5. Приведенные выше уравнения переноса и моментные уравнения, записанные в универсальной форме, могут быть полезны при решении задач методом моментов, т. е. методом замыкания системы моментных уравнений путем подходящей аппроксимации функции распределения. Можно было бы, в частности, написать тринадцатимоментные уравнения Грэда, задавшись тем же, что и в [2], видом функции распределения. Однако такой подход оказывается неоправданным из-за асимптотического характера сходимости рядов.

В заключение отметим, что вид столкновительного члена в приведенных выше рассуждениях, кроме п. 4, не был использован, так что результаты справедливы как для уравнения Больцмана, так и для его кинетических моделей.

Автор благодарен А. А. Никольскому за обсуждение и полезные замечания.

Поступило 19 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд-во «Наука», 1965.
2. Grad H. On the kinetic theory rarefied gas. Commun. on pure and appl. mathem., 1949, vol. 2, No. 4 (Русск. перев. в сб. переводов и обз. ин. период. лит. «Механика», 1952, № 4, 5).
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.

О ПРИСТЕНОЧНОМ ЭФФЕКТЕ

Ю. Н. ПАВЛОВСКИЙ

(*Москва*)

При течении различных суспензий, представляющих собой твердые частицы, взвешенные в вязкой жидкости, наблюдается так называемый пристеночный эффект [1]. Этот эффект заключается в том, что в узкой зоне около стенок трубы частицы отсутствуют. В частности, пристеночный эффект наблюдается при течении по трубам красок, а также при течении крови, которая представляет собой вязкую жидкость со взвешенными в ней эритроцитами, лейкоцитами, тромбоцитами, которые можно считать твердыми частицами. Пристеночный эффект при течении крови обсуждается во многих работах, касающихся гидродинамики крови [2]. Много работ посвящено также исследованию поведения взвешенных частиц при течении взвеси по трубе. Результаты большинства теоретических работ сводятся к тому, что частицы должны собираться в зоне вокруг оси трубы [3, 4]. Эксперименты дают более сложную картину поведения частиц.

Прежде всего следует отметить результаты Сегре и Зильберберга [5], которые установили, что при течении взвеси в трубе развивается не только пристеночный, но и приосевой эффект. В экспериментах Сегре и Зильберберга частицы собирались в узкую зону, находящуюся приблизительно на половине расстояния от оси до стенок трубы. Этот эффект был назван авторами пинч-эффектом. Результаты Сегре и Зильберберга были подтверждены Оливером [6]. В то же время Оливер обнаружил, что если частицам «запретить» вращаться, то приосевой эффект отсутствует и частицы собираются вокруг оси трубы. Приосевой эффект отсутствует также для деформируемых частиц. Этот результат экспериментально получен Гольдсмитом и Масоном [7]. Эти же авторы отмечают, что приосевой эффект либо отсутствует, либо очень слабо выражен, если размеры взвешенных частиц очень малы по сравнению с радиусом трубы.

Результаты, полученные в [5], показывают, что пинч-эффект проявляется тем сильнее, чем больше значение числа $L = (al / R^2)\mathrm{Re}$, где d — радиус частицы, R — радиус трубы, Re — относительное число Рейнольдса для частицы, l — расстояние от начала трубы до сечения, в котором производятся измерения. Внимательный анализ этих результатов показывает, однако, что со значением числа L связано развитие лишь приосевого эффекта. Пристеночный эффект устанавливается значительно быстрее приосевого и практически не зависит от числа L.

В настоящей работе рассматривается случай, когда плотность взвешенных частиц совпадает с плотностью жидкости, размеры частиц очень малы по сравнению с радиусом трубы. В этом случае влияние взвешенных частиц на динамику взвеси можно свести к увеличению вязкости взвеси в соответствии с концентрацией взвешенных частиц. Естественно ожидать, что при течении такой взвеси будет реализовываться распределение концентрации взвешенных частиц по сечению, которое минимизирует долю кинетической энергии, переходящей из-за вязкости во внутреннюю энергию. Полученные в работе «оптимальные» в этом смысле распределения концентрации свидетельствуют о наличии пристеночного эффекта, если функция, характеризующая зависимость вязкости от концентрации, удовлетворяет некоторым, весьма слабым ограничениям. В то же время приосевого эффекта не получилось.

Так как принятые в работе предположения соответствуют очень малым числам L, этот факт подтверждает то, что приосевой эффект характеризуется значением числа L, в то время как пристеночный эффект не зависит от значения L.

1. Рассмотрим движение несжимаемой вязкой жидкости по круглой трубе постоянного радиуса a. Будем считать, что по трубе вместе с жидкостью движется некоторая субстанция с плотностью, равной плотности жидкости. Концентрацию этой субстанции обозначим через c. Предположим, что жидкость и субстанцию можно рассматривать как одну сплошную жидкую среду, движение которой описывается уравнениями Навье-Стокса, причем вязкость η этой среды в точке с цилиндрическими координатами x, R зависит лишь от концентрации $c(x, R)$ в данной точке: $\eta = \eta(c)$. Везде в дальнейшем предполагается, что функция $\eta(c)$ монотонно возрастает с возрастанием c.

Сплошную среду, которая представляет собой вязкую жидкость вместе с имеющейся в ней субстанцией, будем в дальнейшем называть составной средой. Обозначим через u, v, p соответственно: скорость в направлении оси x, скорость в направлении, перпендикулярном оси x, и давление составной среды. Будем считать движение установившимся и обладающим осевой симметрией, причем на стенках трубы выполняются условия прилипания и непротекания. Тогда

$$u = u(R), \qquad v \equiv 0, \qquad c = c(R), \qquad \partial p / \partial x = -k \qquad (k > 0)$$

Рассмотрим кусок составной среды, имеющий форму цилиндра, ось которого совпадает с осью x, длина образующей равна l, радиус основания R. Вследствие установившегося характера движения сумма всех сил, действующих на этот кусок среды, равна нулю. Это значит, что для любого R из $[0, a]$ должно выполняться соотношение

$$k\pi l R^2 + 2\pi l R \frac{\partial u}{\partial R} \eta(c) = 0 \tag{1.1}$$

Из (1.1) вытекает

$$u(R) = -\frac{k}{2} \int_a^R \frac{R_1 dR_1}{\eta(c)}, \qquad q = \frac{k\pi}{2} \int_0^a \frac{R^3 dR}{\eta(c)} \tag{1.2}$$

где q — объемный расход составной среды.

Поставим следующую задачу. В классе кусочно-непрерывных, определенных на $[0, a]$ функций, найти функцию $c(R)$, которая максимизирует расход q. При этом считаются заданными градиент давления k, функция $\eta(c)$ и количество субстанции в сечении. Последнее условие означает, что функция $c(R)$ удовлетворяет соотношению

$$D = 2\pi \int_0^a c(R)\, d(R^2/2) \tag{1.3}$$

где D — заданное число.

Сформулированная задача эквивалентна задаче о нахождении кусочно-непрерывной функции $c(R)$, минимизирующей долю кинетической энергии, которая переходит во внутреннюю энергию в результате действия сил вязкости.

2. Введем безразмерные величины, определив их следующим образом:

$$r = \frac{R}{a}, \quad \mu = \frac{\eta(c)}{\eta(0)}, \quad Q = -\frac{q}{k\pi a^4 / 2\eta(0)}, \quad F = \frac{D}{2\pi a^2} \tag{2.1}$$

Равенства (1.2) и (1.3) будут выглядеть теперь следующим образом:

$$Q = -\int_0^1 \frac{r^3 dr}{\mu(c(r))}, \qquad F = \int_0^1 c(r)\, r\, dr \tag{2.2}$$

Функция $c(r)$ в (2.2) подчинена естественным ограничениям

$$0 \leqslant c(r) \leqslant 1 \tag{2.3}$$

Функция $\mu(c)$ — заданная, монотонно возрастающая, причем $\mu(0) = 1$.

Из (2.2) и (2.3) видно, что необходимым условием существования решения сформулированной задачи будет условие

$$0 \leqslant F \leqslant {}^1/_2 \tag{2.4}$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума в форме С. А. Понтрягина [8]. Определим функции $\varphi(r)$ и $x_0(r)$ следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dr} = f_1(r, c) = c(r)r, \qquad \varphi(0) = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{dx_0}{dr} = f_0(r, c) = \frac{r^3}{\mu(c)}, \qquad x_0(0) = 0 \tag{2.6}$$

Из (2.2) видно, что $\varphi(1) = F$. Сформулируем теперь задачу при помощи терминологии, использованной в [8].

В фазовом пространстве (φ, r) заданы две точки: (0, 0) и $(F, 1)$. «Фазовая точка» движется по закону (2.5). Найти «управление» $c(r)$, под воздействием которого фазовая точка перейдет из положения (0, 0) в положение $(F, 1)$, а функционал

$$Q = -\int_0^1 \frac{r^3 dr}{\mu(c(r))} \tag{2.7}$$

принимает наименьшее возможное значение.

Следуя принципу максимума, составим функцию

$$H = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 = -\psi_0 \frac{r^3}{\mu(c)} + \psi_1 cr \tag{2.8}$$

определив вспомогательные переменные ψ_0 и ψ_1 системой уравнений

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = -\frac{\partial H}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \psi_0(0) = -1 \tag{2.9}$$

Из (2.9) вытекает

$$\psi_0 = -1, \qquad \psi_1 = A = \text{const} \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.8), получим

$$H = \frac{r^3}{\mu(c)} + Acr \tag{2.11}$$

Для каждого значения чисел A из $[0, +\infty]$ и r из $[0, 1]$ подберем такое c_m, удовлетворяющее (2.3), которое максимизирует функцию H. Таким образом, возникает функция $c_m(r, A)$. Пусть теперь A^* — такое значение параметра A, при котором функция c_m удовлетворяет условию

$$F = \int_0^1 c_m(r, A^*) r dr \tag{2.12}$$

Другими словами, значение A^* таково, что функция φ, определенная (2.5), где вместо $c(r)$ стоит $c_m(r, A^*)$, удовлетворяет условию $\varphi(1) = F$. Уравнение (2.12) можно рассматривать как уравнение, определяющее функцию $A^* = A^*(F)$. В силу принципа максимума функция $c_m = c_m(r, A^*)$ будет решением поставленной задачи.

3. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть

$$\mu(c) = 1 / (1 - c)^n \qquad (n > 0) \tag{3.1}$$

В этом случае

$$H = r^3 h, \qquad h = (1 - c)^n + Ac / r^2$$

Дифференцируя h по c, получим

$$\frac{\partial h}{\partial c} = -n(1-c)^{n-1} + \frac{A}{r^2}, \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial c^2} = n(n-1)(1-c)^{n-2} \tag{3.2}$$

Предположим сначала, что $n \geqslant 1$. Из (3.2) следует, что если $n > 1$, то ни при каких фиксированных значениях A из $[0, +\infty)$ и r $(0, 1]$ величина h, рассматриваемая как функция c, не достигает максимума на $(0, 1)$. При $n = 1$ это утверждение имеет место, если еще $A \neq r^2$. Таким образом, если $n \geqslant 1$, то функция $h(c, r, A)$ при фиксированных r и A достигает своего максимума либо при $c = 0$, либо при $c = 1$, Так как $h(0, r, A) \equiv 1$, а $h(1, r, A) = A / r^2$, т. е. $h(1, r, A)$ при фиксированном A монотонно убывает, когда r возрастает, то функция $c_m(r, A)$ имеет вид

$$c_m(r, A) = \begin{cases} 1 & (0 < r < A^{1/2}) \\ 0 & (A^{1/2} \leqslant r \leqslant 1) \end{cases} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (2.12), получим

$$A^* = 2F \tag{3.4}$$

Будем говорить, что для данной функции $\mu(c)$ и данного числа F имеет место пристеночный эффект, если найдется такая полуокрестность $[1, 1-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ точки $r = 1$, в которой функция $c_m(r, A^*(F))$ тождественно равна нулю.

Из (3.3) и (3.4) следует, что для $\mu(c)$, определенной формулой (3.1), где $n \geqslant 1$, и любого числа $F \in [0, 1/2)$ имеет место пристеночный эффект.

Пусть теперь в (3.1) число n удовлетворяет неравенствам $0 < n < 1$. Рассуждения, похожие на приведенные выше, дают следующие результаты:

при $1/2 > F \geqslant 1/2(2-n)$

$$c_m(r, A^*(F)) = 1 - \left(\frac{nr^2}{A^*(F)}\right)^{1/1-n}, \qquad A^*(F) = n\left[\left(\frac{1}{2} - F\right)\frac{4-2n}{1-n}\right]^{n-1} \tag{3.5}$$

при $0 \leqslant F < 1/2(2-n)$

$$c_m(r, A^*(F)) = 1 - \left(\frac{nr^2}{A^*(F)}\right)^{1/1-n}, \qquad 0 \leqslant r < \left(\frac{F}{2(2-n)}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

$$c_m(r, A^*(F)) = 0, \qquad \left(\frac{F}{2(2-n)}\right)^{1/2} \leqslant r \leqslant 1$$

$$A^*(F) = 2n(2-n)F \tag{3.7}$$

Таким образом, в первом случае $(1/2 > F \geqslant 2(2-n))$ пристеночный эффект отсутствует, во втором случае $(0 \leqslant F < 1/2(2-n))$ пристеночный эффект имеет место.

4. Из приведенных примеров видно, что в зависимости от функции $\mu(c)$ и числа F пристеночный эффект может либо иметь, либо не иметь места. Естественно попытаться разобраться в вопросе о присутствии или отсутствие пристеночного эффекта с более общих позиций.

Напомним, что функция $\mu(c)$ считается монотонно возрастающей на $[0, 1]$ и $\mu(0) = 1$. Предположим, что $\mu(c)$ непрерывна на $[0, 1]$ и дифференцируема при $c = 0$. При этих предположениях очевидны следующие утверждения.

(1) Для существования пристеночного эффекта необходимо, чтобы $\mu'(0) > 0$.

(2) Если $\mu'(0) > 0$, то пристеночный эффект имеет место при достаточно малых значениях числа F.

Приведем доказательство утверждения (2). Функция

$$h = (1 / \mu(c)) + zc \qquad (z = Ar^{-2}) \tag{4.1}$$

Определим функцию $c_m{}^1(z)$ как значение c из $[0, 1]$, максимизирующее при данном z $(0 \leqslant z < +\infty)$ функцию h. Функция $c_m{}^1(z)$ определена при любом z из указанного интервала в силу того, что $\mu(c)$ — непрерывна и не обращается в 0 на $[0, 1]$. Очевидно,

$$c_m{}^1(r^2 / A) = c_m(r, A) \tag{4.2}$$

Уравнение (2.12) в терминах функции $c_m{}^1(z)$ примет вид

$$F = A^* \int\limits_{A^*}^{\infty} \frac{c_m{}^1(z)\,dz}{z^2} \tag{4.3}$$

Из (4.1) видно, что функция $c_m^1(z)$ монотонно возрастает с увеличением z. В самом деле, пусть $z_0,\ z_1 \in [0, +\infty)$ и $z_1 > z_0$. Пусть $c_m^1(z_0) = c_0$, $c_m^1(z_1) = c_1$. Тогда

$$h(c_0, z_1) = h(c_0, z_0) + (z_1 - z_0)c_0 \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует

$$h(c_0, z_1) \geqslant h(c, z_0) + (z_1 - z_0)c = h(c, z_1), \qquad c \in [0, c_0]$$

Отсюда вытекает $c_1 \geqslant c_0$. Из монотонности функции $c_m^1(z)$ следует, что интеграл в правой части (4.3) существует при любом $A^* > 0$.

Будем говорить, что функция $c_m^1(z)$ обладает пристеночным эффектом, если в некоторой полуокрестности $[0, \varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 > 0$, $z = 0$, функция $c_m^1(z)$ тождественно равна 0. Докажем, что при сформулированных предположениях относительно $\mu(c)$ функция $c_m^1(z)$ обладает пристеночным эффектом.

Обозначим $1 / \mu(c) = f(c)$. Функция $f(c)$ непрерывна на [0, 1], монотонно убывает, дифференцируема при $c = 0$ и $f'(0) < 0$. Отсюда следует существование числа $\varepsilon > 0$ такого, что

$$1 - \varepsilon c > f(c) \qquad (0 < c \leqslant 1) \tag{4.5}$$

В самом деле, если такого ε не существует, то для любого целого положительного числа n найдется c_n из (0, 1], для которого

$$1 - c_n / n \leqslant f(c_n) \tag{4.6}$$

Из последовательности $\{c_n\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{c_{n_k}\}$. Обозначим $c_0 = \lim c_{n_k}$ при $k \to \infty$. Переходя в неравенстве

$$1 - c_{n_k}/n_k \leqslant f(c_{n_k}) \tag{4.7}$$

к пределу при $k \to \infty$, получим $1 \leqslant f(c_0)$. Значит, $c_0 = 0$.

Перепишем теперь (4.7) следующим образом:

$$-\frac{1}{n_k} \leqslant \frac{f(c_{n_k}) - 1}{c_{n_k}}$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим $f'(0) \geqslant 0$, что противоречит условию $f'(0) < 0$. Обозначим через ε_1 точную верхнюю грань тех ε, для которых имеет место (4.5). Пусть $0 < z < \varepsilon_1$. Тогда из (4.5) следует

$$h(c, z) = f(c) + zc < 1 \qquad (0 < c \leqslant 1)$$

Значит, $c_m^1(z) = 0$ для всех $z < \varepsilon_1$, т. е. функция $c_m^1(z)$ обладает пристеночным эффектом. Пусть

$$F < \varepsilon_1 I \qquad \left(I = \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{c_m^1(z)\,dz}{z^2}\right) \tag{4.8}$$

В этом случае из уравнения (4.3) следует

$$F = A^* I, \qquad A^* < \varepsilon_1 \tag{4.9}$$

При этом I в (4.9) не зависит от A^*. Таким образом, если $\mu(c)$ удовлетворяет сформулированным в начале данного раздела условиям и число F удовлетворяет (4.8), то имеет место пристеночный эффект и A^* — линейная функция F.

В заключение приведем еще достаточное условие существования пристеночного эффекта при всех F из $[0, 1/2)$.

Если $\mu(c)$ монотонно возрастает на [0, 1], функция $d(1 / \mu(c)) / dc$ определена везде на [0, 1] и монотонно возрастает, то пристеночный эффект имеет место при всех F из $[0, 1/2)$.

В самом деле, в этом случае функция $h(c, z)$ при фиксированном z не достигает максимума ни при каком c из (0, 1). Из монотонности функции $c_m^1(z)$ следует

$$c_m(r, A^*(F)) = \begin{cases} 1 & 0 < r < (2F)^{1/2} \\ 0 & (2F)^{1/2} < r \leqslant 1 \end{cases}$$

Отсюда и вытекает сформулированное утверждение.

Поступило 2 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Байер В. Биофизика. Изд. иностр. лит., 1962.
2. Flow of Blood. N. Y., Pergamon Press, 1960.
3. Rubinow S. I., Keller J. B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, pt. 3, p. 447.
4. Saffman P. G. On the motion of small spheroidal particles in a viscous liquid. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, p. 5.
5. Segre G., Silberberg A. Behaviour of microscopic rigid spheres in Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt. 1, p. 136.
6. Oliver D. R. Influence of Particle Rotation on Radial Migration in Poiseuille Flow of Suspensions. Nature, 1962, vol. 194, No. 4835, p. 1269.
7. Goldsmith H. L., Mason S. G. Physical Aspects of the Flow of Biological Suspensions through Tubes. Proc. 4th Internat. Congr. Rheol. Providence, 1963, pt. 4, N. Y., 1965.
8. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.

К ТЕОРИИ СОВМЕСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Ю. А. БУЕВИЧ

(*Москва*)

Исследуется стационарная фильтрация двух несмешивающихся жидкостей через пористый фильтр конечной толщины в направлении силы тяжести или обратном ему. Из дальнейшего ясно, что результаты легко распространить на фильтрацию многокомпонентных систем.

Пусть полный объемный расход, отнесенный к единице площади поверхности фильтра, равен u_0, а расходы первой и второй жидкостей (обозначаемых в дальнейшем просто как жидкости *1* и *2*) равны соответственно $u_{10} = (1-\rho_0)u_0$ и $u_{20} = \rho_0 u_0$, где ρ_0 — объемная концентрация второй жидкости в системе.

Обычно считается [1], что для каждой из несмешивающихся жидкостей можно ввести эффективные проницаемости k_i $(i = 1, 2)$ и записать уравнения Дарси в виде

$$\mathbf{u}_{i0} = -\frac{k_i}{\mu_i}(\nabla p - d_i\mathbf{g}) = s_i'(\mathbf{G} + d_i\mathbf{g}), \qquad \mathbf{G} = -\nabla p \tag{1}$$

Здесь μ_i и d_i — вязкости и плотности жидкостей; капиллярное давление в пористом фильтре считается постоянным. Введенные в (1) величины k_i зависят, разумеется, от проницаемости фильтра k, концентрации ρ_0 и т. п. Однако предполагается, и в этом отчасти состоит смысл введения величин k_i, что при данных k, ρ_0 эти величины не зависят от направления фильтрации. Из (1) и тождества $u_0 = \rho_0 u_0 + (1-\rho_0)u_0$ получим без труда

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\rho_0}{s_2'} + \frac{1-\rho_0}{s_1'}\right)\mathbf{u}_0 - d_0\mathbf{g}, \qquad d_0 = d_1(1-\rho_0) + d_2\rho_0$$

Введем эффективный градиент давления

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G} + d_0\mathbf{g} \tag{2}$$

Тогда для выражения эффективной величины s' имеем

$$s' = \left(\frac{\rho_0}{s_2'} + \frac{1-\rho_0}{s_1'}\right)^{-1} \tag{3}$$

Величина s' не зависит, например, от того, в каком направлении происходит фильтрация — вдоль вектора $\mathbf{g}$ или обратно ему.

В то же время имеются экспериментальные данные, убедительно показывающие, что эффективные проницаемости фильтра s^+ и s^-, относящиеся к движению одной и той же системы вниз и вверх соответственно, не совпадают друг с другом [2]. Характерные результаты такого рода, полученные в [2] при изучении фильтрации газоконденсатных систем, представлены на фиг. 1. При $p > p_0$, где p_0 — давление начала