

не: $a \sim 2 \cdot 10^{-18} - 5 \cdot 10^{-15}$. Положим $l = 200$ м, $Q_j = Q^0$, причем средний расход жидкости определяется по заданному среднему за период перепаду давления между галереями $\Delta p^0 = p^0(0) - p^0(l)$ из (3.6). На фиг. 2 представлена типичная зависимость безразмерной амплитуды перепада давлений между средами $P^0 = P / \Delta p^0$ от безразмерной координаты $x^0 = x / l$ при разных значениях фазы ε_2 ($\varepsilon_1 = 0$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-15}$, $T = 1$ сутки), а на фиг. 3 изображены распределения по длине пласта функций $\langle s_j \rangle$, связанных с осредненными по периоду значениями насыщенностей сред вытесняющей жидкостью $\langle \sigma_j \rangle$ соотношениями (4.1), в зависимости от числа циклов ($\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \pi$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-15}$, $T = 1$ сутки, $P^0 = 9,24 \cdot 10^{-3}$, $s^0(t) = 1 - \exp(-t/T)$, $\langle s_1 \rangle$ — пунктир, $\langle s_2 \rangle$ — сплошные).

Отметим следующее обстоятельство: несмотря на изменение коэффициента обмена α в широком диапазоне (в тысячу раз), произведение αP , определяющее интенсивность обмена жидкостями между средами, изменяется в узком диапазоне (в полтора — два раза). Физически это объясняется тем, что α и P меняются в противоположные стороны: чем меньше гидродинамическая связь между средами разной проницаемости, тем больше перепад давлений между ними, и наоборот. Этот вывод полезен в практических приложениях. Расчеты показывают, что с ростом T амплитуда P сначала возрастает, а затем практически становится постоянной, вследствие чего выбор слишком больших значений T нецелесообразен, так как это может привести к излишнему удлинению общего времени циклического процесса.

Авторы благодарят В. Л. Данилова за ценные указания при выполнении данной работы и Г. И. Баренблатта за ее обсуждение.

Поступило 24 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых краевых задачах теории фильтрации жидкости в трещиноватых породах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
4. Рыжик В. М. Вытеснение нефти водой в пористой среде с малопроницаемыми включениями. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 1.
5. Боксерман А. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
6. Баренблатт Г. И. О движении газожидкостных смесей в трещиновато-пористых породах. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 3.
7. Кутляров В. С. Конвективная диффузия в трещиновато-пористых средах. ПМТФ, 1967, № 1.
8. Гурса Э. Курс математического анализа, т. III, ч. I. Гостехиздат, 1933.
9. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджаниянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостоптехиздат, 1962.

О ПЛОСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С ПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПРЕНИЦАЕМОСТЬЮ ВДОЛЬ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. В. ГОЛУБЕВА, А. Я. ШПИЛЕВОЙ

(Москва)

1. Плоские фильтрационные течения жидкости или газа в среде, проницаемость которой k меняется скачком (k_1, k_2) вдоль кривой L (фиг. 1), описываются комплексными потенциалами $w_1(z), w_2(z)$, действительные и мнимые части которых на L должны удовлетворять соотношениям [1]:

$$\left[\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} \right]_L, \quad \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right]_L, \quad [\psi_1 = \psi_2]_L, \quad \left[\frac{1}{k_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \frac{1}{k_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right]_L \quad (1.1)$$

где n — нормаль к кривой L .

2. Пусть L представляет собой параболу (фиг. 1), уравнение которой

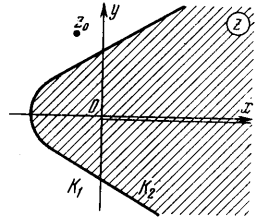
$$y^2 = 4l^2(x + l^2) \tag{2.1}$$

где l произвольно.

Положим для определенности, что все особые точки течения располагаются в области k_1 (далее будет указано, что последнее предположение не принципиально). Течение описывается комплексными потенциалами $w_1(z)$, $w_2(z)$ соответственно в областях k_1 и k_2 .

Рассмотрим одновременно два листа, каждый из которых представляет собой плоскость z . Пусть течения на обоих листах одинаковы (w_1, w_2). Последнее позволяет разрезать листы по любой кривой и произвольным образом склеить их вдоль линий разреза, не изменяя и не нарушая картину течения на листах. Произведем разрез вдоль положительной полуоси x на каждом из листов. Затем склеим верхний берег разреза первого листа с нижним берегом разреза второго листа и нижний берег разреза первого листа с верхним берегом разреза второго листа. Получится двулистная риманова поверхность. Применим конформное преобразование вида

$$z = z_1^2 \tag{2.2}$$



Фиг. 1

Как известно [2], функция (2.2) отображает плоскость z_1 (фиг. 2) на двулистную риманову поверхность, совпадающую с построенной z .

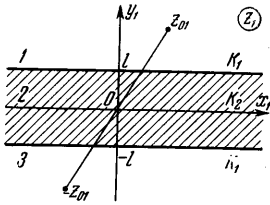
Течению на листах римановой поверхности z будет соответствовать определенное течение на плоскости z_1 . Коэффициент проницаемости k_2 на z_1 будет соответствовать полосе

$$-l < y_1 < l \tag{2.3}$$

Особые точки течения, заданные на z , без изменения своего характера переходят в особые точки на z_1 , которые будут располагаться в областях 1 и 3. Причем точке z_0 первого листа соответствует точка z_{01} области 1, а точке z_0 второго листа соответствует точка $-z_{01}$ области 3, симметричная точке z_{01} относительно начала координат.

Пусть $f(z_1) = f_1(z_1) + f_2(z_1)$ характеризует течение, вызванное в однородной среде особыми точками плоскости z_1 . При этом все особые точки функции $f_1(z_1)$ располагаются в области 1, а все особые точки функции $f_2(z_1)$ — в области 3. Тогда в неоднородной

среде (фиг. 2) течение в областях 1, 2 и 3 будет описываться комплексными потенциалами вида [3]



Фиг. 2

$$w_1(z_1) = f_1(z_1) - \lambda \bar{f}_1(z_1 - 2li) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} (1 - \lambda^2) \bar{f}_1 \times [z_1 + (4k - 2)li] + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} (1 - \lambda^2) f_2(z_1 + 4kli)$$

$$w_2(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} (1 + \lambda) [f_1(z_1 - 4kli) + f_2(z_1 + 4kli)] + \tag{2.4}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} (1 + \lambda) \{ \bar{f}_1 [z_1 + (4k - 2)li] + \bar{f}_2 [z_1 - (4k - 2)li] \}$$

$$w_3(z_1) = f_2(z_1) - \lambda \bar{f}_2(z_1 + 2li) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} (1 - \lambda^2) \bar{f}_2 [z_1 - (4k - 2)li] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} (1 - \lambda^2) f_1(z_1 - 4kli) \quad \left(\lambda = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \right)$$

Непосредственные вычисления позволяют убедиться в справедливости граничных условий (1.1) вдоль $y_1 = \pm l$ на плоскости z_1 .

Перейдем от переменных плоскости z_1 к переменным плоскости z . Из (2.2) следует

$$z_1 = \pm \sqrt{z} \tag{2.5}$$

Взяв (2.5) со знаком плюс и подставляя в $w_1(z_1)$ и $w_2(z_1)$, определим комплексные потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ течения на первом листе римановой поверхности. Подставляя (2.5) со знаком минус в $w_1(z_1)$ и $w_2(z_1)$, получим комплексные потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ течения на втором листе римановой поверхности.

Потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ описывают течение на плоскости z при L , определяемой формулой (2.1).

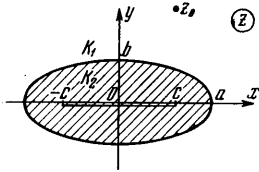
Так как имеют место формулы типа (2.4), описывающие течения на плоскости z_1 при расположении особых точек и внутри полосы [3] $-l < y_1 < l$, то можно построить течение на плоскости z с особыми точками, расположенными в областях k_1 и k_2 .

В качестве примера рассмотрим в точке z_0 области k_1 купочно-однородной среды плоскости z точечный источник, комплексный потенциал которого для однородной среды имеет вид

$$f(z) = (q / 2\pi) \ln(z - z_0) \tag{2.6}$$

Для определения комплексных потенциалов $w_1(z)$ и $w_2(z)$ необходимо знать $f(z_1) = f_1(z_1) + f_2(z_1)$. Подставив (2.2) в (2.6), имеем

$$f(z_1) = (q / 2\pi) \ln(z_1 - z_{01}) + (q / 2\pi) \ln(z_1 + z_{01}) \tag{2.7}$$



Фиг. 3

Подставляя $f_1(z_1)$ и $f_2(z_1)$ из (2.7) в выражения (2.4) и произведя замену z_1 на z , определим комплексные потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ течения точечного источника в неоднородной среде (Фиг. 1).

3. Пусть L представляет собой эллипс (фиг. 3), уравнение которого

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1 \tag{3.1}$$

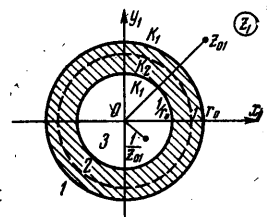
Предположим, что все особые точки течения располагаются в области k_1 и течение описывается комплексными потенциалами $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Так же, как и в предыдущем случае, рассмотрим два листа z с одинаковыми течениями, описываемыми комплексными потенциалами $w_1(z)$ и $w_2(z)$. На каждом из листов сделаем разрез вдоль отрезка $-c \leq x \leq c$, где точки c и $-c$ — фокусы эллипса.

Затем склеим верхний берег разреза первого листа с нижним берегом разреза второго листа, и наоборот. Получится двулистная риманова поверхность z , картина течения на листах которой осталась неизменной. Рассмотрим конформное отображение вида

$$z = 1/2c(z_1 + z_1^{-1}) \tag{3.2}$$

Функция (3.2) отображает плоскость z_1 на риманову поверхность листов z [2]. При этом внешняя область круга единичного радиуса плоскости z_1 отображается на первый лист z с разрезом, а внутренняя область — на второй лист z с разрезом. Эллипсу (3.1) первого листа на плоскости z_1 соответствует окружность радиуса r_0 ($r_0 > 1$), а эллипсу (3.1) второго листа на плоскости z_1 — окружность $r_1 = 1 / r_0$ (фиг. 4). Между r_0 и полуосями эллипса a и b существует связь вида

$$r_0^2 = (a + b) / (a - b) \tag{3.3}$$



Фиг. 4

На плоскости z_1 проницаемость k_2 соответствует области 2 (фиг. 4). Области 1 и 3 имеют одинаковую проницаемость, равную k_1 . Особые точки течения, заданные на z , без изменения своего характера переходят в особые точки на z_1 , которые будут располагаться в областях 1 и 3. При этом точке z_0 первого листа соответствует точка z_{01} области 1, а точке z_0 второго листа — точка $1 / z_{01}$ (фиг. 4).

Пусть $f(z_1) = f_1(z_1) + f_2(z_1)$ характеризует течение, вызванное в однородной среде особыми точками плоскости z_1 . Причем все особые точки функции $f_1(z_1)$ располагаются в области 1, а все особые точки функции $f_2(z_1)$ — в области 3.

Тогда в неоднородной среде (фиг. 4) течение в областях 1, 2 и 3 будет описываться комплексными потенциалами вида [3]

$$\begin{aligned}
 w_1(z_1) &= f_1(z_1) - \lambda \bar{f}_1\left(\frac{r_0^2}{z_1}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} (1 - \lambda^2) \bar{f}_1\left(\frac{1}{r_0^{4k-2} z_1}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} (1 - \lambda^2) f_2(r_0^{4k} z_1) \\
 w_2(z_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} (1 + \lambda) \left[f_1\left(\frac{z_1}{r_0^{4k}}\right) + f_2(r_0^{4k} z_1) \right] + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} (1 + \lambda) \left[\bar{f}_1\left(\frac{1}{r_0^{4k-2} z_1}\right) + \bar{f}_2\left(\frac{r_0^{4k-2}}{z_1}\right) \right] \\
 w_3(z_1) &= f_2(z_1) - \lambda \bar{f}_2\left(\frac{1}{r_0^2 z_1}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} (1 - \lambda^2) \bar{f}_2\left(\frac{r_0^{4k-2}}{z_1}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} (1 - \lambda^2) f_1\left(\frac{z_1}{r_0^{4k}}\right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в справедливости граничных условий (1.1) вдоль окружностей r_0 и $1/r_0$.

Перейдем от переменных плоскости z_1 к переменным плоскости z . Для этого в (3.4) заменим z_1 через z . Из (3.2) следует

$$z_1 = z/c \pm \sqrt{(z/c)^2 - 1} \tag{3.5}$$

Так же, как и в предыдущем случае, после подстановки (3.5) со знаком плюс в $w_1(z_1)$ и в $w_2(z_1)$ получаем комплексные потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ течения на первом листе. Подстановка (3.5), взятого со знаком минус, в $w_3(z_1)$ и $w_2(z_1)$ дает комплексные потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ течения на втором листе. Потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ описывают течение на плоскости z при L , определяемой формулой (3.1).

Так как имеют место формулы типа (3.4), описывающие течения на плоскости z_1 при расположении особых точек и в области 2 [3], то можно построить течение на плоскости z с особыми точками, расположенными в областях k_1 и k_2 .

В качестве примера в неоднородной среде (фиг. 3) рассмотрим поступательный поток, комплексный потенциал которого для однородной среды имеет вид

$$f(z) = v_0 e^{-\alpha i z} \tag{3.6}$$

Определим потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Подставив (3.2) в (3.6), имеем

$$f(z_1) = f_1(z_1) + f_2(z_1) = \frac{1}{2} v_0 c e^{-\alpha i z_1} + \frac{1}{2} v_0 c e^{-\alpha i z_1^{-1}} \tag{3.7}$$

Подставляя $f_1(z_1)$ и $f_2(z_1)$ в выражения (3.4) и производя замену z_1 на z , определяем комплексные потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ поступательного потока в заданной неоднородной среде. Причем $w_2(z)$ будет вида

$$w_2(z) = \frac{v_0(1 + \lambda)r_0^2}{r_0^4 - \lambda^2} [r_0^2 e^{-\alpha i} + \lambda e^{\alpha i}] z \tag{3.8}$$

Следовательно, во внутренней области эллипса поток остается поступательным. Направление его совпадает с направлением скорости в бесконечности только для случая, когда $\alpha = \frac{1}{2} k\pi$ ($k = 0, 1, \dots$). В остальных случаях направление потока в области с проницаемостью k_2 отклоняется от направления скорости в бесконечности.

4. Пусть L представляет собой правую ветвь гиперболы (фиг. 5),

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \tag{4.1}$$

Предположим, что все особые точки течения располагаются в области k_1 . Комплексные потенциалы течения в областях k_1 и k_2 соответственно будут $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Снова будем рассматривать одинаковые течения на двух листах плоскости z , которые разрежем вдоль отрезка $-c \leq x \leq c$, соединяющего фокусы гиперболы (фиг. 5), и склеим. Как и в предыдущем случае, отобразим конформно двулистную риманову поверхность z на плоскость z_1 при помощи функции (3.2). Тогда область римановой поверхности с проницаемостью k_2 перейдет на z_1 в область, ограниченную двумя симметричными относительно оси x_1 лучами (фиг. 6).

Веллчина угла между лучами, ограничивающими область k_2 , равна α , причем

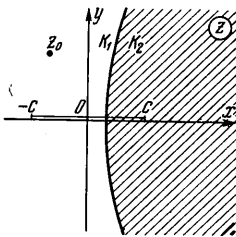
$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} b/a \quad (4.2)$$

Особые точки z_0 римановой поверхности z при конформном отображении (3.2) переходят в точки z_{01} и $1/z_{01}$, расположенные в области k_1 плоскости z_1 (фиг. 6).

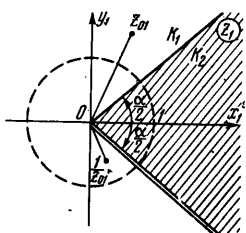
Будем рассматривать бесконечное число листов плоскости z_1 , обладающих одинаковыми течениями с комплексными потенциалами $w_1(z_1)$ и $w_2(z_1)$. Разрежем все эти листы вдоль луча $\theta = -1/2 \alpha$ (фиг. 6) и склеим последовательно. Получится бесконечнолистная риманова поверхность z_1 . Преобразуя конформно риманову поверхность z_1 на плоскость z_2 при помощи функции

$$z_1 = e^{(z_2 - 1/2)\alpha i} \quad (4.3)$$

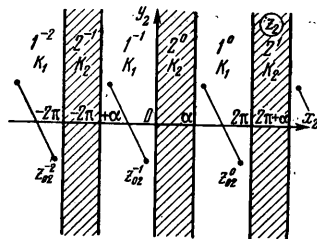
получим течение на плоскости z_2 , разделенной полосами, параллельными оси y_2 (фиг. 7). Ширина каждой из полос 1^j ($j = 0, \pm 1, \dots$) с проницаемостью k_1 равна $2\pi - \alpha$, а ширина каждой из полос 2^j (фиг. 7) с проницаемостью k_2 равна α . Особые точки z_{01} римановой поверхности z_1 перейдут при конформном отображении в осо-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

бые точки плоскости z_2 с координатами $z_{02}^j = z_{02}^0 + 2j\pi$ (фиг. 7). Точки $1/z_{01}$ римановой поверхности z_1 перейдут в точки областей 1^j и будут располагаться в верхней полуплоскости z_2 , как указано на фиг. 7. Пусть

$$w(z_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(z_2 + 2k\pi) \quad (4.4)$$

описывает течение в однородной среде с указанными особыми точками (фиг. 7). Кроме того, пусть

$$\alpha = (m/n)2\pi \quad (4.5)$$

где m и n — натуральные числа и $\alpha < \pi$. Тогда, согласно исследованиям Шпилевого, в неоднородной среде (фиг. 7) плоскости z_2 течение описывается комплексными потенциалами вида

а) при $n = 3, 5, 7, \dots$

(4.6)

$$\begin{aligned} w_1^j(z_2) = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(z_2 + 2k\pi) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{m,n} f\left(z_2 - 2\pi - \frac{2k\pi}{n} - 2\pi j\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{m,n} f\left(z_2 + 2\pi + \frac{2k\pi}{n} - 2\pi j\right) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{m,n} \bar{f}\left(4\pi + \frac{2k\pi}{n} + 2\pi j - z_2\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{m,n} \bar{f}\left(2\alpha - \frac{2k\pi}{n} + 2\pi j - z_2\right) \\ w_2^j(z_2) = & \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{m,n} \Gamma f\left(z_2 - \frac{2k\pi}{n} - 2\pi j\right) + f\left(z_2 + 2\pi + \frac{2k\pi}{n} - 2\pi j\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{m,n} \left[\bar{f}\left(2\pi + 2\alpha + \frac{2k\pi}{n} + 2\pi j - z_2\right) + \bar{f}\left(2\pi j - \frac{2k\pi}{n} - z_2\right) \right] \end{aligned}$$

Коэффициенты A_k^{mn*} , B_k^{mn} , a_k^{mn} , b_k^{mn} определяются из соотношений

$$\begin{aligned}
 a_0^{mn} &= 1 + \lambda, & B_0^{mn} &= -\lambda, & a_k^{mn} &= B_k^{mn} = 0 & \text{при } k=1, \dots, (2m-1) \\
 B_{k+2m}^{mn} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda} (a_{k+2m}^{mn} + b_k^{mn}) & & & & \text{при } k=0, 1, \dots, (n-2m-1) \\
 B_{k+2m}^{mn} &= -a_{k+2m}^{mn} + b_k^{mn} \\
 A_k^{mn} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda} (a_k^{mn} + b_k^{mn}) & & & & \text{при } k=0, 1, \dots, (n-2m-1) \\
 -A_k^{mn} &= -a_k^{mn} + b_k^{mn} \\
 A_k^{mn} + B_{k+n}^{mn} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda} (a_{k+n}^{mn} + b_{k+n-2m}^{mn}) & & & & \text{при } k=0, 1, \dots \quad (4,7) \\
 -A_k^{mn} + B_{k+n}^{mn} &= -a_{k+n}^{mn} + b_{k+n-2m}^{mn} \\
 A_{k+n-2m}^{mn} + B_k^{mn} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda} (a_{k+n-2m}^{mn} + b_{k+n-2m}^{mn}) & & & & \text{при } k=0, 1, \dots \\
 -A_{k+n-2m}^{mn} + B_k^{mn} &= -a_{k+n-2m}^{mn} + b_{k+n-2m}^{mn} \\
 A_k^{mn*} &= A_k^{mn} & & & & \text{при } k \neq k_1n \quad \text{при } k_1=0, 1, \dots \\
 A_k^{mn*} &= A_k^{mn} - 1 & & & & \text{при } k = k_1n
 \end{aligned}$$

б) при $n = 2, 4, 6, \dots$ комплексные потенциалы $w_1^j(z_2)$ и $w_2^j(z_2)$ получаются из (4.6) заменой выражений $2k\pi/n$ выражениями $4k\pi/n$. Соотношения для коэффициентов получаются из соотношений (4.7) путем замены m и n на $1/2 m$ и $1/2 n$ (при этом верхние индексы коэффициентов остаются без изменения).

Непосредственными вычислениями проверяется выполнение граничных условий (1.1) на прямых $x = 2\pi j + a$ и $x = 2\pi j$.

Возвращаясь к плоскости z , при помощи преобразований (3.2) и (4.3) найдем комплексные потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$ течения, которое определяется особыми точками $f(z)$.

Если особые точки $f(z)$ расположены в областях k_1 и k_2 , то это не изменит рассматриваемой задачи и приведет только к некоторому усложнению формул (4.6).

5. В заключение следует заметить, что использование многолистных римановых поверхностей для построения произвольных фильтрационных течений в кусочно-однородных грунтах может быть распространено для некоторых границ L более широкого класса, чем кривые второго порядка.

Поступило 17 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О. В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд-во «Наука», 1965.
3. Костицина Л. И. К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно-однородной пористой среде. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской, Тр. каф. теор. физ., 1966, т. 164, вып. 6.