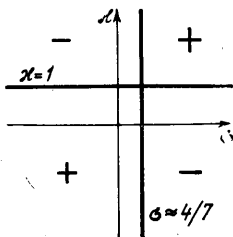


ности, для капельной жидкости, содержащей пузырьки газа, при достаточно малых  $\omega$ , когда верна формула (9),  $\Delta s$  больше нуля ( $\kappa \gg 1$ ,  $\sigma \gg 1$ ). Для водонефтяных смесей в зависимости от того, какой жидкости в системе больше, имеем  $\sigma > 1$ ,  $\kappa < 1$  или  $\sigma < 1$ ,  $\kappa > 1$ . Поэтому, как правило, для таких систем  $\Delta s < 0$ , что согласуется с результатами экспериментов. Исключение представляет случай эмульсии капель воды в маловязкой нефти, когда  $\kappa > 1$ , но может быть  $4/7 \leq \sigma < 1$ . При фильтрации азровзвеси коэффициент скольжения  $\delta \ll 1$  и условие  $\rho_0 \ll \delta(1 - \rho_0)$  выполняется лишь для крайне малых  $\rho_0$ . Поэтому вообще говоря, нужно использовать соотношения (8) и (9). Если, однако, рассматривается фильтрация взвеси капель достаточно вязкой жидкости в газе весьма малой вязкости, имеется область  $\rho_0$ , где одновременно выполняются неравенства  $\rho_0 \ll 1$  и  $\rho_0 \gg \delta(1 - \rho_0)$ . Для этой области из (9) получим (считаем  $\kappa \ll 1$ ,  $\sigma \ll 1$ )



Фиг. 2

В этой области, в соответствии с кривыми фиг. 1, величины  $s^+$  и  $s^-$  убывают с ростом  $\rho_0$ , кроме того,  $\Delta s > 0$ .

Развитые представления применимы при  $\rho_0 \ll 1$ . С увеличением  $\rho_0$  становится неправомерным предположение о независимости отдельных вкраплений, а кроме того, нарушается описанная картина течения. При больших  $\rho_0$  удобнее, по-видимому, ввести  $k_t$  и использовать уравнения (1).

Автор благодарен А. Х. Мирзаджанзаде, обратившему внимание автора на рассмотренную задачу.

Поступило 27 IX 66

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. Изд. «Мир», 1964.
2. Бережной Н. М., Мамедов Ю. Г., Садых-заде Э. С., Самедов Т. А. О механизме фильтрации газоконденсатных систем. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, 1966, № 1.
3. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. Гостоптехиздат, 1960.

### О ЦИКЛИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ПЛАСТЫ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ

А. А. БОКСЕРМАН, Б. В. ШАЛИМОВ

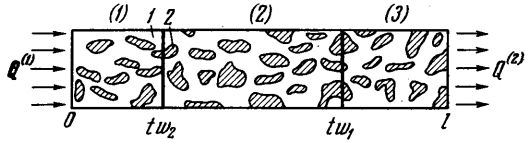
(Москва)

При заводнении неоднородных пластов нагнетаемая вода внедряется в более проницаемые части пластов, оставляя не охваченными заводнением менее проницаемые участки. Если пласты сложены породами, избирательно лучше смачивающимися водой, и указанные участки имеют большую поверхность соприкосновения, то между ними возникает обмен жидкостями под действием капиллярных сил: вода из водонасыщенных участков с высокой проницаемостью будет впитываться в нефтенасыщенные участки с малой проницаемостью, вытесняя из них нефть. Однако процессы капиллярной пропитки происходят обычно очень медленно. Поэтому заводнение неоднородных пластов, особенно трещиновато-пористых, нередко характеризуется невысокими значениями нефтеотдачи.

Для достижения более полного извлечения нефти из малопроницаемых участков в последнее время разрабатываются так называемые циклические методы воздействия на пласты: на границах пластов создаются периодические колебания давлений или расходов. Вследствие различия амплитуд и фаз колебаний в высоко- и малопроницаемых участках возникает перепад давлений между этими участками. Это приводит к непрерывному обмену жидкостями между участками разной проницаемости. В период повышения давления в пласте возникает градиент давления в сторону малопроницаемых участков, в результате чего процесс капиллярного впитывания воды в нефтенасыщенные участки усиливается действием гидродинамических сил. В период снижения пластового давления направление гидродинамического градиента давления меняется, и внедрившаяся в малопроницаемые участки вода вместе с нефтью получает возможность обратного перетока в высокопроницаемые участки.

Вследствие гидрофильных свойств породы пласта часть внедрившейся воды капиллярно удерживается в малопроницаемых участках. Непрерывный характер такого обмена жидкостями при циклическом воздействии на пласты приводит к тому, что распространяющаяся по высокопроницаемым участкам вода постепенно замещает нефть в малопроницаемых участках, в результате чего эффективность вытеснения нефти водой из неоднородных пластов повышается.

Изучение фильтрации жидкостей при циклических воздействиях на пласт связано с рассмотрением совместного влияния гидродинамических, упругих и капиллярных сил и неоднородности среды. В дальнейшем неоднородная среда моделируется средой с двойной пористостью.



Фиг. 1

Делается существенное предположение, что время одного цикла, характерные размеры малопроницаемых участков и их характеристики смачиваемости обеспечивают сравнительно равномерное распределение внедряющейся воды по всему объему малопроницаемых участков.

В работах Г. И. Баренблатта и Ю. П. Желтова [1-3] развит новый подход к описанию фильтрации однородной жидкости в средах с двойной пористостью, который затем был применен к исследованию процесса капиллярной пропитки [4, 5], движения газожидкостных систем [6] и смешивающихся жидкостей [7] в таких средах. В данной работе этот подход используется для изучения течения несмешивающихся жидкостей при циклическом воздействии на пласты с двойной пористостью.

1. Рассмотрим совместное течение двух несмешивающихся сжимаемых жидкостей в двухкомпонентной среде, состоящей из участков с пористостями  $m_1$  и  $m_2$  и проницаемостями  $k_1$  и  $k_2$ , причем  $k_1 \gg k_2$  (фиг. 1). Доли объемов, занимаемые каждой из компонент среды в элементарном макрообъеме, обозначим  $n_1$  и  $n_2$  ( $n_1 + n_2 = 1$ ). В соответствии с общей теоретической схемой фильтрации, в средах с двойной пористостью [1-3], введем в рассмотрение в каждой точке сплошной среды два давления  $p_i$ , четыре скорости фильтрации  $V_i^{(j)}$  и четыре насыщенности  $\sigma_i^{(j)}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Нижний индекс  $i$  относится к разным средам:  $i = 1$  — к высокопроницаемой и  $i = 2$  — к малопроницаемой; верхний индекс  $j$  относится к разным жидкостям:  $j = 1$  — к смачивающей и  $j = 2$  — к несмачивающей. Насыщенность  $\sigma_i^{(j)}$  выражает относительное содержание  $j$ -й жидкости в поровом объеме  $i$ -й среды ( $\sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)} = 1$ ).

Уравнение сохранения массы при движении  $j$ -й жидкости в  $i$ -й среде имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i n_i \rho^{(j)} \sigma_i^{(j)}) + \text{div}(n_i \rho^{(j)} V_i^{(j)}) = (-1)^i \rho^{(j)} q^{(j)} \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.1)$$

Примем, что движение  $j$ -й жидкости в  $i$ -й среде подчиняется обобщенному закону Дарси, причем различием давлений в несмачивающей и смачивающей жидкостях в средах за счет капиллярного скачка пренебрежем

$$V_i^{(j)} = - \frac{k_i}{\mu^{(j)}} f_i^{(j)}(\sigma_i) \text{grad } p_i \quad (\sigma_i = \sigma_i^{(1)}) \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho^{(j)}$  и  $\mu^{(j)}$  — плотность и вязкость  $j$ -й жидкости,  $f_i^{(j)}(\sigma_i)$  — относительная проницаемость  $j$ -й жидкости в  $i$ -й среде,  $q^{(j)}$  — объем  $j$ -й жидкости, перетекающей за единицу времени из среды 1 в среду 2 в единице объема двухкомпонентной среды.

Обмен жидкостями между средами обусловлен разностью гидродинамических давлений жидкостей в них. Для оценки интенсивности такого обмена при фильтрации однородной сжимаемой жидкости в работах [1-3] предложено выражение

$$q_0 = \alpha \mu^{-1} (p_1 - p_2) \quad (1.3)$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — средние давления жидкости в каждой среде в окрестности данной точки,  $\alpha$  — безразмерная характеристика интенсивности обмена жидкостью между средами.

Соотношение (1.3) можно обобщить на случай фильтрации двух несмешивающихся жидкостей. Общий объем обеих жидкостей, перетекающий из одной среды в другую, будет определяться гидродинамическим сопротивлением малопроницаемой среды, независимо от того, происходит перетекание жидкости из малопроницаемой среды в высокопроницаемую, или наоборот. Объемная доля данной жидкости в общем объеме жидкостей, участвующем в перетоке, будет определяться относительным содержанием этой жидкости в среде, из которой она вытекает. Исходя из

этих соображений, в дальнейшем для перетоков жидкостей, обусловленных гидродинамическим перепадом давлений между компонентами среды с двойной пористостью, принимаются следующие выражения:

$$q^{(j)} = \alpha(p_1 - p_2)H^{(j)}(\text{sgn}(p_1 - p_2)) \left( \frac{F_2^{(1)}(\sigma_2)}{\mu^{(1)}} + \frac{F_2^{(2)}(\sigma_2)}{\mu^{(2)}} \right) \quad (1.4)$$

$$H^{(j)}(\text{sgn}(p_1 - p_2)) = \frac{F_1^{(j)}(\sigma_1)}{\mu^{(j)}} \left( \frac{F_1^{(1)}(\sigma_1)}{\mu^{(1)}} + \frac{F_1^{(2)}(\sigma_1)}{\mu^{(2)}} \right)^{-1} \quad (p_1 - p_2 \geq 0) \quad (1.5)$$

$$H^{(j)}(\text{sgn}(p_1 - p_2)) = \frac{F_2^{(j)}(\sigma_2)}{\mu^{(j)}} \left( \frac{F_2^{(1)}(\sigma_2)}{\mu^{(1)}} + \frac{F_2^{(2)}(\sigma_2)}{\mu^{(2)}} \right)^{-1} \quad (p_1 - p_2 \leq 0)$$

Здесь  $F_i^{(j)}(\sigma_i)$  — некоторые функции насыщенностей, аналогичные относительным проницаемостям для жидкостей при фильтрации в однородных пористых средах. Подобные функции введены Г. И. Баренблатом [6] при описании течений газожидкостных смесей в средах с двойной пористостью. Функции  $F_i^{(j)}(\sigma_i)$  должны определяться экспериментально, наряду с относительными проницаемостями  $f_i^{(j)}(\sigma_i)$ . Таким образом, в данной постановке капиллярные явления учитываются косвенно, самим видом зависимостей  $f_i^{(j)}(\sigma_i)$  и  $F_i^{(j)}(\sigma_i)$ , которые должны отражать факт взаимного торможения жидкостей при их совместном движении<sup>1</sup>.

2. Для оценки эффективности циклического воздействия на пласты с двойной пористостью при вытеснении одной жидкости другой пренебрежем различием вязкостей и плотностей жидкостей  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu$ ,  $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho$ . Относительные проницаемости жидкостей в каждой среде и функции насыщенностей, определяющие доли жидкостей в суммарном объеме, участвующем в обмене между средами, приближенно аппроксимируем следующим образом:

$$f_i^{(1)}(\sigma_i) = F_i^{(1)}(\sigma_i) = s_i, \quad f_i^{(2)}(\sigma_i) = F_i^{(2)}(\sigma_i) = 1 - s_i$$

$$s_i(\sigma_i) = \begin{cases} 0 & (0 \leq \sigma_i \leq \sigma_i') \\ (\sigma_i - \sigma_i')(\sigma_i'' - \sigma_i')^{-1} & (\sigma_i' \leq \sigma_i \leq \sigma_i'') \\ 1 & (\sigma_i'' \leq \sigma_i \leq 1) \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $\sigma_i'$  и  $1 - \sigma_i''$  — предельные значения «связанных» насыщенностей сред смачивающей и несмачивающей жидкостями. Считаем, что жидкости и среды малосжимаемые, причем объемная доля пор  $i$ -й среды зависит только от давления в этой среде

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_0(p - p_0)], \quad m_i' = m_{i0}' + \beta_i'(p - p_{i0})$$

$$(m_i' = m_i n_i, \quad k_i' = k_i n_i) \quad (2.2)$$

Из соотношений (1.1) — (1.5) с учетом (2.1) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_i n_i) + \text{div}(\rho n_i \mathbf{V}_i) = (-1)^i \rho q_0 \quad (2.3)$$

$$m_i n_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + n_i (s_i - \sigma_i) \text{div} \mathbf{V}_i + n_i \mathbf{V}_i \text{grad} s_i = (-1)^i q_0 \begin{cases} s_1 - \sigma_i & (p_1 \geq p_2) \\ s_2 - \sigma_i & (p_1 \leq p_2) \end{cases} \quad (2.4)$$

$$q_0 = \alpha \mu^{-1} (p_1 - p_2), \quad \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i^{(1)} + \mathbf{V}_i^{(2)} = -k_i \mu^{-1} \text{grad} p_i \quad (2.5)$$

Подставляя в уравнения (2.3) выражения (2.2) и (2.5) и отбрасывая малые высшего порядка, приходим к системе уравнений Баренблата — Желтова для определения полей давлений в высоко- и малопроницаемой средах [1, 2]

$$\frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} - \Delta p_i = (-1)^i v_i (p_1 - p_2) \quad (i = 1, 2) \quad (2.6)$$

$$\kappa_i = k_i' [\mu (\beta_i' + \beta_0 m_{i0}')]^{-1}, \quad v_i = \alpha / k_i'$$

Поля насыщенностей сред вытесняющей жидкостью определяются из системы уравнений (2.4).

<sup>1</sup> Дополнительный переток жидкостей, обусловленный капиллярной пропиткой малопроницаемой среды, если она гидрофильна, смачивающей жидкостью из высокопроницаемой среды можно учесть в полном соответствии с работой В. М. Рыжика [4].

Оценки показывают, что по истечении нескольких циклов после начала циклического воздействия на пласт изменения во времени давлений  $p_i$  в средах, а следовательно  $q_0$  и  $V_i$ , примут форму установившихся периодических колебаний, которые описываются решением уравнений (2.6) при соответствующих граничных условиях, и соотношениями, получающимися на основании этого решения из (2.5). Вид правых частей уравнений (2.4) для насыщенностей  $\sigma_i$  различен в зависимости от знака разности давлений в средах и меняется в течение каждого цикла. За один цикл насыщенности  $\sigma_i$  обычно меняются мало, и для достижения существенного эффекта вытеснения число циклов должно быть велико, что приводит к необходимости сопряжения большого числа решений системы (2.4).

Медленным характером изменения во времени насыщенностей  $\sigma_i$ , по сравнению с изменениями «быстрых» переменных  $q_0$  и  $V_i$ , воспользуемся для упрощения уравнений (2.4), для чего осредним все переменные по интервалу времени, равному продолжительности цикла. Введем средние за время цикла насыщенности и отклонения насыщенностей на интервале осреднения от средних значений

$$\langle \sigma_i(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-1/2T}^{1/2T} \sigma_i(\mathbf{r}, t + \tau) d\tau \quad (\mathbf{r} = (x, y, z))$$

$$\sigma_i(\mathbf{r}, t + \tau) = \langle \sigma_i(\mathbf{r}, t) \rangle + \Delta \sigma_i(\mathbf{r}, t + \tau) \quad (-1/2T \leq \tau \leq 1/2T) \quad (2.7)$$

Также вводятся средние значения и отклонения от средних значений на интервале осреднения для других функций времени. Ввиду периодичности давлений  $p_i$  их средние значения не зависят от времени и удовлетворяют стационарным уравнениям (2.6), из которых следует, что  $\langle p_i(\mathbf{r}) \rangle \equiv \langle p_2(\mathbf{r}) \rangle$ . Поэтому

$$\langle q_0(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv 0, \quad \text{div} \langle \mathbf{V}_i \rangle \equiv 0 \quad (2.8)$$

Осреднение (2.7) аналогично используемому в теории турбулентности. Заменяем в уравнениях (2.4) аргумент  $t$  функций времени на  $t + \tau$ , разложим функции времени на средние значения и отклонения от средних значений, пренебрежем малыми добавками  $\Delta \sigma_i$  по сравнению с  $\langle \sigma_i \rangle$  и применим затем ко всем членам уравнений операцию осреднения. С учетом (2.8) и известных свойств осреднения получим

$$m_i n_i \frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial t} + n_i \langle \mathbf{V}_i \rangle \text{grad} \langle \sigma_i \rangle = (-1)^i \delta (\langle s_1 \rangle - \langle s_2 \rangle) \quad (2.9)$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2T} \int_{-1/2T}^{1/2T} |q_0(\mathbf{r}, t + \tau)| d\tau \quad (2.10)$$

3. Рассмотрим одномерную фильтрацию в пласте постоянной мощности  $h$ . На галереях заданы объемные расходы жидкостей по обеим средам, меняющиеся во времени по гармоническому закону (произвольный периодический закон при достаточном общем предположении сводится к сумме таких гармоник), причем закачка и отбор жидкостей на галереях осуществляются при одинаковых в обеих средах значениях давлений ( $l$  — расстояние между галереями)

$$-\left( c_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \right)_{x=0} = Q^{(1)}(t), \quad -\left( c_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \right)_{x=l} = Q^{(2)}(t), \quad \left( c_j = \frac{hk_j'}{\mu} \right) \quad (3.1)$$

$$p_1(0, t) = p_2(0, t), \quad p_1(l, t) = p_2(l, t) \quad (3.2)$$

$$Q^{(j)}(t) = Q^0 + Q_j \cos(\omega t + \varepsilon_j) \quad (\omega = 2\pi/T) \quad (3.3)$$

Здесь  $T$  — период цикла,  $\omega$  — циклическая частота,  $\varepsilon_j$  — начальные фазы,  $Q_j$  — амплитуды,  $Q^0$  — среднее за период значение расхода.

Установившиеся колебания давлений в средах описываются решением уравнений (2.6) вида

$$p_j(x, t) = p^0(x) + P_j(x) \cos[\omega t + \vartheta_j(x)] \quad (3.4)$$

$$q_0(x, t) = \alpha \mu^{-1} P(x) \cos[\omega t + \vartheta(x)] \quad (3.5)$$

$$p^0(x) = p^0(0) - x l^{-1} [p^0(0) - p^0(l)], \quad Q^0 = l^{-1} (c_1 + c_2) [p^0(0) - p^0(l)] \quad (3.6)$$

$$P_j(x) = \sqrt{a_j^2(x) + b_j^2(x)}, \quad P(x) = \sqrt{[a_1(x) - a_2(x)]^2 + [b_1(x) - b_2(x)]^2} \quad (3.7)$$

$$\text{tg } \vartheta_j(x) = b_j(x) / a_j(x), \quad \text{tg } \vartheta(x) = [b_1(x) - b_2(x)] [a_1(x) - a_2(x)]^{-1} \quad (3.8)$$

Функции  $a_j(x)$  и  $b_j(x)$  задаются соотношениями ( $i$  — мнимая единица)

$$X_j(x) = a_j(x) + ib_j(x) \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=1}^2 \left\| \begin{array}{cc} \operatorname{ch} x \lambda_j & \operatorname{ch}(l-x) \lambda_j \\ \gamma_j \operatorname{ch} x \lambda_j & \gamma_j \operatorname{ch}(l-x) \lambda_j \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} A_j + iB_j \\ C_j + iD_j \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X_1(x) \\ X_2(x) \end{array} \right\| \quad (3.10)$$

$$\lambda_{1,2} = \left\{ \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{i\omega}{2} \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \pm \sqrt{\left[ \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{i\omega}{2} \left( \frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} \right) \right]^2 + v_1 v_2} \right\}^{1/2} \quad (3.11)$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{v_1} \left\{ \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{i\omega}{2} \left( \frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} \right) \mp \sqrt{\left[ \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{i\omega}{2} \left( \frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} \right) \right]^2 + v_1 v_2} \right\}^{1/2}$$

Вещественные постоянные  $A_j, B_j, C_j, D_j$  определяются из условий

$$X_1(0) = X_2(0), \quad X_1(l) = X_2(l) \quad (3.12)$$

$$- \{c_1 X_1'(0) + c_2 X_2'(0)\} = Q_1 e^{i\epsilon_1}, \quad - \{c_1 X_1'(l) + c_2 X_2'(l)\} = Q_2 e^{i\epsilon_2} \quad (3.13)$$

4. Благодаря обмену жидкостями между средами, возникающему при периодических колебаниях давлений в них, происходит постепенное замещение содержащейся в малопроницаемой среде жидкости другой, распространяющейся по высокопроницаемой среде. В естественных пластовых условиях начальные насыщенности сред вытесняющей жидкостью равны связанным значениям  $\sigma_j(x, 0) = \sigma_j'$ . В зоне, охватываемой процессом вытеснения, вследствие проникновения вытесняющей жидкости по высокопроницаемой среде и обмена жидкостями между средами, вытесняющая жидкость становится подвижной в обеих средах:  $\sigma_j' \leq \sigma_j \leq \sigma_j''$  ( $j = 1, 2$ ). Осредненные за время цикла насыщенности сред вытесняющей жидкостью  $\langle \sigma_j \rangle$  в этой зоне в одномерном случае удовлетворяют, согласно (2.1), (2.9), (2.10) и (3.5), системе уравнений

$$\langle \sigma_j(x, t) \rangle = \sigma_j' + (\sigma_j'' - \sigma_j') \langle s_j(x, t) \rangle \quad (4.1)$$

$$m_j^\circ \frac{\partial \langle s_j \rangle}{\partial t} + v_j^\circ \frac{\partial \langle s_j \rangle}{\partial x} = (-1)^j \delta(x) (\langle s_1 \rangle - \langle s_2 \rangle) \quad (4.2)$$

$$m_j^\circ = m_j n_j (\sigma_j'' - \sigma_j'), \quad v_j^\circ = \frac{c_j}{c_1 + c_2} \frac{Q^\circ}{h}, \quad \delta(x) = \frac{a}{\pi \mu} P(x) \quad (4.3)$$

Начальные и граничные условия следующие:

$$\langle s_j(x, 0) \rangle = 0, \quad \langle s_j(0, t) \rangle = s_j^\circ(t) \leq 1 \quad (s_j^\circ(0) = 0) \quad (4.4)$$

С практической точки зрения, особый интерес представляет случай, когда  $\delta(x) = \text{const}$ , что соответствует равномерному охвату циклическим воздействием всей зоны пласта. Расчеты показывают, что такие режимы можно осуществлять за счет надлежащего выбора продолжительности цикла. В дальнейшем примем для простоты, что  $\delta(x) = \delta^\circ = \text{const}$ .

При помощи новых неизвестных функций  $y_j(x, t)$  и новых переменных  $\xi, \eta$ , вводимых по формулам

$$\begin{aligned} \langle s_j(x, t) \rangle &= y_j(x, t) \exp \{ \gamma^\circ [(m_1^\circ - m_2^\circ) x - (v_1^\circ - v_2^\circ) t] \} \\ \xi &= t - x/w_1, \quad \eta = t - x/w_2, \quad w_j = v_j^\circ / m_j^\circ \\ \gamma^\circ &= \delta^\circ [m_1^\circ m_2^\circ (w_1 - w_2)]^{-1}, \quad \gamma = \gamma^\circ \sqrt{v_1^\circ v_2^\circ} \end{aligned} \quad (4.5)$$

представим уравнения (4.2) в иной форме

$$\partial y_2 / \partial \xi = \gamma y_1 \sqrt{v_1^\circ / v_2^\circ}, \quad \partial y_1 / \partial \eta = -\gamma y_2 \sqrt{v_2^\circ / v_1^\circ} \quad (4.6)$$

Следовательно, каждая из искомым функций удовлетворяет телеграфному уравнению

$$\partial^2 y_j / \partial \xi \partial \eta + \gamma^2 y_j = 0 \quad (4.7)$$

Решение уравнений (4.7) с условиями (4.4) по методу Римана [8] приводит к следующим выражениям для искомых функций  $\langle s_j \rangle$  (для определенности принято  $w_1 \geq w_2$ ;  $I_0$  и  $I_1$  — бesselевы функции мнимого аргумента):

а) при  $0 < x < tw_2$  (4.8)

$$\langle s_1(x, t) \rangle = s_1^\circ(\xi) \exp\left(-\frac{x\delta^\circ}{v_1^\circ}\right) + \int_{\eta}^{\xi} \exp\{-\gamma^\circ[(\xi - \tau)v_1^\circ + (\tau - \eta)v_2^\circ]\} \times \\ \times \left\{ \gamma^\circ v_2^\circ s_2^\circ(\tau) I_0(z) + \gamma s_1^\circ(\tau) \left(\frac{\tau - \eta}{\xi - \tau}\right)^{1/2} I_1(z) \right\} d\tau$$

$$\langle s_2(x, t) \rangle = s_2^\circ(\eta) \exp\left(-\frac{x\delta^\circ}{v_2^\circ}\right) + \int_{\eta}^{\xi} \exp\{-\gamma^\circ[(\xi - \tau)v_1^\circ + (\tau - \eta)v_2^\circ]\} \times \\ \times \left\{ \gamma^\circ v_1^\circ s_1^\circ(\tau) I_0(z) + \gamma s_2^\circ(\tau) \left(\frac{\xi - \tau}{\tau - \eta}\right)^{1/2} I_1(z) \right\} d\tau$$

б) при  $tw_2 < x < tw_1$  (4.9)

$$\langle s_1(x, t) \rangle = s_1^\circ(\xi) \exp\left(-\frac{x\delta^\circ}{v_1^\circ}\right) + \int_0^{\xi} \exp\{-\gamma^\circ[(\xi - \tau)v_1^\circ + (\tau - \eta)v_2^\circ]\} \times \\ \times \left\{ \gamma^\circ v_2^\circ s_2^\circ(\tau) I_0(z) + \gamma s_1^\circ(\tau) \left(\frac{\tau - \eta}{\xi - \tau}\right)^{1/2} I_1(z) \right\} d\tau$$

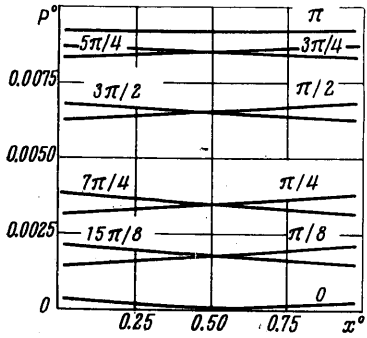
$$\langle s_2(x, t) \rangle = \int_0^{\xi} \exp\{-\gamma^\circ[(\xi - \tau)v_1^\circ + (\tau - \eta)v_2^\circ]\} \times \\ \times \left\{ \gamma^\circ v_1^\circ s_1^\circ(\tau) I_0(z) + \gamma s_2^\circ(\tau) \left(\frac{\xi - \tau}{\tau - \eta}\right)^{1/2} I_1(z) \right\} d\tau$$

$$z = 2\gamma \sqrt{(\xi - \tau)(\tau - \eta)}$$

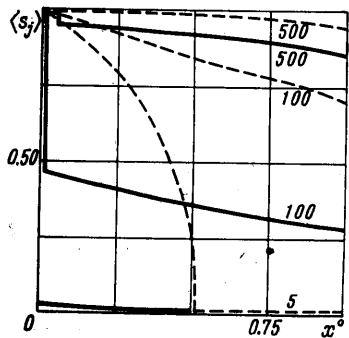
в) при  $x > tw_1$  (4.10)

$$\langle s_j(x, t) \rangle \equiv 0, \text{ или } \langle \sigma_j(x, t) \rangle \equiv \sigma_j'$$

Этот результат для зоны, не охваченной вытеснением, физически очевиден.



Фиг. 2



Фиг. 3

5. В качестве примера рассмотрим случай трещиновато-пористой среды, для которой  $m_1 = 1$ ,  $n_1 \ll n_2$ ,  $k_1 \gg k_2$ . Параметры трещин:  $k_1 = 1 \text{ д}$ ,  $m_1' = n_1 = 0.025$ ,  $\beta_{01}' = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ ат}^{-1}$ ,  $\sigma_1' = 0.01$ ,  $\sigma_1'' = 0.99$ ; параметры блоков:  $k_2 = 0.01 \text{ д}$ ,  $m_2' \approx m_2 = 0.25$ ,  $\beta_{02}' = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ ат}^{-1}$ ,  $\sigma_2' = 0.1$ ,  $\sigma_2'' = 0.9$ ; параметры жидкости:  $\beta_0 = 10^{-4} \text{ ат}^{-1}$ ,  $\mu = 1 \text{ снз}$ . Значения коэффициента обмена  $\alpha$ , полученные путем обработки промысловых данных [9], для разных пластов колеблются в широком диапазоне

не:  $a \sim 2 \cdot 10^{-18} - 5 \cdot 10^{-15}$ . Положим  $l = 200$  м,  $Q_j = Q^0$ , причем средний расход жидкости определяется по заданному среднему за период перепаду давления между галереями  $\Delta p^0 = p^0(0) - p^0(l)$  из (3.6). На фиг. 2 представлена типичная зависимость безразмерной амплитуды перепада давлений между средами  $P^0 = P / \Delta p^0$  от безразмерной координаты  $x^0 = x / l$  при разных значениях фазы  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^{-15}$ ,  $T = 1$  сутки), а на фиг. 3 изображены распределения по длине пласта функций  $\langle s_j \rangle$ , связанных с осредненными по периоду значениями насыщенностей сред вытесняющей жидкостью  $\langle \sigma_j \rangle$  соотношениями (4.1), в зависимости от числа циклов ( $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \pi$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^{-15}$ ,  $T = 1$  сутки,  $P^0 = 9,24 \cdot 10^{-3}$ ,  $s^0(t) = 1 - \exp(-t/T)$ ,  $\langle s_1 \rangle$  — пунктир,  $\langle s_2 \rangle$  — сплошные).

Отметим следующее обстоятельство: несмотря на изменение коэффициента обмена  $\alpha$  в широком диапазоне (в тысячу раз), произведение  $\alpha P$ , определяющее интенсивность обмена жидкостями между средами, изменяется в узком диапазоне (в полтора — два раза). Физически это объясняется тем, что  $\alpha$  и  $P$  меняются в противоположные стороны: чем меньше гидродинамическая связь между средами разной проницаемости, тем больше перепад давлений между ними, и наоборот. Этот вывод полезен в практических приложениях. Расчеты показывают, что с ростом  $T$  амплитуда  $P$  сначала возрастает, а затем практически становится постоянной, вследствие чего выбор слишком больших значений  $T$  нецелесообразен, так как это может привести к излишнему удлинению общего времени циклического процесса.

Авторы благодарят В. Л. Данилова за ценные указания при выполнении данной работы и Г. И. Баренблатта за ее обсуждение.

Поступило 24 XI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых краевых задачах теории фильтрации жидкости в трещиноватых породах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
4. Рыжик В. М. Вытеснение нефти водой в пористой среде с малопроницаемыми включениями. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 1.
5. Боксерман А. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
6. Баренблатт Г. И. О движении газожидкостных смесей в трещиновато-пористых породах. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 3.
7. Кутляров В. С. Конвективная диффузия в трещиновато-пористых средах. ПМТФ, 1967, № 1.
8. Гурса Э. Курс математического анализа, т. III, ч. I. Гостехиздат, 1933.
9. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджаниянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостоптехиздат, 1962.

#### О ПЛОСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С ПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПРЕНИЦАЕМОСТЬЮ ВДОЛЬ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. В. ГОЛУБЕВА, А. Я. ШПИЛЕВОЙ

(Москва)

1. Плоские фильтрационные течения жидкости или газа в среде, проницаемость которой  $k$  меняется скачком ( $k_1, k_2$ ) вдоль кривой  $L$  (фиг. 1), описываются комплексными потенциалами  $w_1(z), w_2(z)$ , действительные и мнимые части которых на  $L$  должны удовлетворять соотношениям [1]:

$$\left[ \frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} \right]_L, \quad \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right]_L, \quad [\psi_1 = \psi_2]_L, \quad \left[ \frac{1}{k_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \frac{1}{k_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right]_L \quad (1.1)$$

где  $n$  — нормаль к кривой  $L$ .