8. Иванов А. В. Экспериментальное определение распределения плотности перед затупленными телами, обтекаемыми сверхзвуковым потоком разреженного газа. ПМТФ, 1964, № 6, стр. 99.
9. Сухнев В. А. Об определении поправок к показаниям насадков полного напора в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
10. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Изд. иностр. лит., 1961. стр. 416, 868.
11. Авдуевский В. С., Копяткевич Р. М. Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при наличии теплообмена и произвольном распределении давления вдоль поверхности. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
12. Talbot L., Scala S. Shock Wave Structure in a Relaxing Diatomic Gas. Rarefied Gas Dynamics (Proc. Intern. Simposium Held at Berkeley). 1961, p. 603.
13. Muckenfuss C. Some Aspects of Shock Structure According to the Bimodal Model. Phys. Fluids., 1962, vol. 5, No. 11, p. 1325.
14. Ступонченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. Изд-во «Наука», 1965, стр. 270

УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И МОМЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Е. М. ШАХОВ *(Москва)*

Обсуждаются различные формы записи уравнения Больцмана в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Приводится вывод общего уравнения переноса и моментных уравнений, содержащих моменты функции распределения не выше четвертого. Для газа из молекул Максвелла показано, что система моментных уравнений для течений, мало отличающихся от равновесных, переходит в систему уравнений гидродинамики. Полученные уравнения могут быть полезны при решении задач о движениях разреженного газа моментными методами. Результаты справедливы как для уравнения Больцмана, так и для модельных кинетических уравнений.

1. Все изменения, происходящие в разреженном газе в отсутствие внешних сил, описываются уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi_x\frac{\partial f}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial f}{\partial y}+\xi_z\frac{\partial f}{\partial z}=J \tag{1.1}$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты физического пространства; ξ_x, ξ_y, ξ_z — компоненты вектора молекулярной скорости ξ на оси координат с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$; $\mathbf{k}$; f — функция распределения, зависящая от $t, x, y, z, \xi_x, \xi_y, \xi_z$, J — интеграл столкновений, представляющий собой некоторый функционал от f, конкретный вид которого нас не интересует.

Преобразуем уравнение Больцмана к произвольной ортогональной системе координат. Пусть q_1, q_2, q_3 — криволинейные координаты точки x, y, z физического пространства, так что

$$x=x(q_1, q_2, q_3),\ y=y(q_1, q_2, q_3),\ z=z(q_1, q_2, q_3) \tag{1.2}$$

и наоборот

$$q_i=q_i(x, y, z)\qquad (i=1, 2, 3) \tag{1.3}$$

Переходя в (1.1) от декартовых координат x, y, z к криволинейным при неизменных ξ_x, ξ_y, ξ_z, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\xi_1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}+\frac{\xi_2}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}+\frac{\xi_3}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}=J,\qquad \xi_i=\frac{H_i\partial q_i}{\partial x}\xi_x+\frac{H_i\partial q_i}{\partial y}\xi_y+\frac{H_i\partial q_i}{\partial z}\xi_z \tag{1.4}$$

$$H_i=\sqrt{(\partial x/\partial q_i)^2+(\partial y/\partial q_i)^2+(\partial z/\partial q_i)^2}\qquad (i=1, 2, 3) \tag{1.5}$$

Здесь H_i — параметры Ламэ.

Величина $H_i\partial q_i$ — длина дуги ∂s_i координатной линии q_i, а $H_i\partial q_i/\partial x$ — косинус угла, который составляет нормаль к поверхности $q_i=\mathrm{const}$, а следовательно (в силу ортогональности системы), и линия q_i с осью x. Следовательно, ξ_i представляет собою проекцию вектора скорости ξ на касательную к координатной линии q_i. Очевидно, что для одного и того же вектора ξ проекции ξ_i различны в различных точках физического пространства. Обозначая через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ орты криволинейной системы координат, выражение для ξ_i запишем в виде

$$\xi_i = \xi_x(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{i}) + \xi_y(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{j}) + \xi_z(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k}) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.6}$$

Таким образом, если движение газа рассматривается в ортогональной криволинейной системе координат, а молекулярные скорости — в декартовой, то для функции распределения $f(t, q_1, q_2, q_3, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$ имеем уравнение Больцмана в форме (1.4), причем ξ_i выражаются формулами (1.6).

Для получения уравнений переноса целесообразно записать уравнение Больцмана в дивергентной форме.

С этой целью заметим, что для фиксированного вектора

$$\xi = \xi_x\mathbf{i} + \xi_y\mathbf{j} + \xi_z\mathbf{k} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3$$

имеет место равенство

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial \xi_1 H_2 H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial \xi_2 H_3 H_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \xi_3 H_1 H_2}{\partial q_3}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) может быть проверено непосредственным дифференцированием, если воспользоваться формулами для производных $\partial\xi_i / \partial q_j$, приводимыми ниже. Однако оно достаточно ясно физически, так как поток постоянного вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю. Учитывая (1.7), запишем уравнение Больцмана в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial f\xi_1 H_2 H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f\xi_2 H_3 H_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f\xi_3 H_1 H_2}{\partial q_3}\right) = J \tag{1.8}$$

Это уравнение можно было бы вывести и непосредственно, составляя, как и в декартовых координатах, баланс числа частиц скорости $\xi = \xi_x\mathbf{i} + \xi_y\mathbf{j} + \xi_z\mathbf{k}$ для элементарного объема $d\tau = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$.

Переход к криволинейным координатам можно провести еще дальше. Именно, не только точку физического пространства задавать координатами q_1, q_2, q_3, но и молекулярную скорость относить к криволинейным координатам, т. е. вместо аргументов t, q_1, q_2, q_3, ξ_x, ξ_y, ξ_z в функции распределения ввести t, q_1, q_2, q_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3. Переходя в уравнении (1.4) от ξ_x, ξ_y, ξ_z к ξ_1, ξ_2, ξ_3, согласно формулам (1.6), и замечая, что интеграл столкновений инвариантен по отношению к повороту осей, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial s_\alpha} + \xi_\alpha \frac{\partial \xi_\beta}{\partial s_\alpha}\frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} = J, \qquad \frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} \quad \text{и т. д.} \tag{1.9}$$

Производные от f по q_i взяты при фиксированных ξ_1, ξ_2, ξ_3, а от ξ_β по q_α — при фиксированных ξ_x, ξ_y, ξ_z. Здесь и всюду ниже подразумевается суммирование по повторяющимся греческим индексам.

Таким образом, в уравнении Больцмана появляются силы инерции. Чтобы придать уравнению (1.9) окончательный вид, необходимо вместо $\partial\xi_\beta / \partial s_\alpha$ подставить их выражения через ξ_i, q_i (см. формулы (2.4)), однако из-за громоздкости это уравнение выписывать не будем.

2. Для вывода общего уравнения переноса воспользуемся уравнением Больцмана в дивергентной форме (1.8). Заметим, что уравнение переноса может быть получено также и из (1.9).

Пусть $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — произвольная функция ξ_1, ξ_2, ξ_3. Умножая (1.8) на φ и преобразуя сумму производных от f к дивергентному виду, получим

$$\frac{\partial f\varphi}{\partial t} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial f\varphi\xi_1 H_2 H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f\varphi\xi_2 H_3 H_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f\varphi\xi_3 H_1 H_2}{\partial q_3}\right) - f\Phi = \varphi J \tag{2.1}$$

$$\Phi = \frac{\xi_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\xi_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\xi_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \tag{2.2}$$

Функция φ зависит от координат только через посредство компонент скорости, так что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Следовательно, Ф представляется в форме

$$\Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\alpha}\left(\xi_\beta\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial s_\beta}\right) \tag{2.3}$$

Скорость $\xi = \xi_x i + \xi_y \mathbf{j} + \xi_z \mathbf{k}$ — независимая переменная функция распределения, поэтому $\partial\xi / \partial q_i = 0$, а производные $\partial\xi_i / \partial q_j$ отличны от нуля вследствие криволинейности системы координат

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial(\mathbf{e}_i\cdot\xi)}{\partial q_j} = \frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial q_j}\cdot\xi$$

Пользуясь формулами для производных от единичных векторов по координатам q_j (см., например, [1], стр. 206), получим

$$\frac{\partial\xi_1}{H_1\partial q_1} = -\frac{\xi_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{\xi_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}, \quad \frac{\partial\xi_1}{H_2\partial q_2} = \frac{\xi_2}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\xi_1}{H_3\partial q_3} = \frac{\xi_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} \tag{2.4}$$

и две группы аналогичных выражений для производных от ξ_2 и ξ_3, которые получаются из (2.4) циклической перестановкой индексов.

Подставляя в (2.3) выражения для производных от ξ_α, согласно формулам (2.4), представим Ф в форме

$$\Phi = \sum_{i,\,j=1}^{3}\left(\frac{\xi_i^2}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial q_j} - \frac{\xi_j\xi_i}{H_jH_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j} \tag{2.5}$$

Будем обозначать угловыми осредненные, макроскопические характеристики, полученные из микрохарактеристик путем умножения на функцию распределения f и интегрирования по всему пространству скоростей. Общее уравнение переноса тогда, согласно (2.1), запишется в виде

$$\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial t} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\langle\varphi\xi_1\rangle H_2H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial\langle\varphi\xi_2\rangle H_3H_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\langle\varphi\xi_3\rangle H_1H_2}{\partial q_3}\right) - \langle\Phi\rangle = \langle J_\varphi\rangle \tag{2.6}$$

$$\langle J_\varphi\rangle = \int \varphi J d\xi$$

3. Выведем теперь из общего уравнения переноса (2.6) моментные уравнения, содержащие моменты до четвертого порядка включительно. Следуя работе [2], введем обозначения

$$u_i = \langle\xi_i\rangle, \quad c_i = \xi_i - u_i, \quad P_{ij} = \langle c_ic_j\rangle, \quad p_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij}p$$

$$S_{ijk} = \langle c_ic_jc_k\rangle, \quad S_i = S_{i\alpha\alpha}, \quad Q_{ijkl} = \langle c_ic_jc_kc_l\rangle$$

$$\langle J_{ij}^{(2)}\rangle = \int c_ic_jJ\,d\xi, \quad \langle J_{ijk}^{(3)}\rangle = \int c_ic_jc_kJd\xi$$

Кроме того, обозначим через $\langle\Phi_i^{(1)}\rangle$, $\langle\Phi_{ij}^{(2)}\rangle$, $\langle\Phi_{ijk}^{(3)}\rangle$ осредненные значения Ф при

$$\varphi = \xi_i, \quad \varphi = \xi_i\xi_j, \quad \varphi = \xi_i\xi_j\xi_k$$

Полагая в общем уравнении переноса $\varphi = 1$, $\varphi = \xi_i$ и $\varphi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, получим уравнения сохранения массы, импульса и энергии

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\rho u_1H_2H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial\rho u_2H_3H_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\rho u_3H_1H_2}{\partial q_3}\right) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}H_2H_3(\rho u_1u_i + P_{1i}) + \frac{\partial}{\partial q_2}H_3H_1(\rho u_2u_i + P_{2i}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}H_1H_2(\rho u_3u_i + P_{3i})\right] - \langle\Phi_i^{(1)}\rangle = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial(3p+\rho u_\alpha u_\alpha)}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}H_2H_3(\rho u_1u_\alpha u_\alpha+3u_1p+2u_\alpha P_{1\alpha}+S_1)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_2}H_3H_1(\rho u_2u_\alpha u_\alpha+3u_2p+2u_\alpha P_{2\alpha}+S_2)+$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}H_1H_2(\rho u_3u_\alpha u_\alpha+3u_3p+2u_\alpha P_{3\alpha}+S_3)\right]=0 \tag{3.3}$$

Выражения для $\langle\Phi_i^{(1)}\rangle$ легко получаются из (2.5)

$$\langle\Phi_i^{(1)}\rangle=-(\rho u_1u_2+P_{12})\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-(\rho u_1u_3+P_{13})\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}+$$

$$+(\rho u_2^2+P_{22})\frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+(\rho u_3^2+P_{33})\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} \tag{3.4}$$

и два аналогичных выражения — для $\langle\Phi_2^{(1)}\rangle$ и $\langle\Phi_3^{(1)}\rangle$. Используя уравнение неразрывности и уравнения количества движения, запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}H_2H_3\left(u_1p+\frac{1}{3}S_1\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}H_3H_1\left(u_2p+\frac{1}{3}S_2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}H_1H_2\left(u_3p+\frac{1}{3}S_3\right)\right]+\frac{2}{3}P_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\beta}+\frac{2}{3}u_\alpha\langle\Phi_\alpha^{(1)}\rangle=0 \tag{3.5}$$

Положим теперь в (2.6) $\varphi=\xi_i\xi_j$ и $\varphi=\xi_i\xi_j\xi_k$. Выполняя те же преобразования, что и при выводе соответствующих уравнений в декартовых координатах [2], получим

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}H_2H_3(u_1P_{ij}+S_{ij1})+\frac{\partial}{\partial q_2}H_3H_1(u_2P_{ij}+S_{ij2})+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}H_1H_2(u_3P_{ij}+S_{ij3})\right]+P_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial s_\alpha}+P_{\alpha i}\frac{\partial u_j}{\partial s_\alpha}-\langle\overset{(2)}{\Phi_{ij}}\rangle+u_j\langle\Phi_i^{(1)}\rangle+u_i\langle\Phi_j^{(1)}\rangle=\bar{I}_{ij}^{(2)} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial S_{ijk}}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}H_2H_3(u_1S_{ijk}+Q_{ijk1})+\frac{\partial}{\partial q_2}H_3H_1(u_2S_{ijk}+Q_{ijk2})+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}H_1H_2(u_3S_{ijk}+Q_{ijk3})\right]+S_{ij\alpha}\frac{\partial u_k}{\partial s_\alpha}+S_{i\alpha k}\frac{\partial u_j}{\partial s_\alpha}+S_{\alpha jk}\frac{\partial u_i}{\partial s_\alpha}-$$

$$-\frac{1}{\rho H_1H_2H_3}\left(P_{ij}\frac{\partial H_2H_3P_{1k}}{\partial q_1}+P_{jk}\frac{\partial H_2H_3P_{1i}}{\partial q_1}+P_{ki}\frac{\partial H_2H_3P_{1j}}{\partial q_1}+P_{ij}\frac{\partial H_3H_1P_{2k}}{\partial q_2}+\right.$$

$$\left.+P_{jk}\frac{\partial H_3H_1P_{2i}}{\partial q_2}+P_{ki}\frac{\partial H_3H_1P_{2j}}{\partial q_2}+P_{ij}\frac{\partial H_1H_2P_{3k}}{\partial q_3}+P_{jk}\frac{\partial H_1H_2P_{3i}}{\partial q_3}+P_{ki}\frac{\partial H_1H_2P_{3j}}{\partial q_3}\right)+$$

$$+\frac{1}{\rho}(P_{ij}\langle\Phi_k^{(1)}\rangle+P_{jk}\langle\Phi_i^{(1)}\rangle+P_{ki}\langle\Phi_j^{(1)}\rangle)-\langle\Phi_{ijk}\rangle+$$

$$+u_k\langle\Phi_{ij}^{(2)}\rangle+u_i\langle\Phi_{jk}^{(2)}\rangle+u_j\langle\Phi_{ki}^{(2)}\rangle-u_iu_j\langle\Phi_k^{(1)}\rangle-u_ju_k\langle\Phi_i^{(1)}\rangle-$$

$$-u_ku_i\langle\Phi_j^{(1)}\rangle=\langle\overset{(3)}{I_{ijk}}\rangle \tag{3.7}$$

Величины $\langle\overset{(3)}{\Phi_{ijk}}\rangle$, $\langle\Phi_{ij}^{(2)}\rangle$, вычисляются элементарне на основании (2.5), однако из-за громоздкости здесь не приводятся.

4. Уравнения (3.6), (3.7) в случае молекул Максвелла дают возможность получить выражения для напряжений и тепловых потоков в гидродинамическом приближении. Переходя от P_{ij} к p_{ij} и исключая $\partial p / \partial t$ при помощи уравнения энергии в форме (3.5), запишем (3.6) в виде

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}H_2H_3\left(u_1p_{ij}+S_{ij1}-\frac{1}{3}\delta_{ij}S_1\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_2}H_3H_1\left(u_2p_{ij}+S_{ij2}-\frac{1}{3}\delta_{ij}S_2\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}H_1H_2\left(u_3p_{ij}+S_{ij3}-\frac{1}{3}\delta_{ij}S_3\right)\right]+$$
$$+p_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial s_\alpha}+p_{\alpha i}\frac{\partial u_j}{\partial s_\alpha}-\frac{2}{3}\delta_{ij}p_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\beta}+p\left(\frac{\partial u_i}{\partial s_j}+\frac{\partial u_j}{\partial s_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\alpha}\right)-$$
$$-\langle\Phi_{ij}^{(2)}\rangle+u_j\langle\Phi_i^{(1)}\rangle+u_i\langle\Phi_j^{(1)}\rangle-\frac{2}{3}\delta_{ij}u_\alpha\langle\Phi_\alpha^{(1)}\rangle=\langle I_{ij}^{(2)}\rangle \tag{4.1}$$

Для молекул Максвелла

$$\langle I_{ij}^{(2)}\rangle=-p\mu^{-1}p_{ij}$$

Переходя в (4.1) к пределу при $\mu\to 0$ и объединяя слагаемые при δ_{ij}, найдем выражение для p_{ij}

$$p_{ij}=-\mu\left[\frac{H_i}{H_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{u_i}{H_i}\right)+\frac{H_j}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{u_j}{H_j}\right)\right]\qquad(i\neq j) \tag{4.2}$$

$$p_{ii}=-\mu\left\{2\left[\frac{u_\alpha}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial s_\alpha}+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{u_i}{H_i}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial u_1H_2H_3}{\partial q_1}+\frac{\partial u_2H_3H_1}{\partial q_2}+\frac{\partial u_3H_1H_2}{\partial q_3}\right)\right\} \tag{4.3}$$

Учитывая, что компоненты тензора скоростей деформации выражаются формулами [3]

$$2\varepsilon_{ij}=\frac{H_i}{H_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{u_i}{H_i}\right)+\frac{H_j}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{u_j}{H_j}\right)\qquad(i\neq j) \tag{4.4}$$

$$\varepsilon_{ii}=\frac{u_\alpha}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial s_\alpha}+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{u_i}{H_i}\right) \tag{4.5}$$

получаем обычную для теории Навье — Стокса линейную связь между тензором напряжения и тензором скоростей деформаций

$$p_{ij}=-2\mu\varepsilon_{ij},\qquad p_{ii}=-2\mu\varepsilon_{ii}+{}^2/_3\mu\varepsilon_{aa}\qquad(i\neq j) \tag{4.6}$$

Выражение для компонент теплового потока $^1/_2S_i$ получим из уравнения (3.7). Для молекул Максвелла

$$\langle I_{ijk}^{(3)}\rangle=\frac{p}{6\mu}(S_i\delta_{jk}+S_j\delta_{ik}+S_k\delta_{ij}-9S_{ijk})$$

Положим в (2.8) $j=k=\alpha$, просуммируем по α и перейдем к пределу при $\mu\to 0$. Замечая, что в пределе

$$Q_{ijkl}=pRT(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

и что все слагаемые, зависящие от Φ, взаимно уничтожаются, приходим к обычному выражению закона Фурье для одноатомного газа

$${}^1/_2S_i=-\lambda\frac{\partial T}{H_i\partial q_i}\qquad(\lambda={}^{15}/_4R\mu) \tag{4.7}$$

5. Приведенные выше уравнения переноса и моментные уравнения, записанные в универсальной форме, могут быть полезны при решении задач методом моментов, т. е. методом замыкания системы моментных уравнений путем подходящей аппроксимации функции распределения. Можно было бы, в частности, написать тринадцатимоментные уравнения Грэда, задавшись тем же, что и в [2], видом функции распределения. Однако такой подход оказывается неоправданным из-за асимптотического характера сходимости рядов.

В заключение отметим, что вид столкновительного члена в приведенных выше рассуждениях, кроме п. 4, не был использован, так что результаты справедливы как для уравнения Больцмана, так и для его кинетических моделей.

Автор благодарен А. А. Никольскому за обсуждение и полезные замечания.

Поступило 19 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд-во «Наука», 1965.
2. Grad H. On the kinetic theory rarefied gas. Commun. on pure and appl. mathem., 1949, vol. 2, No. 4 (Русск. перев. в сб. переводов и обз. ин. период. лит. «Механика», 1952, № 4, 5).
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.

О ПРИСТЕНОЧНОМ ЭФФЕКТЕ

Ю. Н. ПАВЛОВСКИЙ

(*Москва*)

При течении различных суспензий, представляющих собой твердые частицы, взвешенные в вязкой жидкости, наблюдается так называемый пристеночный эффект [1]. Этот эффект заключается в том, что в узкой зоне около стенок трубы частицы отсутствуют. В частности, пристеночный эффект наблюдается при течении по трубам красок, а также при течении крови, которая представляет собой вязкую жидкость со взвешенными в ней эритроцитами, лейкоцитами, тромбоцитами, которые можно считать твердыми частицами. Пристеночный эффект при течении крови обсуждается во многих работах, касающихся гидродинамики крови [2]. Много работ посвящено также исследованию поведения взвешенных частиц при течении взвеси по трубе. Результаты большинства теоретических работ сводятся к тому, что частицы должны собираться в зоне вокруг оси трубы [3, 4]. Эксперименты дают более сложную картину поведения частиц.

Прежде всего следует отметить результаты Сегре и Зильберберга [5], которые установили, что при течении взвеси в трубе развивается не только пристеночный, но и приосевой эффект. В экспериментах Сегре и Зильберберга частицы собирались в узкую зону, находящуюся приблизительно на половине расстояния от оси до стенок трубы. Этот эффект был назван авторами пинч-эффектом. Результаты Сегре и Зильберберга были подтверждены Оливером [6]. В то же время Оливер обнаружил, что если частицам «запретить» вращаться, то приосевой эффект отсутствует и частицы собираются вокруг оси трубы. Приосевой эффект отсутствует также для деформируемых частиц. Этот результат экспериментально получен Гольдсмитом и Масоном [7]. Эти же авторы отмечают, что приосевой эффект либо отсутствует, либо очень слабо выражен, если размеры взвешенных частиц очень малы по сравнению с радиусом трубы.

Результаты, полученные в [5], показывают, что пинч-эффект проявляется тем сильнее, чем больше значение числа $L = (al / R^2)\mathrm{Re}$, где d — радиус частицы, R — радиус трубы, Re — относительное число Рейнольдса для частицы, l — расстояние от начала трубы до сечения, в котором производятся измерения. Внимательный анализ этих результатов показывает, однако, что со значением числа L связано развитие лишь приосевого эффекта. Пристеночный эффект устанавливается значительно быстрее приосевого и практически не зависит от числа L.

В настоящей работе рассматривается случай, когда плотность взвешенных частиц совпадает с плотностью жидкости, размеры частиц очень малы по сравнению с радиусом трубы. В этом случае влияние взвешенных частиц на динамику взвеси можно свести к увеличению вязкости взвеси в соответствии с концентрацией взвешенных частиц. Естественно ожидать, что при течении такой взвеси будет