

МЕТОД РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВОГО ТРЕХМЕРНОГО ОБТЕКАНИЯ ГЛАДКИХ ТЕЛ

В. Б. МИНОСЦЕВ (Москва)

В работе [4] предложена схема расчета сверхзвукового обтекания гладких тел, использующая аналитическую аппроксимацию газодинамических функций на слоях и метод характеристик для расчета параметров обтекания в узлах фиксированной сетки. В настоящей статье эта схема излагается для трехмерных течений совершенного газа в общем виде для цилиндрической и сферической систем координат, приводятся соотношения для расчета параметров течения в узлах слоя, результаты расчета обтекания ряда конкретных тел и результаты численного исследования предложенной схемы. Рассматриваются трехмерные стационарные течения, обладающие плоскостью симметрии. В приведенных в статье соотношениях все геометрические величины отнесены к некоторому характерному размеру L , компоненты скорости u, v, w и скорость звука a — к некоторой характерной скорости W , плотность ρ — к плотности набегающего потока ρ_∞ , а давление p — к $\rho_\infty W^2$.

§ 1. Схема метода. Рассмотрим трехмерное сверхзвуковое обтекание гладкого тела потоком совершенного газа. Предположим, что все газодинамические функции известны на некоторой «пространственного» типа поверхности Π . Таким образом, для определения течения в сверхзвуковой области обтекания необходимо найти решение смешанной задачи Коши для системы уравнений газовой динамики при известных значениях искомых функций на поверхности Π и граничных условиях на ударной волне

$$\rho v_v = v_{v\infty}, \quad p + v_v v_{v\infty} = p_\infty + v_{v\infty}^2, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v_v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_\infty + \frac{v_{v\infty}^2}{2}$$

$$w + (u \cos \psi + v \sin \psi) \frac{\partial r_0}{\partial z} = w_\infty + \frac{\partial r_0}{\partial z} u_\infty \cos \psi \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \psi} \cos \psi - \sin \psi \right) u + \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \psi} \sin \psi + \cos \psi \right) v = \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \psi} \cos \psi - \sin \psi \right) u_\infty$$

и на поверхности тела

$$v_v = 0 \quad (1.2)$$

В приведенных соотношениях $r_0 = r_0(z, \psi)$ — уравнение поверхности ударной волны в цилиндрической системе координат, а v_v — проекция скорости на нормаль к соответствующей поверхности; в частности на ударной волне

$$v_v = \frac{1}{\Lambda} \left[w \frac{\partial r_0}{\partial z} - \left(\cos \psi + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \psi} \sin \psi \right) u + \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \psi} \cos \psi - \sin \psi \right) v \right] \quad (1.3)$$

$$v_{v\infty} = \frac{1}{\Lambda} \left[w_\infty \frac{\partial r_0}{\partial z} - \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \psi} \sin \psi + \cos \psi \right) u_\infty \right] \quad (1.4)$$

$$\left(\Lambda = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r_0}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \psi} \right)^2} \right)$$

Пусть поверхность тела описывается в обобщенной системе координат κ, χ, ψ аналитической зависимостью $\kappa_N = \kappa_N(\chi, \psi)$, где ψ — меридиональный угол, $\kappa = r, \chi = z$ — для цилиндрической и $\kappa = R, \chi = \theta$ — для сферической систем координат (фиг. 1, а). Введем для каждого $\chi = \text{const}$ нормированную координату

$$\xi = (\kappa - \kappa_N) / (\kappa_0 - \kappa_N)$$

Здесь $\kappa_0 = \kappa_0(\chi, \psi)$ — уравнение поверхности ударной волны.

Будем считать, что параметры течения определены на некоторой поверхности «пространственного типа» $\chi = \chi_0$. Проведем теперь ряд поверхностей $\chi_m = \chi_0 + m \Delta \chi$, $2K$ меридиональных полуплоскостей $\psi_0 = 0, \psi_1, \dots, \psi_K = \pi, \psi_{K+1} = \pi + \psi_1, \dots, \psi_{2K} = \pi + \psi_{K-1}$ и $N+1$ поверхностей $\xi_0 = 1, \xi_1, \dots, \xi_N = 0$. Точки пересечения поверхностей $\xi = \text{const}, \psi = \text{const}, \chi = \text{const}$, образуют узлы разностной сетки (фиг. 1, б). Для каждого $\chi = \text{const}$ при фиксированном ψ параметры течения аппроксимируем степенными полиномами Лагранжа N -й степени, а затем при фиксированном ξ ввиду периодичности всех газодинамических функций по ψ — тригоно-

метрическими полиномами Лагранжа. Таким образом, приближенное решение на каждом слое для четных и нечетных функций ищется соответственно в виде

$$f^m = \sum_0^N \sum_0^K f_{nk}^{*m} \xi^n \cos k\psi, \quad \varphi^m = \sum_0^N \sum_1^K \varphi_{nk}^{*m} \xi^n \sin(k-1)\psi \quad (1.5)$$

а уравнение неизвестной поверхности ударной волны

$$r_0^m = \sum_0^K r_{0k}^{*m} \cos k\psi \quad (1.6)$$

В приведенных формулах f_{nk}^{*m} , φ_{nk}^{*m} , r_{0k}^{*m} — линейные функции значений соответствующих газодинамических параметров в узлах слоя.

Предположим теперь, что решение (1.5) известно на m -м слое, и определим газодинамические параметры на следующем $m+1$ -м слое. Положим вначале все искомые функции

$$f_{nk}^{m+1} = f_{nk}^m$$

По этим значениям проведем назад из каждого узла рассчитываемого слоя конус Маха до пересечения с поверхностью $\chi = \chi_m$. Расчет каждого слоя начинаем с точек ударной волны. Используя одно характеристическое соотношение и соотношения на ударной волне, определим координаты ударной волны и значения газодинамических функций. В работе [1] для расчета точки на скачке использовались два характеристических соотношения, но в работе К. М. Магомедова [2] показано, что при условии непрерывности смешанной производной $(\chi_0)_{\chi\psi}$ достаточно использовать лишь одно. Включение же в расчет точек на скачке двух характеристических соотношений приводит к неточности счета параметров в этих точках, что прежде всего сказывается в окружной составляющей скорости.

Для расчета внутренних точек используются соотношения на трех избранных бихарактеристиках и линии тока; для точки, лежащей на поверхности тела, — соотношения на двух бихарактеристиках и условия на поверхности тела. При расчете все функции в точках пересечения бихарактеристик с поверхностью $\chi = \chi_m$ и их производные по направлению, касательному к линии пересечения конуса Маха с этой поверхностью, определяются по интерполяционным полиномам (1.5).

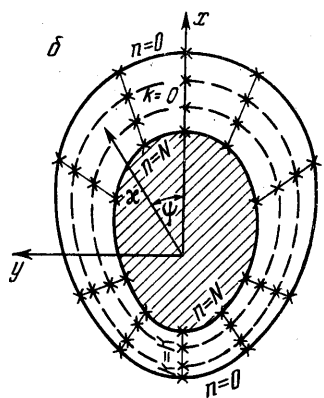
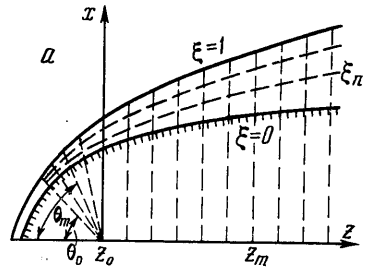
Используемая схема трехмерного метода характеристик, как показано в [2], является схемой первого порядка в направлении χ . Поэтому проводить итерации для уточнения положения бихарактеристик, линий тока и искомых функций в рассчитываемых узлах не имеет смысла.

По найденным значениям газодинамических функций в узлах рассчитываемого слоя определяем коэффициенты интерполяционных полиномов. Получив решение (1.5) для $m+1$ -го слоя, переходим к расчету следующего слоя.

§ 2. Соотношения для расчета газодинамических функций в узлах. Предположим, что решение (1.5) известно на слое z_m , и опишем расчет параметров в узлах следующего слоя.

1°. Расчет точек, расположенных между ударной волной и телом ($0 < n < N$). Уравнение характеристического коноида, исходящего из рассчитываемого узла назад, имеет следующий вид

$$F(x, y, z) = (v^2 + w^2 - a^2)_{nk}^m (x - x_{nk}^{m+1})^2 + (u^2 + w^2 - a^2)_{nk}^m (y - y_{nk}^{m+1})^2 + (u^2 + v^2 - a^2)_{nk}^m (z - z_{nk}^{m+1})^2 - 2u_{nk}^m v_{nk}^m (x - x_{nk}^{m+1})(y - y_{nk}^{m+1}) - 2u_{nk}^m w_{nk}^m (x - x_{nk}^{m+1})(z - z_{nk}^{m+1}) - 2v_{nk}^m w_{nk}^m (y - y_{nk}^{m+1})(z - z_{nk}^{m+1}) = 0 \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Координаты рассчитываемого узла x_{nk}^{m+1} , y_{nk}^{m+1} , z_{nk}^{m+1} определяются при этом для заданных ξ_n и ψ_k по формулам:

$$x_{nk}^{m+1} = [r_{Nk}^{m+1} + \xi_n(r_0 - r_N)_k^{m+1}] \cos \psi_k \quad (2.2)$$

$$y_{nk}^{m+1} = [r_{Nk}^{m+1} + \xi_n(r_0 - r_N)_k^{m+1}] \sin \psi_k, \quad z_{nk}^{m+1} = z_{nk}^m + \Delta z = z_0 + m \Delta z$$

Входящая в эти соотношения координата r_{Nk}^{m+1} определяется из заданного уравнения поверхности тела $r_N = r_N(z, \psi)$, а определение координаты скачка r_{0k}^{m+1} будет описано в п. 3° данного параграфа.

Обозначим параметры течения в точке пересечения линии тока, исходящей из рассчитываемого узла, с плоскостью $z = z_m$ индексом \vee . Эта точка имеет координаты

$$x_{\vee}^m = x_{nk}^{m+1} - (u/w)_{nk}^m \Delta z, \quad y_{\vee}^m = y_{nk}^{m+1} - (v/w)_{nk}^m \Delta z \quad (2.3)$$

Пересечение характеристического коноида (2.1) с плоскостью $z = z_m$ в полярной системе координат, полюс которой расположен в точке с координатами x_{\vee}^m , y_{\vee}^m , образует кривую

$$r = \frac{\sqrt{D} - B}{A} \Delta z \quad (2.4)$$

$$D = (u^2 + v^2 + w^2 - a^2)_{nk}^m \{ (a_{nk}^m)^2 [(w_{\vee}^m)^2 + (v_{\vee}^m \cos \delta - u_{\vee}^m \sin \delta)^2] - [w_{nk}^m (v_{\vee}^m \cos \delta - u_{\vee}^m \sin \delta) - w_{\vee}^m (v_{nk}^m \cos \delta - u_{nk}^m \sin \delta)^2] \}$$

$$B = (v_{\vee}^m u_{nk}^m - u_{\vee}^m v_{nk}^m) (v_{nk}^m \cos \delta - u_{nk}^m \sin \delta) + w_{nk}^m w_{\vee}^m (u_{nk}^m \cos \delta + v_{nk}^m \sin \delta) - (w^2 - a^2)_{nk}^m (u_{\vee}^m \cos \delta + v_{\vee}^m \sin \delta)$$

$$A = w_{\vee}^m [(v_{nk}^m \cos \delta - u_{nk}^m \sin \delta)^2 + (w^2 - a^2)_{nk}^m]$$

В приведенных соотношениях r — радиус введенной полярной системы координат, а δ — угол, образуемый радиусом-вектором r с осью x .

Таким образом, задав $\delta = \delta_i$, по формуле (2.4) всегда можно определить r_i , а следовательно, — и координаты точки пересечения любой бихарактеристики с плоскостью $z = z_m$

$$x_{\delta_i}^m = x_{\vee}^m + r_i \cos \delta_i, \quad y_{\delta_i}^m = y_{\vee}^m + r_i \sin \delta_i \quad (2.5)$$

Вдоль линии тока выполняются следующие соотношения

$$\rho_{\vee}^m dp - \gamma p_{\vee}^m d\rho = 0, \quad \rho_{\vee}^m V_{\vee}^m dV + dp = 0 \quad (2.6)$$

а на характеристических плоскостях

$$B_2 \frac{d_{s_1} p}{\rho} - a R_2 d_{s_1} \mathbf{V} = B_1 \frac{d_{s_2} p}{\rho} - a R_1 d_{s_2} \mathbf{V} \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{R}_h = \mathbf{V} \times \mathbf{s}_h$, $B_h = \mathbf{n}(\mathbf{V} \times \mathbf{s}_h)$, ($h = 1, 2$), \mathbf{n} — вектор внешней нормали к характеристической плоскости; $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ — векторы, лежащие в характеристической плоскости, содержащей избранную бихарактеристику. Производная

$$d_{s_h} f = \frac{\partial f}{\partial x} s_{hx} + \frac{\partial f}{\partial y} s_{hy} + \frac{\partial f}{\partial z} s_{hz}$$

Характеристические соотношения в виде (2.7) получены в работе [3]. В качестве \mathbf{s}_1 выбираем единичный вектор, направленный по касательной к кривой (2.4), в качестве \mathbf{s}_2 — вектор, совпадающий с бихарактеристикой и направленный к рассчитываемой точке. Так как $\mathbf{s}_2 = b(\mathbf{V} - a\mathbf{n})$, где $b = \text{const}$, коэффициент B_2 в формуле (2.7) обращается в нуль.

Используя записанные в разностной форме соотношения вдоль трех избранных бихарактеристик и уравнение Бернулли (второе уравнение (2.6)), получим

$$A_i u_{nk}^{m+1} + B_i v_{nk}^{m+1} + C_i w_{nk}^{m+1} + K p_{nk}^{m+1} = D_i \quad (2.8)$$

причем

$$A_i = \rho_{\downarrow}^m u_{\downarrow}^m, B_i = \rho_{\downarrow}^m v_{\downarrow}^m, C_i = \rho_{\downarrow}^m w_{\downarrow}^m, K_i = 1$$

$$D_i = \rho_{\downarrow}^m + A_i u_{\downarrow}^m + B_i v_{\downarrow}^m + C_i w_{\downarrow}^m,$$

а для трех избранных бихарактеристик ($i = 1, 2, 3$)

$$A_i = [a\rho(vs_{1z} - ws_{1y})]_{\delta_i}^m, \quad B_i = [a\rho(ws_{1x} - us_{1z})]_{\delta_i}^m, \quad C_i = [a\rho(us_{1y} - vs_{1x})]_{\delta_i}^m,$$

$$K_i = -[n_x(vs_{1z} - ws_{1y}) + n_y(ws_{1x} - us_{1z}) + n_z(us_{1y} - vs_{1x})]_{\delta_i}^m$$

$$D_i = K_i p_{\delta_i}^m + \{a\rho[(vs_{2z} - ws_{2y})d_{s_1}u + (ws_{2x} - us_{2z})d_{s_1}v +$$

$$+ (us_{2y} - vs_{2x})d_{s_1}w + (vs_{1z} - ws_{1y})u + (ws_{1x} - us_{1z})v + (us_{1y} - vs_{1x})w]\}_{\delta_i}^m$$

Для используемой в этом параграфе цилиндрической системы координат

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\delta_i}^m = \left[\frac{\cos \psi}{r} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{r \sin \psi + r_{\psi} \cos \psi}{r(r_0 - r_N)} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right]_{\delta_i}^m$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\delta_i}^m = \left[\frac{r \cos \psi + r_{\psi} \sin \psi}{r(r_0 - r_N)} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial f}{\partial \psi} \right]_{\delta_i}^m \quad (2.9)$$

Входящие в эти соотношения производные $\partial f / \partial \psi$ и $\partial f / \partial \xi$ находим из аппроксимирующих формул (1.5) после определения $\psi_{\delta_i}^m$ и $\xi_{\delta_i}^m$, соответствующих вычисленным по (2.5) значениям $x_{\delta_i}^m$ и $y_{\delta_i}^m$. После определения из системы (2.8) составляющих скорости u_{nk}^{m+1} , v_{nk}^{m+1} , w_{nk}^{m+1} и давления p_{nk}^{m+1} по первому соотношению (2.6), записанному в разностной форме, находим плотность

$$\rho_{nk}^{m+1} = \rho_{\downarrow}^m + \frac{p_{nk}^{m+1} - p_{\downarrow}^m}{(a_{\downarrow}^m)^2} \quad (2.10)$$

2°. Точка, лежащая на поверхности тела, $n = N$. Для точки, расположенной на поверхности тела, описываемого уравнением $\Phi_N(x, y, z) = 0$, сохраняют силу все соотношения п. 1°, только вместо одного из характеристических соотношений (например, $i = 3$ в (2.8)) используется условие непротекания

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{Nk}^{m+1} u_{Nk}^{m+1} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{Nk}^{m+1} v_{Nk}^{m+1} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{Nk}^{m+1} w_{Nk}^{m+1} = 0 \quad (2.11)$$

и, следовательно,

$$A_3 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{Nk}^{m+1}, \quad B_3 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{Nk}^{m+1}, \quad C_3 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{Nk}^{m+1}$$

$$K_3 = D_3 = 0$$

3°. Расчет точек, расположенных на ударной волне, $n = 0$. На поверхности ударной волны должны выполняться соотношения (1.1). На основании четвертого уравнения (1.1) полагая

$$(\partial r / \partial z)_{0k}^{m+1} = (\partial r / \partial z)_{0k}^m$$

можно определить координаты всех необходимых точек ударной волны рассчитываемого слоя

$$r_{0k}^{m+1} = r_{0k}^m + \frac{w_{0k}^m - w_{\infty}}{(u_{\infty} - u_{0k}^m) \cos \psi_k - v_{0k}^m \sin \psi_k} \Delta z \quad (2.12)$$

После этого можно найти интерполяционные коэффициенты r_{0k}^{*m+1} и, представив уравнение ударной волны в виде (1.6), определить $\partial r / \partial \psi_{0k}^{m+1}$.

Затем из (1.4) найдем $(v_{\infty})_{0k}^{m+1}$, а из первых трех уравнений (1.1)

$$\rho_{0k}^{m+1} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} [(v_{\infty})_{0k}^{m+1}]^2 \left\{ p_{\infty} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} [(v_{\infty})_{0k}^{m+1}]^2 \right\}^{-1}$$

$$(v_{\infty})_{0k}^{m+1} = (v_{\infty})_{0k}^{m+1} / \rho_{0k}^{m+1}, \quad p_{0k}^{m+1} = p_{\infty} + [(v_{\infty})_{0k}^{m+1}]^2 - (v_{\infty})_{0k}^{m+1} (v_{\infty})_{0k}^{m+1} \quad (2.13)$$

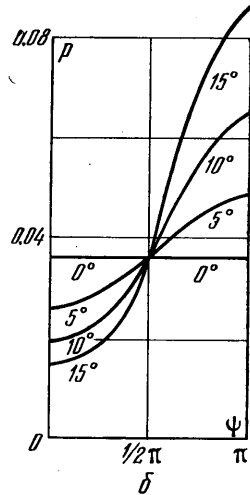
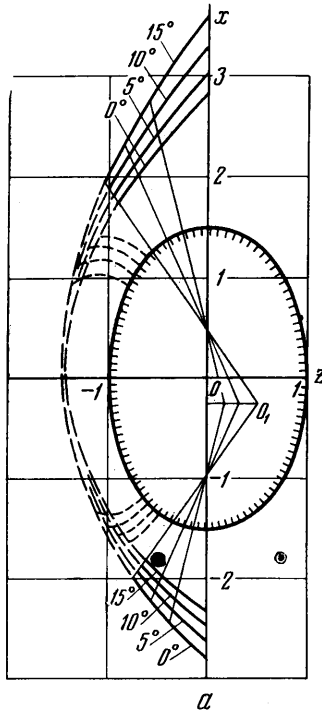
Теперь для определения составляющих скорости получим систему из двух последних уравнений (1.1) и уравнения (1.3). После нахождения всех газодинамических функций за скачком проверим, удовлетворяется ли с заданной точностью характеристическое соотношение (для $\delta_i = \psi_{\infty}^m + \pi$), если окажется, что

$$|A_i u_{0k}^{m+1} + B_i v_{0k}^{m+1} + C_i w_{0k}^{m+1} + K_i p_{0k}^{m+1} - D_i| > \varepsilon,$$

изменим $(\partial r / \partial z)_{0k}^{m+1}$ и снова проведем расчет, и так, пока не добьемся выполнения характеристического соотношения с заданной точностью ε . Для подбора $(\partial r / \partial z)_{0k}^{m+1}$ удобно использовать метод Ньютона.

В случае задания начальных данных на конической поверхности $\theta = \theta_0$ (фиг. 1, а) необходимо уметь рассчитывать течения в области от $\theta = \theta_0$

до $\theta = \pi/2$. Соотношения для расчета газодинамических параметров в узлах сетки, образованной пересечением поверхностей $\theta = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, $\xi = \text{const}$, получаются аналогично тому, как это делается для сетки $z = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, $\xi = \text{const}$. Разумеется, что в случае поверхностей $\theta = \text{const}$ отыскивается пересечение характеристического коноида, исходящего назад из рассчитываемого узла, уже не с



Фиг. 2

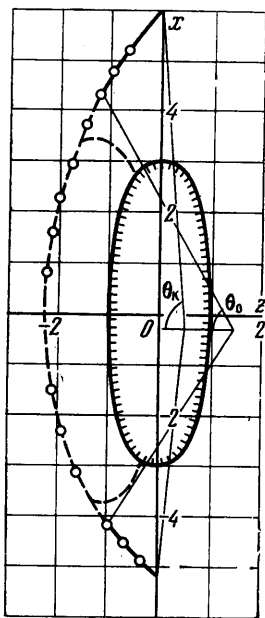
плоскостью, а с конической поверхностью $\theta = \text{const}$, что несколько сложнее.

§ 3. Расчет обтекания тел различной формы и численное исследование метода. По описанному выше алгоритму были составлены программы для ЭЦВМ по расчету газодинамических параметров на поверхностях $\theta = \text{const}$ и плоскостях $z = \text{const}$. Дозвуковая и смешанная области обтекания были рассчитаны Г. П. Тиняковым (см., например, [4, 5]) по методу, предложенному Г. Ф. Телениным. Вершина конической поверхности $\theta = \theta_0$ (фиг. 1, а), на которой выдавались начальные данные, обычно не лежала на оси симметрии тела. Для лучшей аппроксимации функций степенными полиномами по ξ в качестве узлов интерполяции использовались узлы полинома Чебышева. В приведенных ниже расчетных данных для эллипсоидов и тел, описываемых уравнением (3.1) $W = V_{\text{max}}$, а $L = b$ (малая полуось эллипсоида) и $L = R_c$ (радиус сферы, к которой близка лобовая часть тела, описываемого уравнением (3.1); для сферы $W = V^*$ (критическая скорость звука), $L = R_c$).

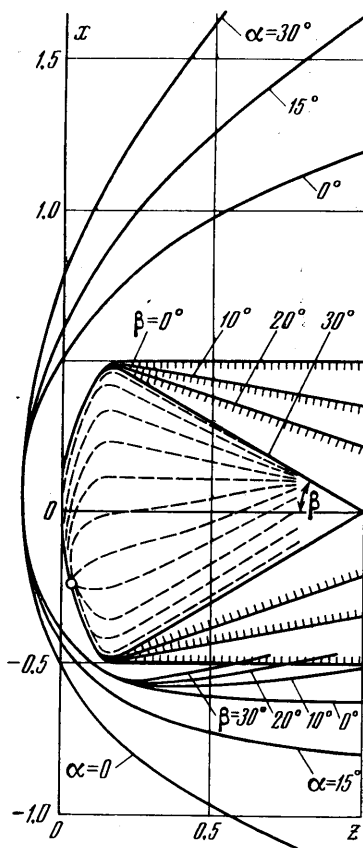
На фиг. 2, а, приведено положение ударных волн, образующихся при обтекании эллипсоида вращения с отношением полуосей $\delta = a/b = 1.5$ (где a — большая полуось) при $M_\infty = 3$ и углах атаки $\alpha = 0, 5, 10, 15^\circ$. На фиг. 2, б приведено распределение давления в зависимости от меридионального угла ψ в плоскости $\theta = 1/2\pi$, при этом центр системы координат уже совпадает с геометрическим центром эллипсоида. Для того чтобы получить эти данные, приходится одновременно с разворотом по углу θ передвигать центр системы координат вперед (фиг. 2, а), а затем, после разворота до $\theta = 1/2\pi$, сдвинуть его на ось симметрии. На фиг. 3 для $\delta = 3.07$, $M_\infty = 3$ и $\alpha = 5^\circ$ расчетное положение ударной волны сравнивается с экспериментальными данными Ю. Я. Карпейского.

В работе [4] на основании расчетов было отмечено, что тела, типа затупленных по сфере конусов, контуры которых претерпевают разрыв кривизны, необходимо рассчитывать по данному методу отдельно по областям, расположенным до разрывной характеристической поверхности и за ней. Для двумерных течений в настоящее время расчет по такой схеме для тел с разрывом кривизны уже проведен З. Д. Запрыновым [6]. Однако, как видно из приведенного в [4] примера, хорошие результаты получаются для тел такого типа, составленных из отдельных аналитических участков, но с непрерывной кривизной.

На основании проведенных расчетов можно заключить, что для тел с разрывом кривизны контура можно добиться хороших результатов, проводя в окрестности разрыва кривизны аналитическое сглаживание контура по нескольким первым производным.



Фиг. 3



Фиг. 4

Однако, если это возможно, удобнее заменять все исследуемое тело близким к нему телом с аналитическим контуром. В качестве такого примера на фиг. 4, и 5а, б, в, для $M_\infty = \infty$ и различных углов атаки α приведены результаты расчетов обтекания тела, лобовая поверхность которого близка к сферической, а боковая — к конической. Уравнение контура тела в сферической системе координат, центр которой совпадает с центром сферы, близкой к лобовой части тела, будет

$$R^n + \frac{1}{\beta^n} \left(\text{arc tg } \frac{R \sin \theta}{R \cos \theta + l} \right)^n = 1, \quad l = \frac{\sin(\theta^* - \beta)}{\sin \beta} \quad (3.4)$$

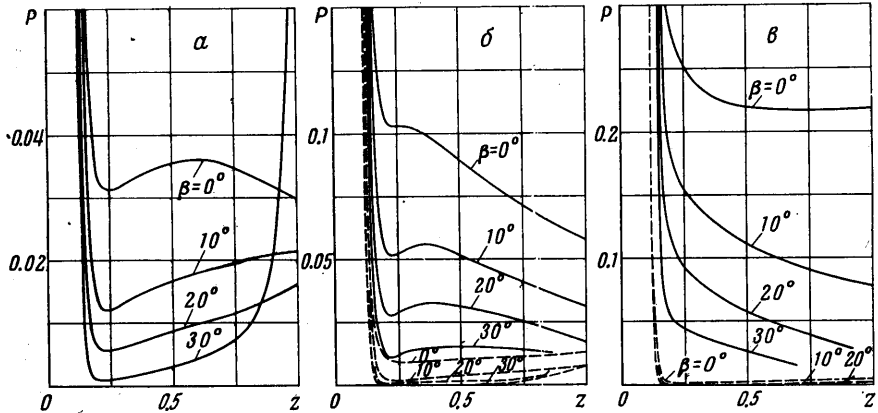
Здесь θ^* — центральный полуугол лобового сферического сегмента, β — угол наклона боковой конической поверхности.

Уравнение (3.1) при $\beta = 0$ преобразуется к виду

$$R^n [1 + (\sin \theta / \sin \theta^*)^n] = 1$$

При очень больших n уравнение (3.1) хорошо аппроксимирует поверхность тела с изломом образующей. Однако получить гладкое решение для контура, описываемого уравнением (3.1), при $n > 40$ по составленным программам не удается. На фиг. 4, 5 приведены результаты расчетов для $n = 40$ и $\theta^* = 30^\circ$. При $\alpha = 15^\circ$ и $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 20$ и 30° провести расчет обтекания до $z = 1.0$ не удается, так как окружная скорость на поверхности тела в теневой области становится сверхзвуковой и поверхности $z = \text{const}$ оказывается не «пространственного типа».

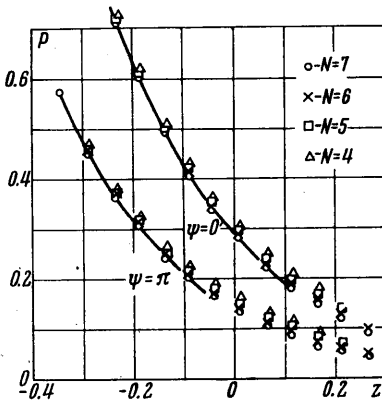
Пунктиром на фиг. 4 приведены линии тока для случая $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Кружочком отмечено положение критической точки. Ударные волны при $\alpha = 0$ и 15° на рассчитанной длине практически не зависят от β , при $\alpha = 30^\circ$ на наветренной стороне ударные волны для различных β разные. На фиг. 5, а — в приведено распределение давления по поверхности тела соответственно для углов атаки $\alpha = 0, 15^\circ$,



Фиг. 5

30° , пунктиром на фиг. 5, б и в приведено распределение давления при $\psi = 0$ (подветренная сторона обтекания), сплошной линией — при $\psi = \pi$ (наветренная сторона обтекания).

Отметим, что радиус скругления тела, описываемого уравнением (3.1), меняется плавно от $R = R_c$ до ∞ , этим объясняется плавный характер кривых распределения давления. Поэтому естественно, что распределение давления в области миделя на теле, описываемом уравнением (3.1), будет существенно отличаться от распределения давления на поверхности сегментального тела в области заданного постоянного скругления, хотя параметры на лобовой и боковой поверхностях и суммарные характеристики будут близки. Размер диаметра миделя D_m рассчитанных тел зависит от β и составляет 1.0 для $\beta = 0^\circ$, 0.982 для $\beta = 10^\circ$, 0.974 для $\beta = 20^\circ$, 0.968 для $\beta = 30^\circ$.

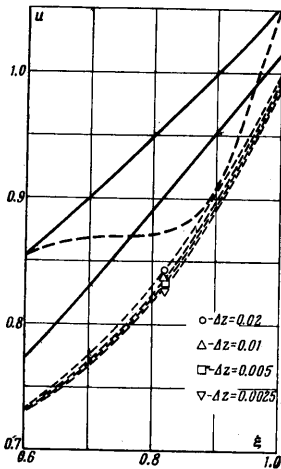


Фиг. 6

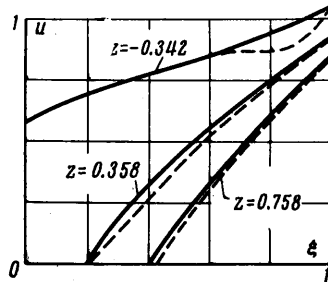
Кроме исследования обтекания различных тел, проводились также методические расчеты с различными K и N , которые показали, что для полей обтекания без резких изменений газодинамических функций хорошие результаты получаются уже при $K = 3$ и $N = 7$. В качестве примера влияния степени аппроксимирующих полиномов по ξ на распределение давления по телу приведем расчеты для сферы при $M_\infty = 20$ (фиг. 6). Сплошной кривой приведены результаты расчетов Ю. Н. Дьяконова, проведенные по методу сеток, предложенному в работе [7]. Расчет обтекания сферы проводился в повернутой системе координат и угол между осью z и направлением набегающего потока $\alpha = 5^\circ$. Центр системы координат расположен в центре сферы. Для данного случая результаты расчета при $K = 3, 4, 5$ практически совпа-

дают. Аналогичная сходимость при увеличении степени аппроксимации имеет место и для полей обтекания с более резким изменением газодинамических параметров по сравнению с полями обтекания сферы. Однако при расчетах полей с большими градиентами (как, например, у тел, описываемых уравнением (3.1) при больших n) для получения надежных распределений газодинамических функций необходимо увеличивать степень аппроксимирующих полиномов N . Так, для приведенных на фиг. 4, 5 данных расчета $N = 11$.

Влияние величины шага и наличия единичных ошибок в начальных данных на точность получаемых результатов для приведенного выше случая обтекания сферы было исследовано в дипломной работе Г. Г. Нерсесова, выполненной на механико-математическом факультете МГУ. Анализ расчетных данных, проведенных в широком диапазоне изменения шагов (от 100 до 2000), показывает, что в рассмотренном диапазоне шагов ошибки округления не сказываются на точности получаемых результатов. На фиг. 7, 8 пунктирными линиями приводятся результаты расчета при наличии единичной ошибки в составляющей скорости u ($\Delta u/u \approx 10\%$ при $z = -0.342$, $\psi = 45^\circ$, $\xi = 0.85$), сплошными линиями приведены результаты расчета с правильными данными. Из фиг. 7 видно, что сходимость имеет место и при наличии ошибки, но, естественно, к другому решению, определяемому неправильными начальными данными. В дальнейшем отличие между решения-



Фиг. 7



Фиг. 8

ями, определяемыми соответственно правильными и неправильными начальными данными, уменьшается (фиг. 8), при этом значения искомым функций при других ψ изменяются мало.

В целом же приведенные методические расчеты позволяют сделать вывод, что метод сходится с увеличением степени аппроксимирующих полиномов и уменьшением шага и в исследованном диапазоне шагов и степеней аппроксимирующих полиномов устойчив. Автор благодарит Г. Ф. Теленина за внимание к данной работе.

Поступило 10 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Запьянов З. Д., Миносцев В. Б. Метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
2. Магомедов К. М. Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 2.
3. Русанов В. В. Характеристики общих уравнений газовой динамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
4. Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета пространственного обтекания тел с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 5.
5. Тиняков Г. П. Исследование трехмерного сверхзвукового обтекания затупленных тел. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
6. Запьянов З. Д. Исследование сверхзвукового обтекания плоских и осесимметричных тел различной формы. Изв. АН СССР, МЖТ, 1967, № 2.
7. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, № 6.