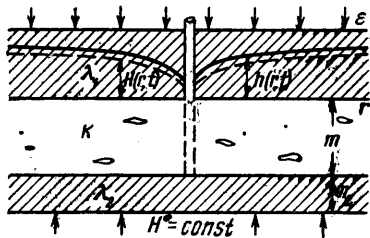
6. Юрисов В. А. Метагармоническое семейство слоев. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Крупской, 1964, т. 142, Тр. каф. теор. физ., вып. 5.
7. Салехов Г. С. К определению давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. Изв. Казанск. фил. АН СССР. сер. физ.-матем. и техн. наук, 1956, вып. № 9.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел (перев. с англ.). Изд-во «Наука», 1964.
9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. II (перев. с англ.). Изд. иностр. лит., 1949.
10. Таблицы интегральной показательной функции, матем. таблицы, Ин-т точн. мех. и вычисл. техн. АН СССР, 1964.

О Понижении уровня грунтовых вод в покровной толще двуслойного пласта, создаваемом откачкой из нижележащего напорного горизонта

А. БЕГМАТОВ (Ташкент)

Задачу притока к скважине в двуслойном пласте с непроницаемой подошвой при жестком режиме рассматривал В. М. Шестаков [1], а при упругом режиме — Ф. М. Бочевер [2]. В этих работах предполагается, что коэффициент фильтрации верхней толщи, в которой имеется свободная поверхность, намного меньше нижнего основного пласта и что откачка ведется из последнего. Тогда, следуя Н. Н. Веригину, пренебрегается горизонтальными скоростями в верхнем слое.

Ниже эта задача рассматривается при более общей постановке, причем, наряду с точным решением линеаризованной системы уравнений, дается приближенное выражение для определения понижений в верхнем слое, имеющих место при малых и больших значениях времени t .



Фиг. 1

При сделанных выше предположениях для определения ординаты свободной поверхности $h(r, t)$ в покровной толще и пьезометрического напора $H(r, t)$ нижнего пласта (фиг. 1) имеем систему

$$\begin{aligned} \mu_+ \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\lambda_1}{h} (H - h) + \varepsilon \\ \mu_- \frac{\partial H}{\partial t} &= km\Delta H - \frac{\lambda_1}{h} (H - h) - \frac{\lambda_2}{m_2} (H - H^0) \\ \mu_- &= \gamma m \beta \quad \left(\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь μ_+ — коэффициент водоотдачи верхнего слоя; λ_1, λ_2, k — коэффициенты фильтрации соответствующих пластов; β — коэффициент упругости по В. Н. Шелкачеву [3]; γ — удельный вес; ε — постоянная интенсивность инфильтрации; m и m_2 — мощности напорного пласта и нижележащей прослойки соответственно.

Для линеаризации системы (1), прибегнем к осреднению множителя $1/h$ перед $(H - h)$. Так, полагая $1/h \approx 1/m_1$, вместо (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= b_1 (H - h) + q, & \frac{\partial H}{\partial t} &= \kappa \Delta H - \beta_1 (H - h) - \beta_2 (H - H^0) \\ b_1 &= \frac{\lambda_1}{\mu_+ m_1}, & \beta_1 &= \frac{\lambda_1}{\mu_- m_1}, & \beta_2 &= \frac{\lambda_2}{\mu_- m_2}, & \kappa &= \frac{km}{\mu_-}, & q &= \frac{\varepsilon}{\mu_+} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь m_1 — некоторое постоянное среднее значение $h(r, t)$. Решим эту систему при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} h(r, 0) &= h_0, & H(r, 0) &= H_0, & 2\pi km (r \partial H / \partial r)_{r=0} &= Q = \text{const} \\ h(r, t) &< \infty, & H(r, t) &< \infty & \text{при } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3)$$