

ОТРАЖЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИ ПРЯМОГО УГЛА

В. В. ПРОКОФЬЕВ

(Москва)

Пусть плоская ударная волна движется в покоящемся невязком совершенном газе (с параметрами ρ_0 , p_0 , S_0 перед волной и параметрами ρ_1 , p_1 , V , S_1 за волной) и встречает препятствие в виде прямого угла, одна из граней которого параллельна фронту волны (фиг. 1). Отраженная волна достаточно далеко вправо от вершины угла будет тоже плоской и газодинамические параметры за ней (ρ_2 , p_2 , $u_2 = 0$, S_2) просто определяются из соотношений на скачке.

Найдем течение между отраженной волной и стенкой угла в возмущенной области (между осью y и фронтом волны разрежения, идущей от вершины угла вдоль оси x вправо).

Рассматриваемое течение описывается уравнениями

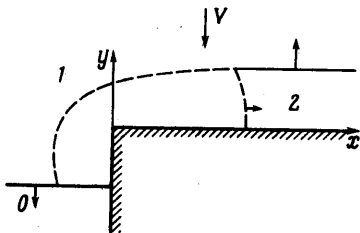
$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho m^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m^2}{2} + w \right) \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m^2}{2} + w \right) \rho v &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} + \frac{\partial \rho v S}{\partial y} = 0 \\ m^2 = u^2 + v^2, \quad e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad S = \frac{p^{1/\gamma}}{\rho} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь γ — показатель адиабаты Пуассона.

Для решения этой нестационарной задачи используем метод интегральных соотношений, развитый Г. Г. Черным [1] для случая стационарного трехмерного течения с ударными волнами. Вместо y введем переменную $\zeta = 2y/h - 1$; здесь $h(x, t)$ — толщина слоя газа под отраженной ударной волной. Когда y меняется от 0 до h , величина ζ меняется от -1 до $+1$. Умножим уравнения системы (1) почленно на полином Лежандра n -го порядка $P_n(\zeta)$ и проинтегрируем уравнения по ζ от -1 до $+1$. Одновременно предположим, что газодинамические функции разложены по полиномам Лежандра.

Из полученных уравнений и условия обтекания стенки ($v = 0$ при $y = 0$ или $\zeta = -1$) определяются коэффициенты этого разложения (зависящие от x и y). Ограничимся рассмотрением уравнений при $n = 0$ ($P_0 = 1$). Из условий на твердой стенке имеем $v_0 = 0$ (v_0 — коэффициент при P_0 в разложении v по полиномам Лежандра).

Газодинамические параметры при $\zeta = +1$ ($y = h$) можно выразить при помощи соотношений на ударной волне через параметры перед



Фиг. 1

отраженной волной. В эти соотношения войдут также производные $\partial h / \partial x$ и $\partial h / \partial t$. В результате указанных преобразований получается система уравнений для коэффициентов разложения (индекс 0 опущен)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho h + \frac{\partial}{\partial x} \rho u h - \rho_1 \left(V + \frac{\partial h}{\partial t} \right) &= 0 \\ \rho h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho_1 u \left(V + \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (p - p_1) h &= 0 \\ \rho_1 u \frac{\partial h}{\partial x} + p h \frac{\partial u}{\partial x} + \rho h \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} \right) - \rho_1 \left(V + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \times \\ &\times \left(\frac{V^2 + u^2}{2} + e_1 - e \right) - p_1 V = 0 \\ \rho h \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} \right) &= \rho_1 \left(V + \frac{\partial h}{\partial t} \right) (S_h - S) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ρ , h , u , p , S — функции от x и t ; S_h — значение энтропии при $y = h$ выражается через параметры перед ударной волной и через $\partial h / \partial x$ и $\partial h / \partial t$. В условие задачи не входят ни характерная длина, ни характерное время, поэтому функции должны зависеть только от x/t .

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{Vt}, \quad R = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad P = \frac{p}{\rho_1 V^2}, \quad H = \frac{h}{Vt}, \quad \sigma = \frac{S}{S_1}, \quad U = \frac{u}{V}$$

В результате получим систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} H(U - \xi) \frac{dR}{d\xi} + [\xi + R(U - \xi)] \frac{dH}{d\xi} + RH \frac{dU}{d\xi} &= 1 + H - RH \\ \mu \gamma \sigma^\gamma R^{\gamma-1} \frac{dR}{d\xi} + (\mu \sigma^\gamma R^\gamma - \mu - U\xi) \frac{dH}{d\xi} + RH(U - \xi) \frac{dU}{d\xi} + \\ &+ \mu \gamma \sigma^{\gamma-1} R^\gamma \frac{d\sigma}{d\xi} = -U(1 + H) \\ \mu H \sigma^\gamma R^\gamma (U - \xi) \frac{dR}{d\xi} + \left[\mu U + \xi \left(\frac{1 + U^2}{2} + \frac{\mu}{\gamma - 1} - \frac{\mu}{\gamma - 1} \sigma^\gamma R^{\gamma-1} \right) \right] \times \\ &\times \frac{dH}{d\xi} + \mu H R^\gamma \sigma^\gamma \frac{dU}{d\xi} + \frac{\mu \gamma}{\gamma - 1} H R^\gamma \sigma^{\gamma-1} (U - \xi) \frac{d\sigma}{d\xi} = (1 + H) \times \\ &\times \left(\frac{1 + U^2}{2} + \frac{\mu}{\gamma - 1} - \frac{\mu}{\gamma - 1} \sigma^\gamma R^{\gamma-1} \right) + \\ &+ \mu (Z - \sigma) \xi \frac{dH}{d\xi} + (U - \xi) RH \frac{d\sigma}{d\xi} = (1 + H) (Z - \sigma) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mu = \frac{[(\gamma - 1)M^2 + 2][2\gamma M^2 - \gamma + 1]}{4\gamma(M^2 - 1)^2}$$

$$Z = \frac{S_h}{S_1} = \left[\frac{2(1 + H - \xi dH/d\xi)^2 - \mu(\gamma - 1)[1 + (dH/d\xi)^2]}{\mu(\gamma + 1)[1 + (dH/d\xi)^2]} \right]^{1/\gamma} \times$$

$$\times \frac{(\gamma - 1)(1 + H - \xi dH/d\xi)^2 + 2\mu\gamma[1 + (dH/d\xi)^2]}{(\gamma + 1)(1 + H - \xi dH/d\xi)^2}$$

Здесь M — число Маха падающей волны. Безразмерное давление заменено через энтропию и плотность по формуле $P = \mu \sigma^\gamma R^\gamma$. Так как на фронте волны разрежения газодинамические параметры непрерывны, то начальные условия для системы (3) будут (a_2 — скорость звука в области 2, фиг. 1)

$$\xi = \xi_0 = \frac{a_2}{V} = \frac{\sqrt{(3\gamma - 1)M^2 - 2\gamma + 2}[2(\gamma - 1)M^2 - \gamma + 3]}{2(M^2 - 1)},$$

$$H = \frac{2(\gamma - 1)M^2 - \gamma + 3}{2(M^2 - 1)}, \quad U = 0, \quad R = \frac{2\gamma M^2 - \gamma + 1}{2(\gamma - 1)M^2 - \gamma + 3}$$

$$\sigma = \left[\frac{(3\gamma - 1)M^2 - 2\gamma + 2}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \right]^{1/\gamma} \frac{2(\gamma - 1)M^2 - \gamma + 3}{2\gamma M^2 - \gamma + 1} \quad (4)$$

Начальная точка $\xi = \xi_0$ — особая, и через нее проходит однопараметрическое семейство кривых, удовлетворяющих условиям

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{R}{\xi} \frac{dU}{d\xi} \quad \frac{dH}{d\xi} = \frac{d\sigma}{d\xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_0$$

Неоднозначность решения устраняется условием на другом конце интервала. Примем, что в точке $\xi = 0$ достигается скорость звука, т. е.

$$U^2 = \mu \gamma R^{\gamma-1} \sigma^\gamma$$

В этом случае производные $dR/d\xi$ и $dU/d\xi$ обращаются в бесконечность.

Интегрирование системы (3) выполнялось численным методом на ЭВМ. Нужная кривая определялась путем подбора параметра (в качестве которого бралось значение $dU/d\xi$ при $\xi = \xi_0$), для которого удовлетворяется условие при $\xi = 0$. При решении был использован метод Рунге — Кутты четвертого порядка точности, а также метод итераций для разрешения последнего уравнения системы (3), трансцендентного относительно производной $dH/d\xi$.

Ниже для различных значений ξ приведены U, R, H, σ, P при $\gamma = 1.4$ (фиг. 2—4).

Для $M = 2$, в предположении изэнтропичности течения

$\xi = 0$	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1	ξ_0
$-U = 0.946$	0.631	0.522	0.387	0.254	0.161	0.093	0.043	0
$R = 1.202$	1.485	1.583	1.717	1.863	1.988	2.091	2.175	2.25
$H = 0.564$	0.640	0.679	0.732	0.773	0.792	0.798	0.800	0.8

Для $M = 2$, без предположения изэнтропичности течения

$-U = 0.842$	0.625	0.521	0.391	0.251	0.162	0.095	0.045	0
$R = 1.490$	1.694	1.781	1.879	1.984	2.057	2.119	2.180	2.25
$H = 0.475$	0.534	0.571	0.627	0.701	0.747	0.777	0.793	0.8
$\sigma = 1.019$	1.021	1.024	1.029	1.037	1.043	1.047	1.049	1.05
$P = 1.407$	1.674	1.790	1.944	2.120	2.247	2.354	2.457	2.571

Для $M = 10$, в предположении, что $\sigma = \text{const}$

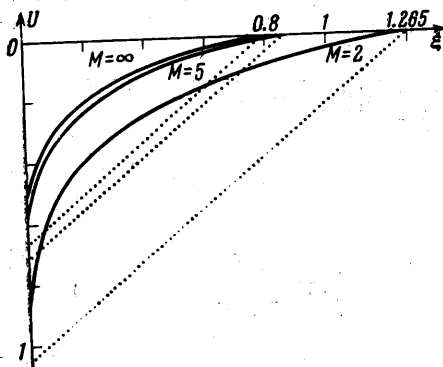
$-U = 0.530$	0.370	0.301	0.203	0.100	0.040	—	—	0
$R = 1.883$	2.299	2.466	2.711	3.035	3.260	—	—	3.426
$H = 0.330$	0.361	0.378	0.397	0.410	0.412	—	—	0.412

Для $M = 10$, без упомянутого выше предположения

$-U = 0.604$	0.397	0.306	0.211	0.102	0.043	—	—	0
$R = 2.443$	2.894	3.018	3.113	3.216	3.302	—	—	3.426
$H = 0.224$	0.262	0.291	0.328	0.375	0.401	—	—	0.412
$\sigma = 1.147$	1.164	1.179	1.198	1.222	1.236	—	—	1.242
$P = 0.905$	1.172	1.265	1.350	1.455	1.533	—	—	1.624

Величина ξ_0 для $M = 2, 5, 10, \infty$ равна соответственно 1.265, 0.862, 0.815, 0.8.

На фиг. 2—4 сплошными линиями нанесены кривые для случая неэнтروпического течения, штрихованными — графики функций, вычисленных в предположении постоянства энтропии. Для сравнения на фиг. 2 и 3 пунктиром нанесены кривые, полученные в предположении, что течение в рассматриваемой области одномерно и изэнтропично, т. е. для решения в виде волны Римана.



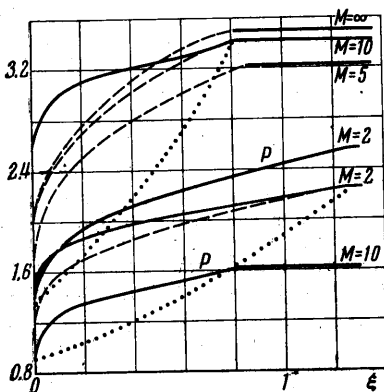
Фиг. 2

На фиг. 2 изображен график функции $U(\xi)$ для различных чисел Маха при $\sigma = \text{const}$. Соответствующие кривые для неэнтропического течения очень мало отличаются от изображенных на фиг. 2. Из приведенных выше численных данных видно, что значения $U(\xi)$ в соответствующих точках для $M = 2$ отличаются меньше, чем на 0.005 (за исключением окрестности точки $\xi = 0$).

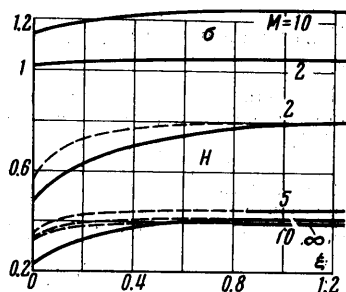
Из сравнения графиков функций $U(\xi)$ и $R(\xi)$ для решения в виде волны Римана с соответствующими кривыми, изображенными на фиг. 2 и 3, видно, что приближение волны Римана для рассматриваемой

задачи неприемлемо.

На фиг. 4 показаны графики $H(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ для различных чисел Маха. Изменение σ тем больше, чем больше интенсивность падающей волны. Различие между соответствующими кривыми при $\sigma = \text{const}$ и $\sigma \neq \text{const}$ увеличивается с ростом числа Маха падающей волны.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 представлен также график $P(\xi)$ при переменной энтропии.

Автор выражает благодарность Г. Г. Черному за постоянное внимание к работе.

Поступило 1 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Плоское крыло в гиперзвуковом потоке. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 4.