

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ**

З. Д. ЗАПРЯНОВ (Москва)

В работе [1] предложен метод расчета сверхзвукового обтекания гладких тел. В настоящей статье приводятся схема расчета и расчетные формулы для определения газодинамических функций в узлах линий  $\varphi = \text{const}$ . Проведено сравнение некоторых из полученных результатов с результатами других работ [2, 3]. Приводятся также результаты расчета обтекания совершенным газом эллипсоидов вращения ( $\delta = 2.3$ ) и обратных конусов со сферическим и эллипсоидальным затушениями.

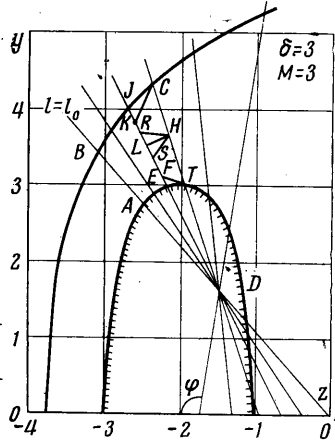
**1. Схема расчета. Расчетные формулы.** Пусть тело обтекается совершенным газом под нулевым углом атаки. Уравнения установившегося двумерного течения невязкого газа в характеристической форме имеют вид

$$\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{A}{B}, \quad \frac{dw^2}{2} + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} A = \delta(1 - \delta^2) \\ B = 1/4(1 - \delta^2)^2 - \delta^2 \end{array} \right) \quad \delta = \text{tg } 1/4\theta \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{1,2} = \frac{\beta A \pm B}{\beta B \mp A}, \quad \frac{4}{1 + \delta^2} d\delta \pm \frac{\beta dp}{\rho w^2} \pm v \frac{A dy}{y(\beta A \pm B)} = 0, \quad \beta = \sqrt{M - 1}$$

Здесь  $z, y$  — декартовы координаты, отнесенные к характерной длине  $L$ , через  $\theta$  обозначен угол наклона вектора скорости к оси  $z$ ; через  $\rho, w, p$  — плотность, скорость, давление, отнесенные к  $\rho_\infty, W, p_\infty$  соответственно;  $W$  — характерная скорость;  $\delta, \beta$  — переменные Эйлера ( $v = 0$  — в плоском случае и  $v = 1$  — в осесимметричном).

В некоторых случаях начальные данные для расчета сверхзвуковой области могут быть заданы на луче, который не перпендикулярен к оси  $z$ . Рассмотрим схему метода [1] в случае, когда расчет ведется на лучах  $\varphi = \text{const}$  (фиг. 1), проходящих через фиксированную точку  $D(a, b)$ . Эта точка может совпадать или не совпадать с центром полярной системы координат. Введем для каждого фиксированного  $\varphi$ , наряду с  $r$  (где  $r, \varphi$  — полярные координаты), переменную  $\xi = (r - r^0) / (r_s - r^0)$ , где  $r_s$  — координата ударной волны, а  $r^0$  — координаты поверхности тела данного  $\varphi$ .



Фиг. 1

Пусть на некотором луче  $\varphi = \varphi^k$ , не имеющем характеристического направления ни в одной точке, параметры течения известны в фиксированных узлах  $\xi_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ). Приближенное решение на следующем луче  $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \Delta\varphi$  ищется в виде аппроксимационных полиномов Лагранжа

$$f_i = a_{i0}(\varphi) + a_{i1}(\varphi)\xi + \dots + a_{i, n-1}(\varphi)\xi^{n-1} \quad (i = 1, \dots, 5) \quad (1.2)$$

Здесь коэффициенты  $a_{ij}(\varphi)$  — линейные функции газодинамических параметров  $f_i$  в точках  $\xi_l$  для рассчитываемого луча.

Вначале газодинамические функции в узлах  $\xi_l$  на слое  $\varphi = \varphi^{k+1}$  положим такими же, как и в соответствующих узлах на слое  $\varphi = \varphi^k$ . По этим значениям из рассчитываемых внутренних узлов (см. фиг. 1) проведем характеристики назад до их пересечения с лучом  $\varphi = \varphi^k$ .

Координаты точек пересечения трех характеристик, выходящих из рассчитываемого узла на слое  $\varphi = \varphi^{k+1}$ , с лучом  $\varphi = \varphi^k$  находятся по формулам

$$z_s^k = \frac{(a - l_0)(y_H^{k+1} - L_1 z_H^{k+1}) + b l_0}{b - (a - l_0)L_1}, \quad y_s^k = \frac{b(z_s^k - l_0)}{a - l_0} \quad (1.3)$$

$$z_R^k = \frac{(a - l_0)(y_H^{k+1} - L_2 z_H^{k+1}) + b l_0}{b - (a - l_0)L_2}, \quad y_R^k = \frac{b(z_R^k - l_0)}{a - l_0}$$

$$z_L^k = \frac{(a - l_0)(y_H^{k+1} - L_0 z_H^{k+1}) + b l_0}{b - (a - l_0)L_0}, \quad y_L^k = \frac{b(z_L^k - l_0)}{a - l_0}$$

В соотношениях (1.3) величины  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_0$  определяются следующими формулами:

$$L_1 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta A + B}{\beta B - A} \right)_s^k + \left( \frac{\beta A + B}{\beta B - A} \right)_H^{k+1} \right]$$

$$L_2 = \left[ \left( \frac{\beta A - B}{\beta B + A} \right)_R^k + \left( \frac{\beta A - B}{\beta B + A} \right)_H^{k+1} \right], \quad L_0 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{A}{B} \right)_L^k + \left( \frac{A}{B} \right)_H^{k+1} \right] \quad (1.4)$$

Здесь  $l_0$  — абсцисса точки пересечения луча  $\varphi = \varphi^k$  с осью  $z$ .

Параметры течения в точках пересечения находим по полиномам Лагранжа, построенным для луча  $\varphi = \varphi^k$ .

Новые значения искомых функций на слое  $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \Delta\varphi$  рассчитываются по формулам

$$\delta_H^{k+1} =$$

$$= \frac{M_1 N_2 \delta_s^k + M_2 N_1 \delta_R^k + N_1 N_2 (p_s^k - p_R^k) + \nu Q_2 N_1 (y_H^{k+1} - y_R^k) - \nu Q_1 N_2 (y_H^{k+1} - y_s^k)}{M_1 N_2 + M_2 N_1}$$

$$p_H^{k+1} = \frac{M_2 (\delta_H^{k+1} - \delta_R^k) + N_2 p_R^k - \nu Q_2 (y_H^{k+1} - y_R^k)}{N_2} \quad (1.5)$$

$$\rho_H^{k+1} = \rho_L^k + m(p_H^{k+1} - p_L^k), \quad a_H^{k+1} = \sqrt{\gamma p_H^{k+1} / \rho_H^{k+1}}$$

$$w_H^{k+1} = \sqrt{(w^2)_L^k - g(p_H^{k+1} - p_L^k)}, \quad \beta_H^{k+1} = \sqrt{(M^2)_H^{k+1} - 1}$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{4}{1 + \delta^2} \right)_s^k + \left( \frac{4}{1 + \delta^2} \right)_H^{k+1} \right], \quad N_1 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta}{\rho w^2} \right)_s^k + \left( \frac{\beta}{\rho w^2} \right)_H^{k+1} \right]$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{4}{1 + \delta^2} \right)_R^k + \left( \frac{4}{1 + \delta^2} \right)_H^{k+1} \right], \quad N_2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta}{\rho w^2} \right)_R^k + \left( \frac{\beta}{\rho w^2} \right)_H^{k+1} \right]$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{A}{y(\beta A + B)} \right]_s^k + \left[ \frac{A}{y(\beta A + B)} \right]_H^{k+1} \right\}, \quad m = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{a^2} \right)_L^k + \left( \frac{1}{a^2} \right)_H^{k+1} \right]$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{A}{y(\beta A - B)} \right]_R^k + \left[ \frac{A}{y(\beta A - B)} \right]_H^{k+1} \right\}, \quad g = \left( \frac{1}{\rho} \right)_L^k + \left( \frac{1}{\rho} \right)_H^{k+1} \quad (1.6)$$

После того, как все функции в точке  $H$  определены, делается следующая итерация по той же схеме и т. д. При этом итерации проводятся до тех пор, пока они дают верные знаки.

Точка пересечения скачка  $dy/dz = \text{tg } \sigma = \tau$  и луча  $\varphi = \varphi^{k+1}$  имеет координаты

$$z_c^{k+1} = \frac{(a - l_1)(y_j^k - \tau_c^{k+1} z_j^k) + b l_1}{b - (a - l_1)\tau_c^{k+1}}, \quad y_c^{k+1} = \frac{b(z_c^{k+1} - l_1)}{a - l_1} \quad (1.7)$$

где  $l_1$  — абсцисса точки пересечения луча  $\varphi = \varphi^{k+1}$  с осью  $z$ . Параметр  $r$  для этой точки определяется формулой

$$r_c^{k+1} = \sqrt{(z_c^{k+1} - l_1)^2 + (y_c^{k+1})^2}$$

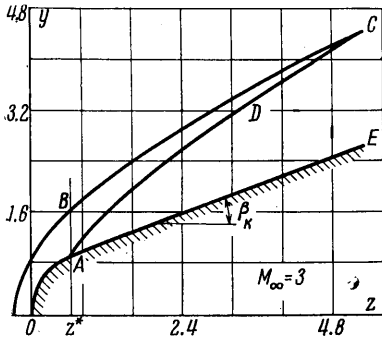
Значения газодинамических функций в точке  $C$  на скачке вычисляются по соответствующим условиям на скачке уплотнения.

Угол наклона скачка  $\sigma$  подбирается из условия удовлетворения характеристического соотношения для характеристики  $KS$ .

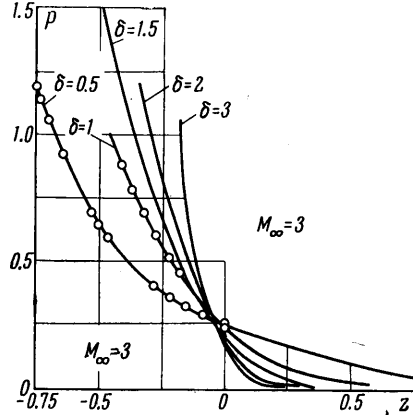
Если уравнение поверхности тела имеет вид  $y = f(z)$ , то из условия  $w_n = 0$  значение параметра  $\delta$  на поверхности тела в точке  $T$  определяется сразу

$$\delta_{\tau^{k+1}} = \text{tg} \frac{\text{arc tg } f'(z_{\tau^{k+1}})}{4} \quad (1.8)$$

Положив в первом приближении  $r_{\tau}$ ,  $\rho_{\tau}$ ,  $w_{\tau}$ ,  $\beta_{\tau}$  равными их значениям в точке  $E$ , проведем из точки  $Q$  характеристику второго семейства до пересечения с лучом  $\varphi = \varphi^k$ . Определив затем соответствующие значения  $\xi_F$ , найдем значения газодинамических функций в точке  $F$ .



Фиг. 2

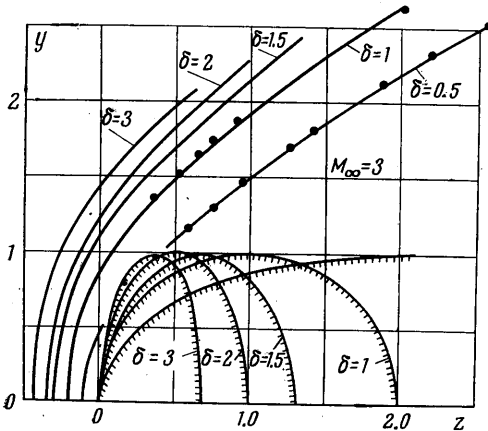


Фиг. 3

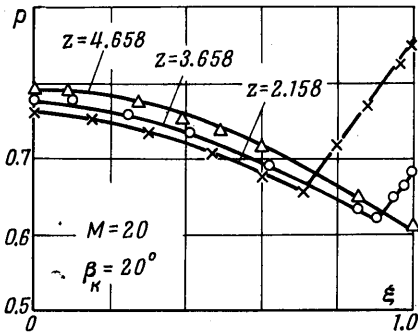
Из характеристического соотношения для второй характеристики находим давление

$$p_{\tau^{k+1}} = [M(\delta_{\tau^{k+1}} - \delta_F^k) + Np_F^k - \sqrt{Q}(y_{\tau^{k+1}} - y_F^k)]N^{-1} \quad (1.9)$$

где  $M$ ,  $N$  и  $Q$  определяются по формулам, аналогичным формулам (1.6).



Фиг. 4



Фиг. 5

Из соотношений на линии тока определены значения других искомых функций

$$\rho_{\tau^{k+1}} = \rho_E^k + m(\rho_{\tau^{k+1}} - \rho_E^k), \quad a_{\tau^{k+1}} = (\gamma \rho_{\tau^{k+1}} / \rho_{\tau^{k+1}})^{1/2}$$

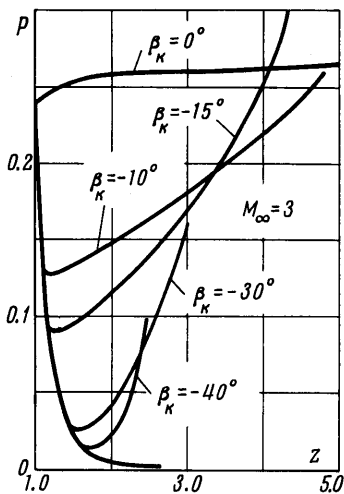
$$w_{\tau^{k+1}} = \sqrt{(w^2)_E^k - g(p_{\tau^{k+1}} - p_E^k)}, \quad \beta_{\tau^{k+1}} = \sqrt{(M^2)_{\tau^{k+1}} - 1}$$

После определения новых значений искомых функций в точке уточняется положение второй характеристики, и процесс итерации продолжается до тех пор, пока они дают верные знаки.

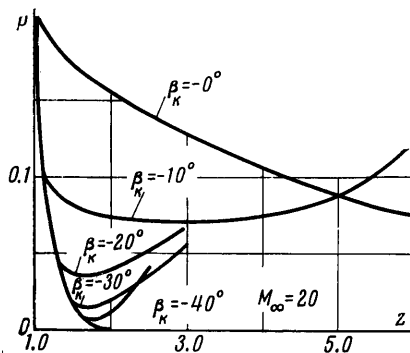
Если кривизна поверхности обтекаемого тела на некоторой линии претерпевает разрыв, то первые производные газодинамических величин рвутся вдоль характеристической поверхности, выходящей из линии разрыва контура. Как показывает опыт, в этом случае решение по данному методу надо строить по областям.

Изложенная схема метода расчета обтекания гладких тел легко обобщается на случай обтекания конуса с эллипсоидальным или сферическим закруглениями, для которых кривизна претерпевает разрыв в точке сопряжения. Из этой точки в меридиональной плоскости (фиг. 2) выходит характеристика, которая отделяет область влияния эллипсоидальной (сферической) части тела  $CBAD$  от области влияния конуса  $DAE$ . В этом случае аппроксимационные полиномы Лагранжа строятся на каждой прямой  $z = \text{const}$  для каждой области отдельно. Положение характеристики, на которой рвутся первые производные искомых функций, определяется в процессе решения задачи.

**2. Некоторые результаты расчетов.** С целью проверки возможностей метода и исследования поведения газодинамических функций при обтекании различных тел проведен ряд расчетов. Часть результатов проведенных расчетов сравнивается с соответствующими результатами, полученными обычным методом характеристик [2] и методом сечек [3]. В основном по  $\xi$  бралось восемь точек ( $n = 8$ ), которые располагались в нулях полинома Чебышева.



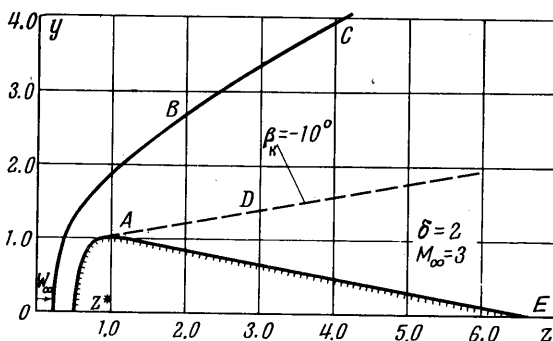
Фиг. 6



Фиг. 7

Для всех примеров дозвуковая и трансзвуковая области рассчитывались С. М. Гиляским и М. Г. Лебедевым по методу Г. Ф. Теленина (см. [4, 5]).

Рассчитывалось семейство эллипсоидов вращения, для которых параметр  $\delta = b'/a'$  ( $a'$  и  $b'$  — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипсоида) менялся



Фиг. 8

в диапазоне от 0.5 до 3. Таким образом, метод был применен как для тел с малыми изменениями кривизны, так и для случая, когда эти изменения большие. Во всех расчетах бралось  $L = a'/u$ . Начало декартовой системы координат при расчете эллипсоидов вращения помещалось в центре тела ( $z_0 = 0$ ); для  $\delta = 1.5$  — на расстоянии  $z_0 = 0.1$  от центра эллипса, а для  $\delta = 3$  — на расстоянии  $z_0 = 2$ .

Фиг. 3, 4 показывают влияние формы тела на распределение давления на теле и геометрическую картину обтекания. На графиках нанесены расчетные точки работы [2], которые хорошо совпадают с нашими результатами.

В работах [2, 3] даны результаты расчетов прямых конусов со сферическим и эллиптическим закруглениями. Здесь же приводятся результаты расчетов обратных конусов со сферическим и эллиптическим закруглениями.

На фиг. 2 построена картина обтекания затупленного конуса с полууглом раствора  $\beta_k = 20^\circ$  при  $M_\infty = 3$ . Здесь изображены, в частности, ударная волна  $BC$  и характеристика  $AD$ , которая выходит из точки сопряжения сферического и конического участков тела и ограничивает чисто сферический участок. Заметим, что для абсциссы точки  $C$  в работе [3] получено  $z = 5.2$ , в [2]  $z = 5.28$  и в наших расчетах  $z = 5.282$ . Для координаты точки  $C$  в случае  $M_\infty = 20$ ,  $\beta_k = 0$  получаем  $z = 29.20$ .

На фиг. 5 дано распределение давления по  $\xi$  в нескольких плоскостях  $z = \text{const}$ . Здесь же для сравнения точками отмечены результаты, взятые из работы [3].

Фиг. 6, 7 дают распределение давления на поверхности затупленных конусов с различными полууглами раствора  $\beta_k$  при  $M_\infty = 3$  и  $M_\infty = 20$ . Как видно, при отрицательных  $\beta_k$  давление на теле после точки сопряжения продолжает падать и после некоторого  $z$ , мало отличающегося  $z^*$ , начинает увеличиваться, причем это увеличение особенно сильно возрастает при подходе к концу конуса.

Расчеты обтекания затупленных конусов с эллипсоидальным затуплением проводились для случаев

$$\beta_k = +10^\circ, 0, -10^\circ \quad (\delta = 2, M_\infty = 3)$$

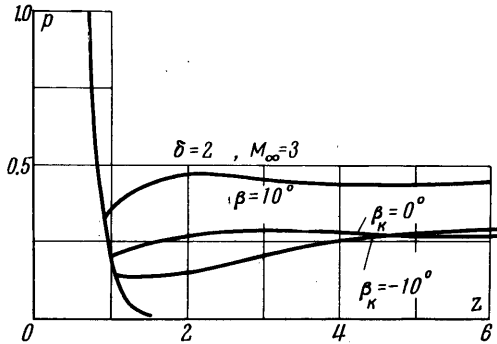
На фиг. 8 сплошной линией изображено положение ударной волны и пунктиром — положение разрывной характеристики в случае

$$\beta_k = -10^\circ, M_\infty = 3$$

На фиг. 9 приведено распределение давления на поверхности. Здесь, как и в случае обтекания затупленных конусов со сферическим затуплением при  $M_\infty = 3$ , давление на теле после точки сопряжения для  $\beta_k \geq 0$  начинает сразу увеличиваться, а при  $\beta_k < 0$  оно продолжает падать до некоторого  $z$ , мало отличающегося от  $z^*$ .

Отметим, что увеличение градиента давления после точки сопряжения для затупленных конусов с эллипсоидальным затуплением ( $\delta = 2$ ) при положительных  $\beta_k$  и  $M_\infty = 3$  значительно больше, по сравнению со случаем сферического затупления при соответствующих  $\beta_k$ .

Автор благодарит Г. Ф. Теленина, под руководством которого выполнена настоящая работа.



Фиг. 9

Поступило 11 VIII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Запьянов З. Д., Миносцев В. Б. Метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
2. Чушкин П. И., Шулишнина Н. П. Таблицы сверхзвукового течения около затупленных конусов. ВЦ АН СССР, 1961.
3. Дьяконов Ю. Н., Зайцева Н. А. Обтекание затупленного тела сверхзвуковым потоком идеального газа. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 1.
4. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
5. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел с отошедшей ударной волной с малой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.